EXTRA TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 1 (I&E)

Dinsdag 19 juli 2016, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit acht opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Geef de gevraagde eindige automaat, stapelautomaten en Turing machine door middel van hun transitiediagram (het plaatje dus).

Als er bij een opgave gevraagd wordt om uitleg of toelichting bij je antwoord, is het belangrijk dat je die ook geeft.

---

1. [9 pt]

   (a) Wanneer noemen we een taal L over een alfabet Σ eindig?

   (b) Beschouw de volgende twee eindige talen L_1 en L_2:

   $$L_1 = \{aa, b\} \qquad\qquad L_2 = \{\Lambda, ba, a\}$$

   Geef alle elementen van L_1L_2.

   (c) Vergeet nu de twee specifieke talen L_1 en L_2 van hierboven. Laat L_1 en L_2 twee willekeurige eindige talen zijn.

   i. Hoeveel elementen bevat L_1L_2 maximaal?

   ii. Geef een voorbeeld van twee eindige talen L_1 en L_2, zó dat

   - $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ (er zijn geen elementen die in zowel L_1 als L_2 zitten),
   - en L_1L_2 minder elementen bevat dan het maximum uit het vorige onderdeel.

---

2. [10 pt] Het pomplemma voor reguliere talen luidt als volgt:

   Stel L is een taal over het alfabet Σ.
   Als L geaccepteerd wordt door een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,
   en als n het aantal toestanden van M is,
   dan zijn er voor elke $x \in L$ met $|x| \geq n$ drie strings u, v en w
   zó dat $x = uvw$ en de volgende drie beweringen waar zijn:
   1. $|uv| \leq n$.
   2. $|v| > 0$ (dwz: $v \neq \Lambda$).
   3. Voor elke $i \geq 0$ zit ook de string uv^iw in L.

   Gebruik dit pomplemma om de volgende bewering te bewijzen:

   Laat M een eindige automaat met n toestanden en alfabet Σ zijn. Dan geldt:
   $L(M)$ is oneindig $\iff$
   $L(M)$ bevat minstens één string $x \in \Sigma^*$ met $|x| \geq n$.

---

3. [18 pt]

(a) Geef een reguliere expressie voor de taal

$$L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \ \mid \ n_a(x) \text{ is even}\}$$

(alle woorden met een even aantal a's).

(b) Geef een reguliere expressie voor de taal

$$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \ \mid \ n_a(x) \text{ is oneven}\}$$

(alle woorden met een oneven aantal a's).

(c) Geef een reguliere expressie voor de taal

$$\begin{aligned} L_3 \quad = \quad & \{x \in \{a,b\}^* \ \mid \ n_a(x) \text{ is oneven} \\ & \qquad \text{en } x \text{ bevat (minstens één voorkomen van) de substring } bba\} \end{aligned}$$

Licht toe hoe je aan deze reguliere expressie komt.

(d) Geef een eindige automaat M_3, zó dat $L(M_3) = L_3$, voor de taal L_3 uit het vorige onderdeel.

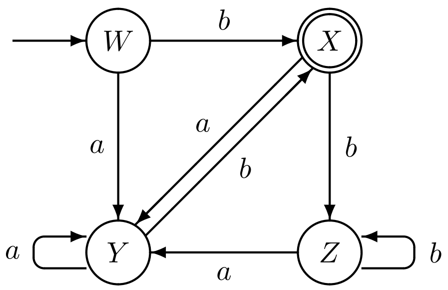
---

4. [13 pt]

(a) Wanneer noemen we een context-vrije grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ regulier?

(b) Leg uit hoe je in het algemeen bij een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ een reguliere grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ kunt construeren, zó dat $L(G) = L(M)$. In het bijzonder: wat zijn V en S in dit geval? En wat zijn de producties in P?

(c) Pas de constructie van het vorige onderdeel toe op de volgende eindige automaat M:



---

5. [9 pt] Beschouw de context-vrije grammatica G_1 met startvariabele S en de volgende producties:
$$S \to bBC \qquad B \to bBa \mid \Lambda \qquad C \to aCc \mid \Lambda$$
   (a) Beschrijf (met woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) de taal $L(G_1)$. Licht je antwoord kort toe.

   (b) Beschouw nu de context-vrije grammatica G_2 met startvariabele S en de volgende producties:
$$S \to bBC \qquad B \to bBa \mid bB \mid \Lambda \qquad C \to aCc \mid Cc \mid \Lambda$$
   (twee producties meer dus dan in G_1).
   Beschrijf (met woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) de taal $L(G_2)$. Licht je antwoord kort toe.

---

6. [21 pt]

   (a) Geef een stapelautomaat M_1, zó dat
$$L(M_1) = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$$
   (b) Laat
$$L_2 = \{a^i b^j \mid i > j \geq 0\}$$
      i. Geef de eerste vijf elementen in de canonieke volgorde van L_2.
      ii. Geef een stapelautomaat M_2, zó dat $L(M_2) = L_2$.

   (c) Laat
$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ en } i + k > j\}$$
      i. Geef de eerste zeven elementen in de canonieke volgorde van L_3.
      ii. Geef een stapelautomaat M_3, zó dat $L(M_3) = L_3$. Probeer ervoor te zorgen dat M_3 deterministisch is, geen Λ-producties kent, en zo weinig mogelijk toestanden heeft.

---

7. [7 pt] **Je hoeft je antwoorden bij deze opgave niet toe te lichten.**
   Beschouw de volgende drie talen:

   - $L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \text{ is even}\}$ (alle woorden met een even aantal a's)
   - $L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|$ is even en de linkerhelft van x bevat evenveel a's als de rechterhelft van $x\}$
   - $L_3 = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|$ is even en de linkerhelft van x bevat twee keer zoveel a's als de rechterhelft van $x\}$

   Geef bij elk van deze talen L_i aan

   - of L_i regulier is,
   - of dat L_i niet regulier, maar wel context-vrij is,
   - of dat L_i niet context-vrij is.

---

8. [13 pt] Geef een Turing machine T, zó dat
$$L(T) = AnBnCn = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$$
   T krijgt dus een invoer $x \in \{a,b,c\}^*$, en accepteert x dan en slechts dan als $x \in AnBnCn$. Leg ook uit hoe T werkt.
