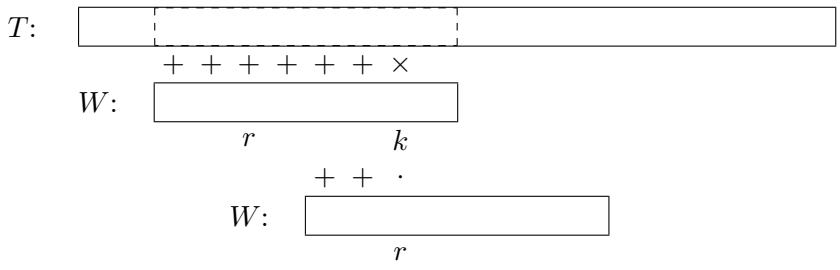
Patroon herkennen met Knuth-Morris-Pratt

We proberen een woord W van lengte M te vinden in een (veel langere) tekst T van lengte N. We gaan er hier vanuit dat de M letters van W posities $1, 2, \ldots, M$ in W bezetten, en dat de N letters van de tekst posities $1, 2, \ldots, N$ in T bezetten (we beginnen dus niet op positie 0!).

In het naïeve algoritme leggen we voor $i = 1, 2, \ldots, N - M + 1$, de eerste letter van W onder positie i van T. Vervolgens lopen we van links naar rechts het woord W af, totdat we een letter treffen die niet gelijk is aan de corresponderende letter in de tekst, of totdat we aan het eind van W zijn.

Als dit bij de k^{e} letter van W misgaat, is het kennelijk bij de $k - 1$ voorgaande letters van W goedgegaan. We weten dan dus wat de corresponderende $k - 1$ letters in de tekst T zijn, en we weten dat de huidige letter in de tekst ongelijk is aan de k^{e} letter van W. We kunnen deze kennis gebruiken, door het woord in één keer (eventueel) meerdere posities door te schuiven, en door ná het doorschuiven niet vooraan W te beginnen met vergelijken van letters.

Voor elke positie in W bepalen we daarom een *failure-link*: Stel dat de failure-link van positie k gelijk is aan r. Dan betekent dat: als het vergelijken van W met de tekst T misgaat bij de k^{e} letter van W, dan schuiven we het patroon in een keer $k - r$ posities naar rechts, en we gaan nu de r^{e} letter van W vergelijken met dezelfde letter in de tekst waar het zojuist misging. We hoeven niet nog apart de letters op posities $1, 2, \ldots, r - 1$ van W met de corresponderende letters in de tekst te vergelijken, omdat we al weten dat die OK zijn.

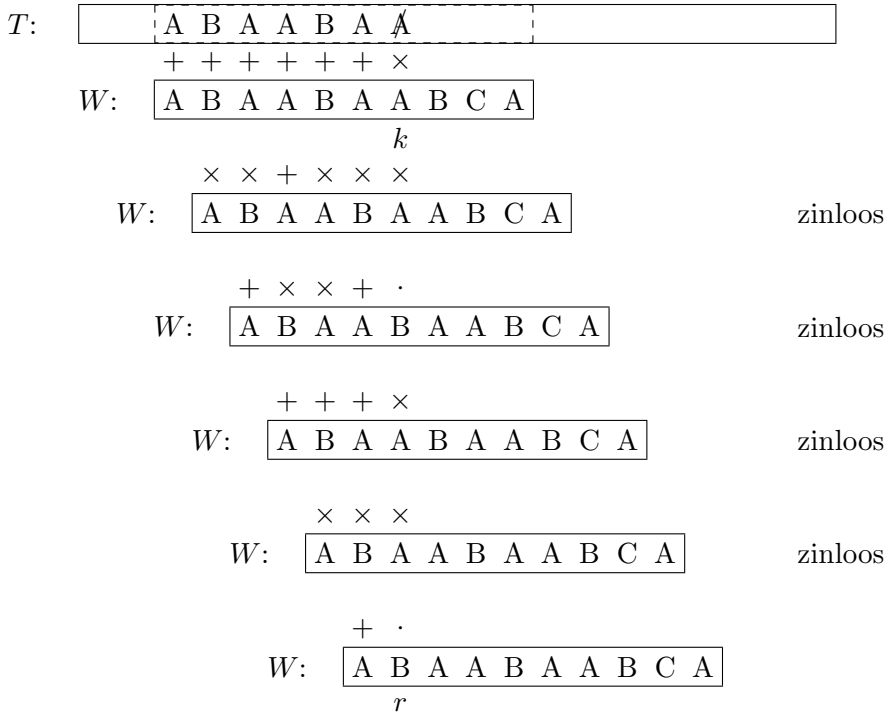


In bovenstaand plaatje gaat het vergelijken van de letters van W met de tekst mis bij $k = 7$. In dit geval is de failure-link voor $k = 7$ gelijk aan $r = 3$. We schuiven W nu meteen $k - r = 4$ posities door. We weten kennelijk dat minder posities doorschuiven geen zin heeft, dat $W[1] = W[5]$, $W[2] = W[6]$ en $W[3] \neq W[7]$.

N.B.: Dit is een slimme variant van het oorspronkelijke algoritme van Knuth-Morris-Pratt. In het oorspronkelijke algoritme worden bij misgaan van een vergelijking bij positie k in W alleen de letters op posities $1, 2, \ldots, k-1$ gebruikt voor het bepalen van een failure-link. Er wordt dus geen gebruik gemaakt van de wetenschap dat de huidige tekstletter ongelijk is aan $W[k]$. Voor onze cursus hoef je alleen de slimme variant te kennen.

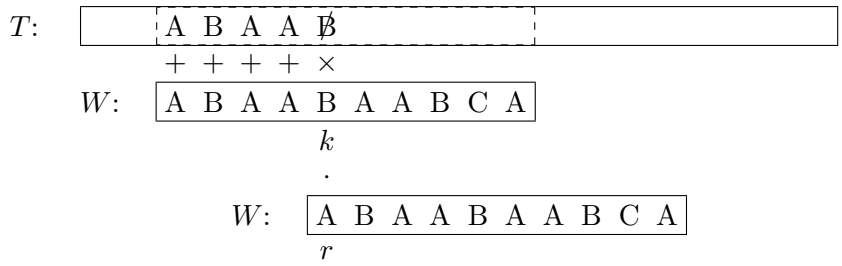
Voorbeeld

Laat W = ABAABAABCA.

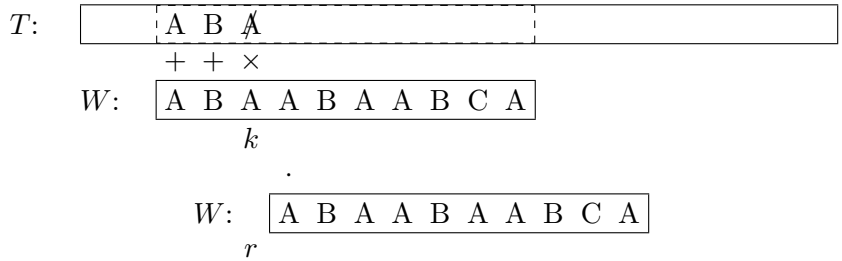


Voor dit woord W is de failure-link voor $k = 7$ dus gelijk aan $r = 2$. We schuiven W meteen $k - r = 5$ posities door, omdat minder doorschuiven geen zin heeft. We hoeven vervolgens niet de eerste letter van W met de corresponderende tekstletter te vergelijken, omdat we al weten dat die goed moet zijn. We gaan direct de $r = 2^{\text{e}}$ letter met de huidige tekstletter vergelijken.

Een failure-link die gelijk is aan $r = 1$ betekent, dat we bij een mislukte vergelijking de eerste letter onder de huidige tekstletter leggen. Bijvoorbeeld voor $k = 5$:

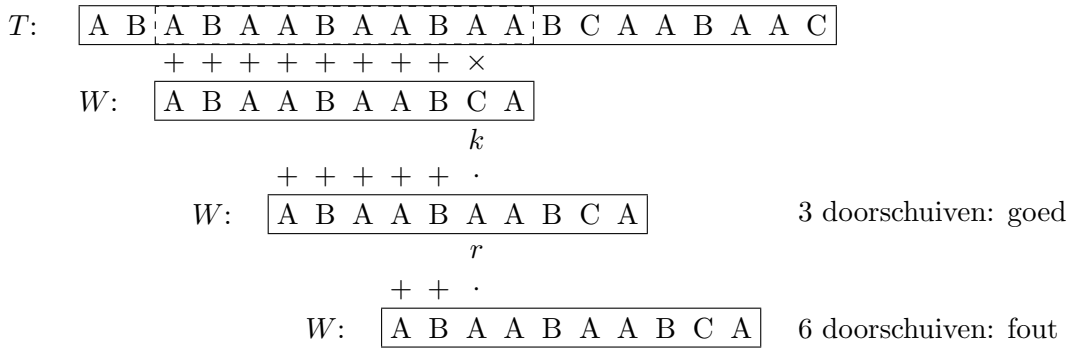


Een failure-link die gelijk is aan $r = 0$ betekent dat we bij een mislukte vergelijking, het woord W direct na de huidige tekstletter leggen, *alsof* we de 0^{e} letter van W (die natuurlijk niet bestaat) onder de huidige tekstletter leggen. Bijvoorbeeld voor $k = 3$:



De failure-link van positie $k = 1$ is voor alle woorden W gelijk aan $r = 0$.

Pas op dat je het woord W niet te ver doorschuift. In ons voorbeeld is de failure-link voor $k = 9$ gelijk aan $r = 6$. We moeten het woord W dus $k - r = 3$ posities doorschuiven als de vergelijking voor $W[9]$ misgaat. Als we in plaats daarvan het woord 6 posities doorschuiven, zou dat ook 'passen' tot en met de huidige tekstletter, maar dan zouden we een voorkomen van het woord W over het hoofd kunnen zien, zoals in het volgende voorbeeld:



Als we de failure-link van positie k afkorten met FL[k], dan geldt voor ons voorbeeld:

FL[1]=0, FL[2]=1, FL[3]=0, FL[4]=2, FL[5]=1, FL[6]=0, FL[7]=2, FL[8]=1, FL[9]=6, FL[10]=0.

Berekenen failure-links

Het berekenen van de failure-links kun je eenvoudig in $\mathcal{O}(M^3)$. We moeten immers voor alle M posities van woord W een failure-link berekenen. Voor positie k zal de failure-link gelijk zijn aan 0, 1, 2, ..., of $k-1$. In het slechtste geval proberen we k mogelijke failure-links voor de ene positie k. Als we de waarde r proberen als failure-link voor positie k moeten we controleren dat $W[1]$–$W[r-1]$ netjes gelijk zijn aan $W[k-r+1]$–$W[k-1]$, en dat $W[r] \neq W[k]$. Dit laatste kost maximaal r vergelijkingen.

Zo wordt het totale aantal benodigde vergelijkingen voor het berekenen van de failure-links:

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{r=0}^{k-1} r = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2} k(k-1) = \mathcal{O}(M^3)$$

Het kan ook slimmer: er bestaat een algoritme om de failure-links in $\mathcal{O}(M)$ tijd te berekenen. Daarmee wordt de totale tijdscomplexiteit van patroonherkennen met het algoritme van Knuth-Morris-Pratt (eerst berekenen failure-links, en vervolgens zoeken van het woord W met behulp van de failure-links): $\mathcal{O}(M + N) = \mathcal{O}(N)$. Dat is beter dan de tijdscomplexiteit (voor het slechtste geval) van patroonherkennen met het naïeve algoritme, die $\mathcal{O}(M \cdot N)$ is.