HERTENTAMEN LOGICA (I&E)
Donderdag 15 maart 2018, 10.00 – 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Als er bij een opgave gevraagd wordt om iets te controleren of aan te tonen, is het belangrijk dat je ook toelicht waarom je tot een bepaalde conclusie komt.

---

1. [8 pt]

   (a) Druk de volgende logische redenering uit in een *sequent* in propositielogica, bestaande uit een aantal *premises* en een conclusie:

   > Als ik laat van huis ga en de trein rijdt niet, dan ben ik te laat. Als ik te laat ben, is er geen tentamen. Ik ga laat van huis en er is wel tentamen. *Dus* de trein rijdt wel.

   Leg bij elk gebruikt atoom uit waar het voor staat.

   (b) Bewijs de resulterende sequent van het vorige onderdeel met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie. Je mag alleen de standaard (*basic* en *derived*) regels gebruiken.

---

2. [13 pt] Bewijs ook de volgende *sequents* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie. Je mag alleen de standaard (*basic* en *derived*) regels gebruiken.

   (a)

$$(p \land q) \to r,\ \neg\neg p \ \vdash \ q \to r$$

   (b)

$$(p \land \neg q) \to r \ \vdash \ \neg p \lor (\neg r \to q)$$

---

3. [14 pt] Laat $n \geq 1$ en laat $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ en ψ formules in de propositielogica zijn.
De *soundness* van de propositielogica houdt in dat als

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \ \vdash \ \psi$$

geldt, dat dan ook geldt

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \ \vDash \ \psi$$

Ofwel, als er een bewijs in naturlijke deductie bestaat van de sequent

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \ \vdash \ \psi$$

dan geldt ook de *semantic entailment*. Dit wordt in het boek bewezen met *course-of-values* inductie naar de lengte (het aantal regels) van het bewijs in natuurlijke deductie. Laten we deze lengte k noemen.

(a) Als $k = 1$, dan ziet het bewijs er als volgt uit:

1	ϕ	premise

Hoe ziet in dit geval de sequent eruit?

(b) Stel nu dat $k \geq 2$ en dat voor alle sequents met een bewijs van lengte kleiner dan k, de corresponderende semantic entailment ook geldt (inductiehypothese). Dan kijken we nu naar een bewijs van lengte k:

1	ϕ_1	premise
2	ϕ_2	premise
	$\vdots$	
n	ϕ_n	premise
	$\vdots$	
k	ψ	toepassing van bewijsregel

Voor de inductiestap moeten we voor alle mogelijke bewijsregels die in regel k kunnen zijn toegepast, beredeneren dat nu ook

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \ \vDash \ \psi$$

geldt. Geef deze redenering voor het geval dat in regel k de bewijsregel $\wedge$i is toegepast.

---

4. [27 pt] De SAT-solvers die we behandeld hebben, zijn bedoeld voor formules waar (behalve atomen) alleen de logische operatoren $\wedge$ en $\neg$ in voorkomen. Elke formule in de propositielogica kan, met een functie T, vertaald worden naar een equivalente formule met alleen deze twee operatoren. Zo geldt er dat

$$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

   (a) Wat is $T(\phi_1 \to \phi_2)$? Toon met behulp van een (complete) waarheidstabel, met ook alle relevante subformules, dat het resultaat inderdaad equivalent is aan $\phi_1 \to \phi_2$.

   (b) Bepaal achtereenvolgens:

      i. $T((p \wedge q) \to r)$
      ii. $T(\neg p \vee q)$
      iii. $T(\neg(((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee q)))$
      Geef in dit laatste geval ook tussenresultaten.

   Laat in je antwoorden in eerste instantie voorkomens van $\neg\neg$ (twee keer $\neg$ achter elkaar) staan. In tweede instantie mag je ze weghalen.

   (c) Teken de gerichte acyclische graaf (DAG) bij je eindantwoord voor onderdeel 4(b)iii.

   (d) Controleer of $\neg(((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee q))$ *satisfiable* is, door met een SAT-solver de knopen van je DAG uit het vorige onderdeel met T of F te markeren. Geef daarbij aan in welke volgorde de knopen gemarkeerd worden.

Z.O.Z.

5. [9 pt]

   Laat ϕ de volgende formule in predikaatlogica zijn:

   $$\neg(\forall x((Q(x, f(y)) \wedge \exists z P(z)) \rightarrow \exists y(P(f(y)) \vee Q(x, z))))$$

   Hierin is P een unair predikaatsymbool, Q een binair predikaatsymbool, f een unair functiesymbool en zijn x, y en z variabelen.

   (a) Teken de *parse tree* van ϕ. Geef in de parse tree aan welke variabelen vrij danwel gebonden zijn.

   (b) Wanneer noemen we (in het algemeen, dus volgens de definitie) een term t vrij voor een variabele x in een formule ϕ ?

---

6. [17 pt]

   (a) Laat ϕ en ψ twee formules in predikaatlogica zijn, waarbij ψ *geen* vrije variabele x heeft. Bewijs de volgende *sequent* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie (zonder hulpresultaten over equivalente formules te gebruiken):

   $$\forall x(\psi \rightarrow \phi) \ \vdash \ \psi \rightarrow (\forall x \phi)$$

   (b) Laat P een unair predikaatsymbool zijn en x een variabele. Bewijs de volgende *sequent* met behulp van de bewijsregels voor natuurlijke deductie (zonder hulpresultaten over equivalente formules te gebruiken):

   $$\neg \forall x P(x) \ \vdash \ \exists x \neg P(x)$$

---

7. [12 pt] Bij deze opgave moet je twee semantische tableaus tekenen. Je mag hierbij de vereenvoudigde notatie gebruiken; je hoeft dus niet bij iedere operatie alle andere formules te herhalen. Pas wel maar één reductieregel tegelijk toe.

   Verder moeten de semantische tableaus compleet zijn: ook als je al een tegenvoorbeeld gevonden hebt, moet je andere takken nog wel uitwerken. Een sluitende tak hoef je niet verder uit te werken (mocht dat kunnen).

   (a) Laat opnieuw P een unair predikaatsymbool zijn en x een variabele. Toon met behulp van een compleet semantisch tableau aan dat de volgende gevolgtrekking geldig is:

   $$\neg \forall x P(x) \ / \ \exists x \neg P(x)$$

   (b) Laat P en Q unaire predikaatsymbolen zijn en x en y variabelen. Toon met behulp van een compleet semantisch tableau aan dat de volgende gevolgtrekking *niet* geldig is:

   $$\exists x(P(x) \vee \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))) \ / \ \exists y Q(y)$$

   Geef bij elke open tak van het tableau het resulterende model dat als tegenvoorbeeld dient.
