

Huiswerkopgave 4 Formele Talen en Berekenbaarheid, najaar 2025

Deels gepubliceerd, vrijdag 28 november 2025. **Compleet gemaakt, maandag 8 december 2025.**

Uiterste inleverdatum: **zaterdag 13 december** 2025, 23.59 uur.

Bij elke opgave staat vermeld hoeveel punten er ongeveer met die opgave te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

De opgave moet individueel gemaakt worden. Antwoorden in te leveren via Brightspace. Lever één bestand (eventueel een zip) in. Vermeld in je inzending ook je naam en studentnummer. Je mag je antwoorden zowel intypen als handmatig schrijven. Lever in het laatste geval een goed leesbare scan / goed leesbare foto's in.

1. [20 pt] Het pomplemma voor context-vrije talen luidt als volgt:

Stel L is een context-vrije taal.

Dan is er een integer $n \geq 2$, zó dat

voor iedere $u \in L$ waarvoor $|u| \geq n$, u geschreven kan worden als $u = vwx yz$ voor bepaalde strings v, w, x, y en z waarvoor

1. $|wy| \geq 1$ (dwz $wy \neq \Lambda$).
2. $|wxy| \leq n$.
3. Voor elke $m \geq 0$ behoort de string vw^mxy^mz ook tot L .

Laat nu

$$\begin{aligned} L_1 = \{ & x \in \{a,b,c\}^* \mid \text{het aantal voorkomens van } ab \text{ in } x \\ & \text{is gelijk aan het aantal voorkomens van } bc \text{ in } x \\ & \text{en is ook gelijk aan het aantal voorkomens van } ca \text{ in } x \} \end{aligned}$$

Dus bijvoorbeeld $abcaacabccb \in L_1$, want alle drie de substrings komen twee keer voor. Laat nu n voor deze taal het getal uit het pomplemma zijn. Je mag ervan uitgaan dat $n \geq 4$.

Geef bij elk van de onderstaande vier strings u_1, u_2, u_3, u_4 aan of hij geschikt is om een tegenspraak met het pomplemma te vinden. Geef bovendien voor elke string u_i die **niet** geschikt is, aan waarom hij niet geschikt is, bijvoorbeeld via een concrete opsplitsing $vwxyz$ van u_i die keurig aan het pomplemma voldoet. Als u_i wel geschikt is om een tegenspraak met het pomplemma te vinden, hoef je dat niet toe te lichten.

$$u_1 = a^n b^n c^n$$

$$u_2 = c^n b^n a^n$$

$$u_3 = (abc)^n a$$

$$u_4 = (ab)^n (bc)^n (ca)^n$$

Z.O.Z.

2. [40 pt] Laat de functie $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a\}^*$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \text{langste substring van } x \text{ bestaande uit alleen } a\text{'s}$$

Dus bijvoorbeeld $f(aabbabaaabaa) = aaa$ en $f(bbb) = \Lambda$.

- (a) Teken een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine T , zó dat T functie f berekent.
 Als je voor T gebruik wilt maken van componenten¹, zul je die componenten ook moeten tekenen.
- (b) Leg ook duidelijk uit hoe T werkt.

3. [40 pt]

- (a) Beschouw de volgende twee beslissingsproblemen:

Accepts-ab:

Gegeven een Turingmachine T_1 met invoeralfabet $\{a, b\}$, is $ab \in L(T_1)$?

AcceptsEverything:

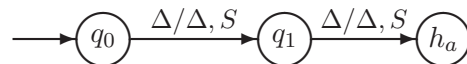
Gegeven een Turingmachine T_2 , met invoeralfabet Σ , is $L(T_2) = \Sigma^*$?

Stel dat we *Accepts-ab* willen reduceren naar *AcceptsEverything*. Beredeneer waarom we geen geldige reductie krijgen als we, voor een instantie T_1 van *Accepts-ab*, de instantie T_2 van *AcceptsEverything* als volgt definiëren:

Als T_1 ab accepteert, dan is T_2 de volgende Turingmachine:



Als T_1 ab niet accepteert, dan is T_2 de volgende Turingmachine:



- (b) Beschouw nu ook het volgende beslissingsprobleem:

Accepts-XX:

Gegeven een Turingmachine T_3 met invoeralfabet $\{a, b\}$, is $L(T_3) = XX$, waarbij

$XX = \{ss \mid s \in \{a, b\}^*\}$?

Er is gegeven dat *Accepts-ab* niet beslisbaar is. Toon aan dat ook *Accepts-XX* niet beslisbaar is, met behulp van een reductie met *Accepts-ab*. Laat uiteraard ook zien dat aan alle eisen van een reductie is voldaan, en vergeet niet om de conclusie te trekken.

¹Bij het vak Formele Talen en Berekenbaarheid hebben we dit jaar het onderwerp componenten niet eens behandeld.