HERTENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 1 (I&E)
Donderdag 13 maart 2014, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven. waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Geef gevraagde eindige automaten en stapelautomaten door middel van hun transitiediagram (het plaatje dus).

Als er bij een opgave gevraagd wordt om uitleg bij je antwoord, is het belangrijk dat je die ook geeft.

---

1. [6 pt] Laat L_1, L_2, L_3 drie willekeurige talen zijn. Er geldt niet algemeen dat

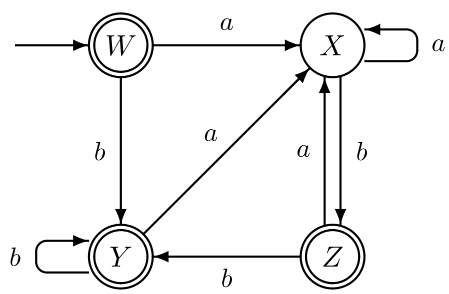
$$L_1^*(L_2 \cup L_3) = L_1^* L_2 \cup L_3$$

Toon dit aan met een voorbeeld van talen L_1, L_2, L_3 en een string x die wel in de ene resulterende taal zit (dus in $L_1^*(L_2 \cup L_3)$ of in $L_1^* L_2 \cup L_3$), en niet in de andere. Zeg er uiteraard ook bij, in welke resulterende taal x dan wel zit en in welke niet.

Wat zijn $L_1^*(L_2 \cup L_3)$ en $L_1^* L_2 \cup L_3$ in je voorbeeld?

---

2. [13 pt] Laat L_1 de taal zijn die geaccepteerd wordt door de volgende eindige automaat M_1:



(a) Geef de eerste vijf elementen van L_1 in de canonieke volgorde.

(b) Wat is L_1? Geef een beschrijving van de taal in woorden en/of formules.

(c) Geef een eindige automaat M_2 zó dat

$$L(M_2) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \ |x| \text{ is even en } x \text{ eindigt op } aab\}$$

---

3. [10 pt] Gegeven de volgende vijf reguliere expressies:

$$\begin{array}{l} ((aa^*b) + (bb^*a))^* \\ ((aa^*b)^* + (bb^*a)^*)^* \\ ((aa^*b)^*(bb^*a)^*)^* \\ (aa^*b)^* + (bb^*a)^* \\ (a^*b)^*(b^*a)^* \end{array}$$

Wellicht ten overvloede: de Kleene ster $*$ heeft voorrang op de concatenatie en de $+$.

Sommige van deze reguliere expressies zijn equivalent met elkaar (d.w.z.: beschrijven dezelfde taal), andere niet. Welke van de laatste vier reguliere expressies zijn equivalent met de eerste en welke niet?

Als een expressie r_i niet equivalent is met de eerste reguliere expressie r_1, geef dan een string x die wel voldoet aan r_i en niet aan r_1 of andersom. Zeg er uiteraard ook bij, aan welke expressie x dan wel voldoet en aan welke expressie niet.

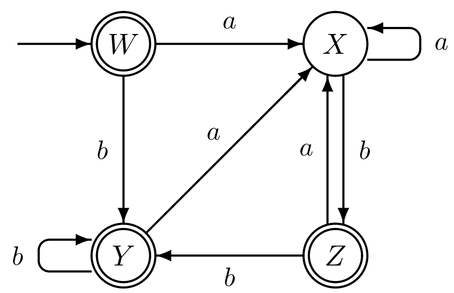
---

4. [13 pt]

(a) Wanneer noemen we een context-vrije grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ regulier?

(b) Leg uit hoe je in het algemeen bij een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ een reguliere grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ kunt construeren, zó dat $L(G) = L(M)$. In het bijzonder: wat zijn V en S in dit geval? En wat zijn de producties in P?

(c) Pas de constructie van het vorige onderdeel toe op de volgende eindige automaat M:



---

5. [12 pt] Laat

$$L = \{a^i b^j \mid \; i, j \geq 0 \text{ en } i < 2j\}$$

(a) Geef de eerste zes elementen van L in de canonieke volgorde.

(b) Geef een context-vrije grammatica G zó dat $L(G) = L$. Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen in G.

---

6. [18 pt]

   (a) Geef een stapelautomaat M_1 zó dat $L(M_1) = \{a^i b^{2i} \mid i \geq 0\}$

   Laat
   $$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) < 2n_b(x)\}$$

   (b) Geef de eerste zes elementen van L_2 in de canonieke volgorde.

   (c) Geef een stapelautomaat M_2 zó dat $L(M_2) = L_2$.
   Probeer ervoor te zorgen dat M_2 deterministisch is, en zo weinig mogelijk toestanden heeft. Lukt dit niet, dan kun je nog wel een deel van de punten verdienen.

---

7. [16 pt] Laat
   $$L_1 = \{st \mid \ s,t \in \{a,b\}^* \text{ en } n_a(s) = n_a(t) \text{ en } n_b(s) = n_b(t)\}$$

   Ofwel: de elementen van L_1 zijn op te splitsen in twee helften s en t die evenveel a's bevatten en evenveel b's, maar niet per se in dezelfde volgorde.

   (a) Geef de eerste zeven elementen van L_1 in de canonieke volgorde.

   Het pomplemma voor context-vrije talen luidt als volgt:

   > Stel L is een context-vrije taal.
   > Dan is er een integer n, zó dat
   > voor iedere $u \in L$ waarvoor $|u| \geq n$, u geschreven kan worden als $u = vwxyz$
   > voor bepaalde strings v, w, x, y en z waarvoor
   > 1. $|wy| > 0$ (dwz $wy \neq \Lambda$).
   > 2. $|wxy| \leq n$.
   > 3. Voor elke $m \geq 0$ behoort de string vw^mxy^mz ook tot L.

   (b) Gebruik dit pomplemma om aan te tonen dat de taal L_1 niet context-vrij is. Ofwel: veronderstel dat L_1 wél context-vrij is, kies dan een geschikt woord $u \in L_1$ en toon aan dat x niet opgepompt en/of weggepompt kan worden. Vergeet ook niet om de conclusie te trekken.
   Kies voor u een van de volgende drie woorden:
   $$u = a^n b^n a^n b^n \qquad u = a^n b^{2n} a^n \qquad u = a^{2n}$$

---

8. [12 pt] Laat
   $$L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid 0 \leq n_a(x) \leq n_b(x) < n_c(x)\}$$

   (a) Geef de eerste zeven elementen van L in de canonieke volgorde.

   (b) Geef een *unrestricted* grammatica G zó dat $L(G) = L$.
   Leg uit wat de functie is van de diverse producties in G.