HERTENTAMEN FORMELE TALEN EN BEREKENBAARHEID
Donderdag 26 maart 2026, 09.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit acht opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Wanneer er bij een vraag om uitleg, motivatie of toelichting gevraagd wordt, is het belangrijk om die ook te geven.
Als we het in dit tentamen over een eindige automaat hebben (zonder verdere toevoeging), bedoelen we een deterministische eindige automaat zonder Λ-transities (wat elders *DFA* genoemd wordt).

---

1. [8 pt] Laat

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \quad | \quad x \text{ eindigt op } ababb\}$$

Teken een eindige automaat M, zó dat $L(M) = L$.

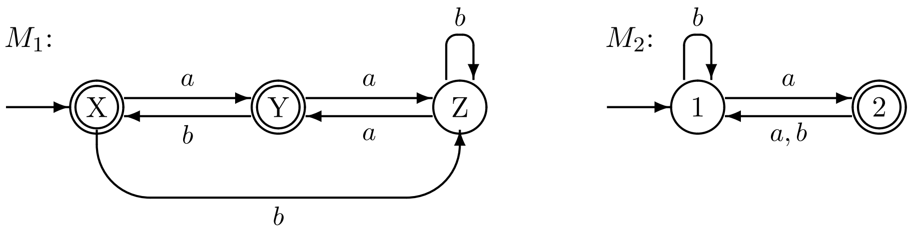
---

2. [10 pt]

(a) Laat $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ en $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ twee willekeurige eindige automaten met hetzelfde invoeralfabet Σ zijn. Laat $L_1 = L(M_1)$ en $L_2 = L(M_2)$. Met de productconstructie kun je uit M_1 en M_2 een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ construeren, zó dat $L(M) = L_1 \cup L_2$.

Beschrijf (in woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) wat bij deze automaat M de onderdelen Q, q_0 en A concreet zijn.

(b) Pas de productconstructie van onderdeel (a) toe op de volgende twee eindige automaten M_1 en M_2. Dat wil zeggen: teken de resulterende automaat M:



Teken ook eventuele niet-bereikbare toestanden met hun transities, die uit de constructie volgen.

---

3. [10 pt] Laat

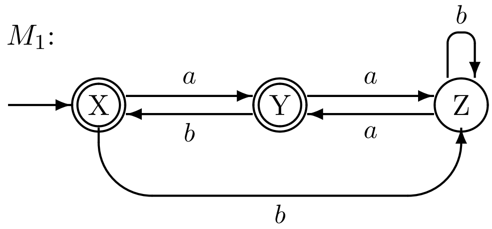
$$L = \{x \in \{a,b\}^* \quad | \quad |x| \text{ is oneven en } x \text{ bevat (minstens) een substring } bb\}$$

Geef een reguliere expressie voor de taal L. Deze expressie moet rechtstreeks gebaseerd zijn op eigenschappen van de taal. Ze moet dus niet het resultaat zijn van een standaardconstructie om bijvoorbeeld een eindige automaat om te zetten in een reguliere expressie.

Leg ook duidelijk uit waarom je expressie precies de taal L beschrijft.

---

4. [10 pt] Beschouw onderstaande eindige automaat M_1:



Gebruik de methode van Brzozowski en McCluskey om een reguliere expressie op te bouwen die precies $L(M_1)$ beschrijft. Elimineer de toestanden in de volgorde Z, Y, X. Geef ook tussenresultaten.

---

5. [22 pt] Laat

$$L = \{a^i b^j \mid j \geq 2i - 3\}.$$

(a) Geef de eerste zes elementen in de canonieke (shortlex) volgorde van L.

(b) Geef een context-vrije grammatica G, zó dat $L(G) = L$.

Probeer ervoor te zorgen dat G ondubbelzinnig is. Als dit niet lukt, kun je nog wel het grootste deel van de punten voor dit onderdeel verdienen.

Als je context-vrije grammatica dubbelzinnig is, geef dan twee verschillende afleidingsbomen voor een string $x \in L$.

Hint: Als je niet direct een geschikte G vindt, bekijk dan de gevallen $i = 0$, $i = 1$ en $i \geq 2$ afzonderlijk.

(c) Teken een stapelautomaat M, zodat $L(M) = L$.

Deze stapelautomaat moet rechtstreeks gebaseerd zijn op eigenschappen van de taal. Hij moet dus niet het resultaat zijn van een standaardconstructie om bijvoorbeeld een context-vrije grammatica om te zetten in een stapelautomaat.

Probeer ervoor te zorgen dat M deterministisch is en geen Λ-transities bevat. Als dit niet lukt, kun je nog wel het grootste deel van de punten voor dit onderdeel verdienen.

Leg ook duidelijk uit hoe M zijn toestanden en stapel(symbolen) gebruikt om precies de juiste taal te accepteren.

---

6. [10 pt] Het pomplemma voor context-vrije talen luidt als volgt:

   > Stel L is een context-vrije taal.
   > Dan is er een integer $n \geq 2$, zó dat
   > voor iedere $u \in L$ waarvoor $|u| \geq n$, u geschreven kan worden als
   > $u = vwxyz$ voor bepaalde strings v, w, x, y en z waarvoor
   > 1. $|wy| \geq 1$ (dwz $wy \neq \Lambda$).
   > 2. $|wxy| \leq n$.
   > 3. Voor elke $m \geq 0$ behoort de string vw^mxy^mz ook tot L.

   Laat nu
   $$L_1 = \{a^i b^j a^k \mid j \geq 2i \text{ en } k \geq i\}$$
   laat n voor deze taal het getal uit het pomplemma zijn, en laat $u_1 = a^n b^{2n} a^n$. Er geldt dat $u_1 \in L_1$ en $|u_1| \geq n$.

   Gebruik bovenstaand pomplemma en string u_1 om aan te tonen dat de taal L_1 niet context-vrij is. Ofwel: veronderstel dat L_1 wél context-vrij is. Toon aan dat u_1 niet opgepompt en/of weggepompt kan worden. Vergeet ook niet om de conclusie te trekken.

---

7. [16 pt] Laat
   $$L = \{a^i b^j a^i \mid j \geq 2i\}.$$
   Teken een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine T, zó dat $L(T) = L$. Dat wil zeggen: T accepteert een invoer $x \in \{a, b\}^*$, dan en slechts dan als $x \in L$.

   Als je voor T gebruik wilt maken van componenten[1], zul je die componenten ook moeten tekenen.

   Leg ook duidelijk uit hoe T werkt.

---

8. [14 pt] Beschouw de volgende twee beslissingsproblemen:

   > *Accepts*-Λ:
   > Gegeven een Turing machine T_1 met invoeralfabet $\{a, b\}$, is $\Lambda \in L(T_1)$?
   >
   > *Accepts*-$\{ab\}$:
   > Gegeven een Turingmachine T_2 met invoeralfabet $\{a, b\}$, is $L(T_2) = \{ab\}$?

   Merk op dat een Turingmachine T_2 bijvoorbeeld ook een nee-instantie van *Accepts*-$\{ab\}$ is, als $L(T_2) = \{a, b\}^*$.

   Toon aan dat *Accepts*-$\Lambda \leq$ *Accepts*-$\{ab\}$. Doe dit door een geldige reductie tussen de twee beslissingsproblemen te beschrijven. Laat uiteraard ook zien dat aan alle eisen van een reductie is voldaan.

   Als je geen geschikte reductie tussen de twee beslissingsproblemen weet, kun je een deel van de punten verdienen door uit te leggen hoe je voor algemene beslissingsproblemen P_1 en P_2 aantoont dat $P_1 \leq P_2$.

`einde tentamen`

[1] Bij het vak Formele Talen en Berekenbaarheid hebben we dit jaar het onderwerp componenten niet eens behandeld.