TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 3
Maandag 6 juni 2011, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Opgave 1 [`14 pt`]
De context-vrije grammatica G heeft startsymbool S, terminaal alfabet $\{a,b,c,d\}$ en producties $S \to aS \mid aBCa \quad B \to bBb \mid bCa \mid d \quad C \to c \mid \Lambda$.

(a) Pas in G factorisatie toe op die producties bij eenzelfde niet-terminaal waarvoor de rechterzijden met hetzelfde symbool beginnen. De resulterende grammatica noemen we H.

(b) Geef voor elk van de producties van de grammatica H uit het vorige onderdeel de bijbehorende lookahead, d.w.z. geef aan bij welke terminalen (als volgende invoersymbool) de productie hoort.

(c) Geef een DPDA die als top-down parser voor $L(H)$ kan fungeren.

Opgave 2 [`24 pt`]
Laat $L_1 = \{a^{2n}ba^n \mid n \geq 0\}$
en laat $L_2 = \{a^{2n}ba^n \mid n \geq 0\ \} \cup \{a^nba^{2n} \mid n \geq 0\ \}$.

(a) Geef een deterministische PDA die L_1 accepteert (met eindtoestanden).

(b) Geef een PDA die L_2 accepteert (met eindtoestanden).

Laat L een willekeurige taal in CFL zijn, en laat # een 'nieuw' symbool zijn (een symbool dat niet in het alfabet van L voorkomt dus). Laat $L^{\#}$ gedefinieerd worden door $L^{\#} = \{x\#y \mid x \in L \text{ en } xy \in L\}$.

(c) Wat zijn $L_1^{\#}$ en $L_2^{\#}$ voor de hierboven gegeven talen L_1 en L_2 ? Geef (tevens) twee woorden in $L_1^{\#}$ en twee woorden in $L_2^{\#}$.

(d) Toon aan dat $L_2 \notin$ DCFL. Je mag hierbij gebruik maken van resultaten als
het pomplemma voor context-vrije talen,
als $L \in$ CFL en R is regulier, dan is $L \cap R \in$ CFL,
als $L \in$ DCFL en R is regulier, dan is $L \cap R \in$ DCFL,
als $L \in$ DCFL, dan is $L' \in$ DCFL,
als $L \in$ DCFL, dan is ook $L^{\#} \in$ DCFL.

Opgave 3 [`19 pt`]
Volgens Stelling 9.1 uit het boek kan iedere n-tapes TM T_1 gesimuleerd worden met een 1-tapes TM T_2. In het bewijs wordt beschreven hoe dat gaat voor $n = 2$. Bij deze opgave moet je het begin van deze constructie laten zien.

Laat derhalve $T_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, q_1, \delta_1)$ een 2-tapes TM zijn. Beantwoord de volgende vragen:

(a) Uit welke symbolen bestaat het tape-alfabet Γ_2 van T_2?

(b) Stel dat de invoer van T_1 het woord $x = x_1x_2 \dots x_n$ over Σ is. Hoe ziet dan de tape van T_2 eruit aan het begin van de simulatie?

(c) Stel dat T_1 een transitie bevat van de vorm

$$\delta_1(p, a_1, a_2) = (q, b_1, b_2, D_1, D_2).$$

D.w.z. als T_1 in toestand p is met a_1 onder de leeskop op tape 1 en a_2 onder de leeskop op tape 2, dan gaat T_1 naar toestand q, schrijft b_1 op tape 1, schrijft b_2 op tape 2, gaat op tape 1 naar richting D_1 en op tape 2 naar richting D_2.

Beschrijf stap-voor-stap hoe deze transitie in T_2 wordt gesimuleerd.

Opgave 4 [17 pt]

Deze opgave gaat over Turing Machines om verschillen tussen unaire getallen te berekenen.

In deze opgave mag je gebruik maken van de bekende componenten InsertSymbol (σ) en DeleteSymbol (en niet van andere componenten, tenzij je ze zelf uitwerkt). InsertSymbol (σ) verandert de tape-inhoud van een TM van $y\underline{z}$ in $y\underline{\sigma}z$, en DeleteSymbol doet precies het omgekeerde.

(a) Construeer een TM T_1 die als invoer twee unaire, niet-negatieve getallen x en y heeft en de volgende functie f berekent:

$$f(x,y) = \begin{cases} \underbrace{11\dots1}_{x-y \text{ keer}} & \text{als } x \geq y \\ \\ \underbrace{22\dots2}_{y-x \text{ keer}} & \text{als } y > x \end{cases}$$

Bijvoorbeeld: $f(11111, 111) = 11$ en $f(1, 1111) = 222$. Voor elke combinatie van niet-negatieve unaire getallen x en y moet T_1 dus de berekening van $(q_0, \underline{\Delta}x\Delta y)$ naar $(h_a, \underline{\Delta}f(x,y))$ uitvoeren.

Geef T_1 door middel van zijn toestandsdiagram en leg duidelijk uit hoe hij werkt.

(b) Construeer een TM T_2 die als invoer drie unaire, niet-negatieve getallen x, y en z heeft en de volgende functie g berekent:

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \underbrace{11\dots1}_{x-(y-z) \text{ keer}} & \text{als } x \geq (y-z) \\ \\ \underbrace{22\dots2}_{(y-z)-x \text{ keer}} & \text{als } (y-z) > x \end{cases}$$

Bijvoorbeeld: $f(11111, 111, 11) = 1111$ en $f(1, 11111, 11) = 22$. Voor elke combinatie van niet-negatieve unaire getallen x, y en z moet T_2 dus de berekening van $(q_0, \underline{\Delta}x\Delta y\Delta z)$ naar $(h_a, \underline{\Delta}g(x,y,z))$ uitvoeren.

Geef T_2 door middel van zijn toestandsdiagram en leg duidelijk uit hoe hij werkt.

Opgave 5 [10 pt]

(a) Geef een context-gevoelige grammatica G voor de taal $L_1 = \{a^{2n}da^n da^{3n} \mid n \geq 1\}$. Leg ook uit wat de bedoeling is van de verschillende niet-terminalen en producties in G.

(b) Geef een afleiding in G voor het woord $aadadaaa$.

Als deze opgave niet lukt, kun je een deel van de punten verdienen door in plaats van L_1 de volgende taal te gebruiken: $L_2 = \{a^{2n}db^n dc^{3n} \mid n \geq 1\}$.

Opgave 6 [16 pt]

(a) Laat P_1 en P_2 twee beslissingsproblemen zijn. Leg uit hoe je aantoont dat $P_1 \leq P_2$.

Bekijk nu de volgende twee beslissingsproblemen.

Accepts-Λ-Even:
Gegeven een TM T. Accepteert T het lege woord Λ in een even aantal stappen?

Accepts:
Gegeven een TM T en een woord x over het invoeralfabet van T. Is $x \in L(T)$?

(b) Toon aan dat Accepts-Λ-Even $\leq$ Accepts.

(c) Toon aan dat Accepts $\leq$ Accepts-Λ-Even.

(d) Gegeven is dat Accepts onbeslisbaar is. Toon aan dat dan ook Accepts-Λ-Even onbeslisbaar is.

Als de onderdelen (b)–(d) niet lukken, kun je een deel van de punten verdienen door in plaats van Accepts het volgende beslissingsprobleem te gebruiken:

Accepts-Λ:
Gegeven een TM T. Is $\Lambda \in L(T)$?

---

einde tentamen