HERTENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 1 (I&E)
Maandag 16 februari 2015, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Geef gevraagde eindige automaten, stapelautomaten en Turing machines door middel van hun transitiediagram (het plaatje dus).

Als er bij een opgave gevraagd wordt om uitleg bij je antwoord, is het belangrijk dat je die ook geeft.

---

1. [9 pt]

   (a) Geef een voorbeeld van drie talen L_1, L_2, L_3 die elk twee elementen bevatten, en waarvoor geldt:
   $$L_1^* \cup L_2L_3 = (L_1^* \cup L_2)L_3$$

   (b) Geef een voorbeeld van drie talen L_1, L_2, L_3 die elk twee elementen bevatten, en waarvoor *niet* geldt:
   $$L_1^* \cup L_2L_3 = (L_1^* \cup L_2)L_3$$
   Geef ook een voorbeeld van een string x die wel in $L_1^* \cup L_2L_3$ en niet in $(L_1^* \cup L_2)L_3$, of andersom. Geef uiteraard ook aan in welke van de twee verzamelingen x wel zit, en in welke niet.

---

2. [9 pt]

   (a) Geef een eindige automaat M_1, zó dat
   $$L(M_1) = \{x \in \{a, b\}^* \quad | \quad x \text{ eindigt op } abaa\}$$

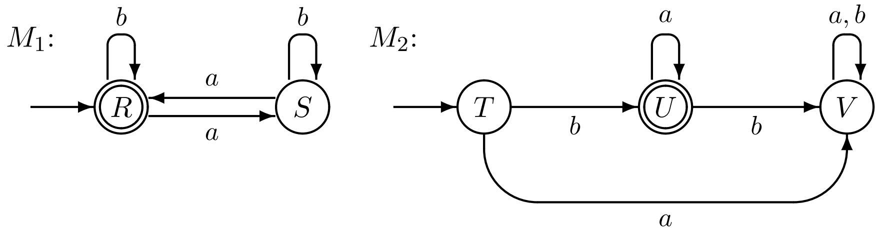
   (b) Geef een eindige automaat M_2, zó dat
   $$L(M_2) = \{x \in \{a, b\}^* \quad | \quad x \text{ bevat een even aantal voorkomens van de substring } aba\}$$
   N.B.: voorkomens van de substring aba mogen overlappen. Bijvoorbeeld: de string $x = ababa$ bevat twee voorkomens van aba.

---

3. [11 pt]

   (a) Laat $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ en $M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$ twee willekeurige eindige automaten zijn, die respectievelijk de talen L_1 en L_2 accepteren.
   Leg uit hoe je een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ kunt construeren, zó dat $L(M) = L_1 \cap L_2$. Vertel in het bijzonder hoe Q, q_0, A en δ er in dit geval uitzien.

   (b) Geef de eindige automaat M die resulteert, als je de (hele) constructie van het vorige onderdeel toepast op de volgende twee eindige automaten:



4. [17 pt] Beschouw de volgende reguliere expressie r_0:

$$r_0 : \quad ((a+ba)^*a + bba)^*$$

(a) Geef de eerste zes elementen in de canonieke volgorde van de taal die wordt beschreven door r_0.

N.B.: let goed op de voorrangsregels van de operatoren waarmee een reguliere expressie wordt opgebouwd (+, concatenatie en Kleene $*$).

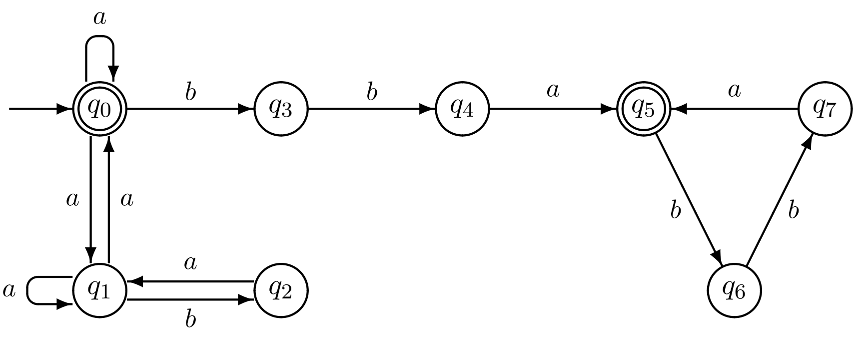
(b) Beschouw nu de volgende vier reguliere expressies $r_1, \ldots, r_4$:

$$\begin{aligned} r_1 &: \quad ((a+ba)(a+ba)^*a + bba)^* \\ r_2 &: \quad ((a+ba)^*(a+bba))^* \\ r_3 &: \quad ((a+ba) + (a+ba)(a+bba))^* \\ r_4 &: \quad (a+ba+bba)^* \end{aligned}$$

Geef voor elk van de reguliere expressies r_1, r_2, r_3, r_4 aan, of die expressie dezelfde taal beschrijft als de reguliere expressie r_0.

Zo nee, geef dan een string x met lengte $|x| \leq 5$, zó dat x wel in de taal van r_0 zit en niet in de taal van r_i of andersom. (Inderdaad, als r_0 en r_i niet dezelfde taal beschrijven, zal er bij deze expressies altijd zo'n x bestaan.) Geef uiteraard ook aan in welke van de twee talen x wel zit, en in welke niet.

(c) Geef een reguliere expressie die de taal van onderstaande niet-deterministische eindige automaat beschrijft:



Hint: kijk via welke paden je in de accepterende toestanden q_0 en q_5 kunt komen.

---

5. [17 pt]

(a) Geef een context-vrije grammatica G_1, zó dat

$$L(G_1) = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x) + 1\}$$

Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen in G_1.

(b) Geef een context-vrije grammatica G_2, zó dat

$$L(G_2) = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x) + 1\}$$

(c) Geef een stapelautomaat M, zó dat

$$L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x) + 2\}$$

Probeer ervoor te zorgen dat M deterministisch is, geen Λ-transities kent, en zo weinig mogelijk toestanden heeft. Lukt dit niet, dan kun je nog wel een deel van de punten verdienen.

6. [9 pt]

   (a) De transitiefunctie δ van een stapelautomaat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$ is een functie van ... naar de verzameling van eindige deelverzamelingen van $Q \times \Gamma^*$.

   Welke van de volgende vier uitdrukkingen hoort er te staan op de plaats van ... in de bovenstaande zin?

$$Q \times \Sigma \times \Gamma$$
$$Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma$$
$$Q \times \Sigma \times \Gamma^*$$
$$Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma^*$$

   Motiveer je antwoord.

   (b) Aan welke voorwaarde(n) moet de transitiefunctie δ van een stapelautomaat voldoen, voordat we M deterministisch mogen noemen? (Het is niet voldoende om te zeggen dat je bij het verwerken van een invoerstring door M geen keuze tussen verschillende transities hebt.)

---

7. [14 pt] Beschouw de volgende context-vrije grammatica G, met startsymbool S:

$$S \to aSa \mid aSb \mid a \mid b \mid \Lambda$$

   (a) Beschrijf (in woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) de elementen van $L(G)$.

   (b) Geef $NB(G)$, dwz: de niet-deterministische bottom up PDA bij G.

   (c) Geef de initiële configuratie voor de invoerstring $x = aba$ in $NB(G)$.

   (d) Geef een succesvolle berekening in $NB(G)$ voor $x = aba$, dwz: een berekening van de initiële configuratie naar een accepterende configuratie waarin x helemaal verwerkt is.

---

8. [14 pt] Laat

$$L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid x = ycy \text{ voor zekere } y \in \{a, b\}^*\}.$$

Ofwel: L bestaat uit de woorden x die zijn opgebouwd uit een string $y \in \{a, b\}^*$, een scheidingssymbool c en dan dezelfde string y weer, bijvoorbeeld $x = abbcabb$.

Geef een Turing machine T die als invoer een string $x \in \{a, b, c\}^*$ heeft, en die x accepteert, dan en slechts dan als $x \in L$. Leg duidelijk uit hoe T werkt.

Strings $x \in \{a, b, c\}^*$ die niet in L zitten, worden uiteraard niet door T geaccepteerd. Van zulke strings kan op verschillende plaatsen in T ontdekt worden dat ze niet tot L behoren. Geef voor twee van zulke gevallen aan hoe T omgaat met een string $x \in \{a, b, c\}^*$ die niet in L zit. Vertel daarbij om welk geval het gaat, waar het wordt ontdekt, en wat T dan doet.
