HERTENTAMEN LOGICA (I&E)
Donderdag 14 maart 2019, 10.00 – 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit acht opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Als er bij een opgave gevraagd wordt om iets te controleren, is het van belang dat je ook toelicht waarom je tot een bepaalde conclusie komt.

---

1. [11 pt]

   (a) Geef een complete waarheidstabel, met ook alle relevante subformules voor de volgende formule ϕ:
   $$\neg(p \to q) \lor (r \land q)$$

   (b) Gebruik je waarheidstabel van onderdeel (a) om een formule ϕ' in conjunctieve normaalvorm te creëren die equivalent is aan ϕ. Leg uit hoe je hierbij te werk gaat.

   N.B.: het is dus niet de bedoeling om achtereenvolgens de algoritmes `IMPL_FREE`, `NNF` en `CNF` toe te passen.

---

2. [13 pt] Bewijs de volgende *sequents* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie. Je mag alleen de standaard (*basic* en *derived*) regels gebruiken.

   (a)
   $$p \to \neg q,\ \neg\neg p \land r \ \vdash\ \neg q \land r$$

   (b)
   $$p \lor \neg q \ \vdash\ \neg q \lor p$$

   (c)
   $$\neg(\neg r \land q) \ \vdash\ (p \land q) \to (\neg r \to \neg p)$$

---

3. [13 pt]

   (a) Wanneer noemen we (volgens de definitie) een formule ϕ in propositielogica een *tautologie*?

   (b) In het boek wordt voor het bewijs van de *completeness* van de propositielogica gebruik gemaakt van Propositie 1.38. Hierin staat onder andere het volgende:

   Laat ϕ een formule zijn, met als (enige) atomen $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Laat l een regel zijn in de waarheidstabel van ϕ. Voor elke i met $1 \leq i \leq m$, laat

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{als } p_i \text{ is T in regel } l \\ \neg p_i & \text{als } p_i \text{ is F in regel } l \end{cases}$$

   Als ϕ in regel l naar T evalueert, **dan geldt** dat er een bewijs in natuurlijke deductie bestaat van de *sequent*

$$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_m \vdash \phi$$

   (tot zover Propositie 1.38)

   i. Stel dat een formule ϕ zeven atomen $p_1, p_2, \ldots, p_7$ bevat, en dat regel l van de waarheidstabel er als volgt uitziet:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	ϕ
T	F	F	F	T	T	F	T

   Hoe ziet de sequent er dan concreet uit, die hierboven in Propositie 1.38 bedoeld wordt?

   ii. Stel nu dat een formule ϕ slechts twee atomen p en q bevat, en dat ϕ een tautologie is, dan betekent Propositie 1.38 dat er voor elk van de volgende vier sequents een bewijs in natuurlijke deductie bestaat:

$$\begin{aligned} p, q &\vdash \phi \\ p, \neg q &\vdash \phi \\ \neg p, q &\vdash \phi \\ \neg p, \neg q &\vdash \phi \end{aligned}$$

   Toon nu aan dat er ook een bewijs in natuurlijke deductie bestaat voor de sequent

$$\vdash \phi$$

4. [9 pt] Welke van de volgende drie formules is/zijn een Horn-formule? Geef voor elke formule die geen Horn-formule is, aan wat er (allemaal) in strijd is met de definitie van een Horn-formule.

   (a)

   $$(p_1 \wedge p_4 \to p_2 \wedge p_6) \wedge (\top \to p_1) \wedge (p_4 \vee p_6 \to p_2)$$

   (b)

   $$(p_2 \wedge \neg p_3 \to p_1) \wedge (p_1 \to p_4)$$

   (c)

   $$(\top \to p_3) \wedge (\top \wedge p_6 \to p_5) \wedge (p_3 \wedge p_4 \wedge p_2 \to \bot)$$

---

5. [15 pt] De SAT-solvers die we behandeld hebben, zijn bedoeld voor formules waar (behalve atomen) alleen de logische operatoren $\wedge$ en $\neg$ in voorkomen. Elke formule in de propositielogica kan, met een functie T, vertaald worden naar een equivalente formule met alleen deze twee operatoren. Zo geldt er dat

   $$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

   (a) Wat is $T(\phi_1 \to \phi_2)$?

   (b) Bepaal achtereenvolgens:

      i. $T(\neg r \to \neg p)$

      ii. $T((\neg r \to \neg p) \vee (\neg r \wedge q))$

      Geef (wanneer van toepassing) ook tussenresultaten. Laat in je antwoorden in eerste instantie voorkomens van $\neg\neg$ (twee keer $\neg$ achter elkaar) staan. In tweede instantie mag je ze weghalen.

   (c) Teken de gerichte acyclische graaf (DAG) bij de formule

   $$(\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg q)) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

   (d) Controleer of

   $$(\neg p \wedge \neg(p \wedge \neg q)) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

   satisfiable is, door met een SAT-solver de knopen van je DAG uit het vorige onderdeel met T of F te markeren. Geef daarbij aan in welke volgorde de knopen gemarkeerd worden.

---

6. [13 pt]

   (a) Laat R een binair predikaatsymbool zijn. Geef een model $\mathcal{M}$ (dus een concrete verzameling A en een concreet predikaat) dat de volgende formule ϕ_1 waarmaakt, en een model $\mathcal{M}'$ dat ϕ_1 *niet* waarmaakt:

   $$(\forall x \exists y R(x,y)) \to (\exists y \forall x R(x,y))$$

   (b) Laten P en Q binaire predikaatsymbolen zijn. Geef een model $\mathcal{M}'$ (dus een concrete verzameling A en concrete predikaten) dat de volgende formule ϕ_2 *niet* waarmaakt:

   $$\forall x \forall y (P(x,y) \to (x = y \vee (\exists z (P(x,z) \wedge Q(z,y)))))$$

   (c) Teken de parse tree bij de formule uit onderdeel (b).

---

7. [14 pt]

   (a) Laten P en Q unaire predikaatsymbolen zijn. Bewijs de volgende *sequent* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie (zonder hulpresultaten over equivalente formules te gebruiken):

   $$\forall x (\neg Q(x)),\ \forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \ \vdash\ \forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

   (b) Laten B en F unaire predikaatsymbolen zijn. Bewijs de volgende *sequent* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie (zonder hulpresultaten over equivalente formules te gebruiken):

   $$\exists x (B(x) \wedge \neg F(x)) \ \vdash\ \neg \forall x (B(x) \to F(x))$$

---

8. [12 pt] Bij deze opgave moet je twee semantische tableaus tekenen. Je mag hierbij de vereenvoudigde notatie gebruiken; je hoeft dus niet bij iedere operatie alle andere formules te herhalen. Pas wel maar één reductieregel tegelijk toe, en vermeld ook steeds expliciet welke reductieregel je gebruikt.

   Verder moeten de semantische tableaus compleet zijn: ook als je al een tegenvoorbeeld gevonden hebt, moet je andere takken nog wel uitwerken. Een sluitende tak hoef je niet verder uit te werken (mocht dat kunnen).

   (a) Controleer met behulp van een compleet semantisch tableau of de volgende gevolgtrekking geldig is of niet:

   $$\neg(\neg r \wedge q) \ /\ (p \wedge q) \to (\neg r \to \neg p)$$

   Zo niet, geef dan bij elke open tak van het tableau de resulterende waardering van de atomen die als tegenvoorbeeld dient.

   (b) Laten P en Q unaire predikaatsymbolen zijn. Controleer met behulp van een compleet semantisch tableau of de volgende gevolgtrekking geldig is of niet:

   $$\forall x (\neg Q(x)),\ \exists x (P(x) \to Q(x)) \ /\ \forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

   Zo niet, geef dan bij elke open tak van het tableau het resulterende model dat als tegenvoorbeeld dient.
