Uitwerking tentamen Discrete Wiskunde voor Informatici
Dinsdag 14 januari 2003, 9:00-12:00 uur

---

1. (a) We noemen een ongerichte graaf G bipartiet als de knooppuntenverzameling V van G opgesplitst kan worden in V_1 (rode knooppunten) en V_2 (blauwe knooppunten), zódat er geen takken zijn met beide eindpunten in V_1 (met twee rode eindpunten) of met beide eindpunten in V_2 (met twee blauwe eindpunten). Iedere tak in G heeft dus een eindpunt in V_1 en een eindpunt in V_2.

   (b) Neem aan dat de ongerichte graaf G bipartiet is, met V_1 en V_2 als de beide deelverzamelingen van knooppunten. Stel dat G wel een kring van oneven lengte bevat: $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{2m+1} = v_0$ voor zekere $m \geq 0$ (deze kring bevat $2m+1$ takken).

   Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $v_0 \in V_1$ (v_0 is rood). Dan moet $v_1 \in V_2$ (v_1 is blauw) vanwege de tak ($v_0\&v_1$), $v_2 \in V_1$ (v_2 is rood) vanwege de tak ($v_1\&v_2$), enzovoort.

   In het algemeen is

   $v_{2i} \in V_1$ (i= 0, 1, ..., m) en
   $v_{2i+1} \in V_2$ (i= 0, 1, ..., m).

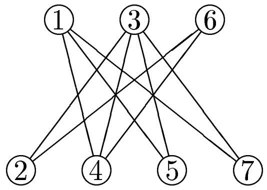
   Maar dan is

   $v_0 = v_{2\cdot 0} \in V_1$ en
   $v_{2m+1} \in V_2$.

   Dat kan niet, want $v_0 = v_{2m+1}$. We hebben dus een tegenspraak. G bevat derhalve geen kring van oneven lengte.

   (c) i. G is bipartiet. Je kunt de knooppuntenverzameling van G namelijk als volgt opsplitsen: $V_1 = \{1, 3, 6\}$ en $V_2 = \{2, 4, 5, 7\}$. Je kunt G ook als volgt tekenen:

   G:



   ii. G is niet Euler. Volgens Stelling 3.4 uit het dictaat bevat een Euler graaf namelijk geen knooppunten van oneven graad. G daarentegen bevat wel knooppunten van oneven graad, namelijk de knooppunten 1 en 4.

   iii. G is niet Hamilton. Volgens onderdeel 1(c)i is G namelijk bipartiet. Volgens onderdeel 1b bevat G dus geen kringen van oneven lengte. Een Hamilton kring in G zou lengte 7 hebben (want G bevat zeven

knooppunten). Omdat 7 oneven is, kan G dus geen Hamilton kring bevatten.
(Als alternatief bewijs zou je systematisch alle mogelijkheden voor een Hamilton kring kunnen uitproberen, en concluderen dat je er geen vindt.)

iv. G is semi-Euler. G is namelijk samenhangend en bevat precies twee knooppunten van oneven graad (zie Gevolg 3.5 uit het dictaat). Een Euler keten in G is bijvoorbeeld

$$1 \to 5 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 1 \to 7 \to 3 \to 4$$

v. G is semi-Hamilton. Een Hamilton keten in G is bijvoorbeeld

$$2 \to 6 \to 4 \to 1 \to 7 \to 3 \to 5$$

Merk op dat G bipartiet is met $V_1 = \{1, 3, 6\}$ en $V_2 = \{2, 4, 5, 7\}$. Omdat V_2 een knooppunt meer bevat dan V_1, begint en eindigt iedere Hamilton keten in G dus in V_2.

2. (a) Stel dat $K_{3,3}$ wel vlak is. Dan is Eulers veelvlakken formule (Stelling 6.1 uit het dictaat) van toepassing. Met $n = 6$ het aantal knooppunten in $K_{3,3}$, $m = 9$ het aantal takken in $K_{3,3}$, en r het aantal gebieden in een vlakke tekening van $K_{3,3}$ zou dan gelden: $n - m + r = 2$. Hieruit zou volgen: $r = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5$.

Er geldt: $K_{3,3}$ is normaal. Dus $K_{3,3}$ bevat geen lussen en geen evenwijdige takken. Dus iedere kring in $K_{3,3}$ bevat minstens drie takken, want een lus is de enige mogelijkheid voor een kring met één tak en evenwijdige takken zijn de enige mogelijkheid voor een enkelvoudige kring met twee takken.

$K_{3,3}$ is bipartiet. Dus iedere kring in $K_{3,3}$ bevat een even aantal takken (zie ook opgave 1b). Dus $K_{3,3}$ bevat geen kringen met drie takken. Dus iedere kring in $K_{3,3}$ bevat minstens vier takken.

Ieder gebied in de vlakke tekening van $K_{3,3}$ wordt omgeven / afgesloten van de andere gebieden door een kring. Dus ieder gebied heeft minstens vier grenslijnen. Hierdoor is

$$\#\text{ combinaties (gebied, corresponderende grenslijn) } \geq 4r.$$

Verder is iedere tak grenslijn van (hoogstens) twee gebieden. Hierdoor is

$$\#\text{ combinaties (gebied, corresponderende grenslijn) } \leq 2m.$$

Combineren we beide ongelijkheden, dan vinden we

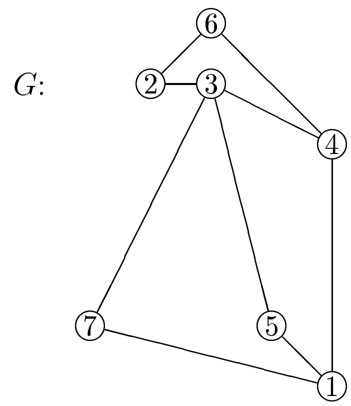
$$4r \leq 2m \Longleftrightarrow 2r \leq m.$$

Vullen we hierin de waardes $r = 5$ en $m = 9$ in, die we aan het begin hebben afgeleid, dan krijgen we:

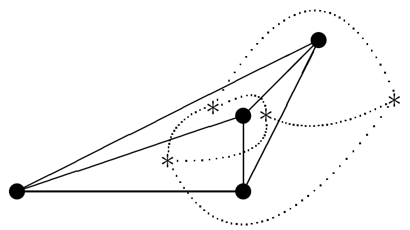
$$2 \cdot 5 = 10 \leq 9.$$

We zijn nu op een tegenspraak gestuit en concluderen dat $K_{3,3}$ niet vlak is.

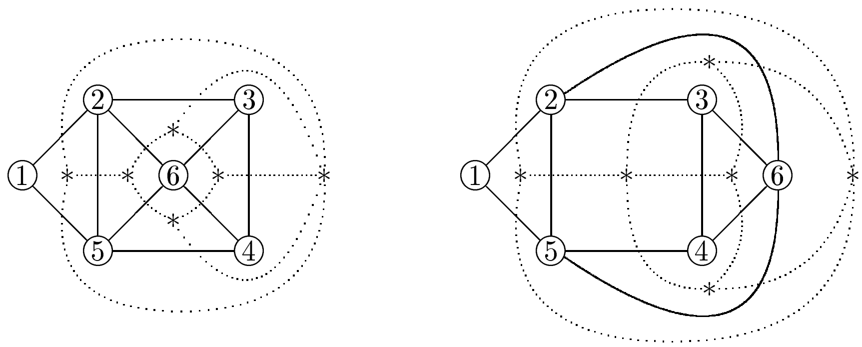
(b) Ja, de graaf G uit opgave 1c is vlak. Als we namelijk ‘knooppunt 6 naar boven en knooppunt 1 naar rechts vouwen’, krijgen we de volgende vlakke tekening van G:



(c) De geometrisch duale graaf van de gegeven graaf G wordt gevormd door de sterretjes en de stippellijnen in de volgende tekening:



(d) In de volgende figuur is tweemaal dezelfde graaf G uitgebeeld (met de genummerde knooppunten en de doorgetrokken lijnen), en beide keren ook de bijbehorende geometische duale graaf (met de sterretjes en de stippellijnen).



In de linker tekening bevat de geometrisch duale graaf een knooppunt van graad 5 en vijf knooppunten van graad 3. In de rechter tekening bevat de geometrisch duale graaf twee knooppunten van graad 4 en vier knooppunten van graad 3. De geometrisch duale grafen zijn dus niet isomorf.

3. (a) We kijken naar een rijtje van $n \geq 1$ cijfers dat aan alle eisen voldoet. Het laatste cijfer kan nooit een 1 of een 3 zijn. Deze cijfers moeten namelijk gevolgd worden door 2, 4 of 8, respectievelijk 9.

Voor het geval $n = 1$ (een 'rijtje' van één cijfer) zijn er dus 8 mogelijkheden: 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Derhalve is $a_1 = 8$.

Voor het geval $n = 2$ (een rijtje van twee cijfers) kijken we nu eerst naar het eerste cijfer. Hiervoor zijn 10 mogelijkheden:

0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dan zijn er geen verdere beperkingen voor het tweede (= laatste) cijfer. Alleen mag het natuurlijk niet 1 of 3 zijn. Voor het tweede cijfer zijn dus 8 mogelijkheden. In totaal zijn er in dit geval dus $8 \cdot 8 = 64$ mogelijkheden.

1. Dan zijn er voor het tweede cijfer 3 mogelijkheden: het is 2, 4 of 8. Hiermee ontstaan de rijtjes 12, 14 en 18. In totaal zijn er in dit geval dus 3 mogelijkheden.

3. Dan is er voor het tweede cijfer 1 mogelijkheid: het is 9. Hiermee ontstaat het rijtje 39. In dit geval is er dus precies 1 mogelijkheid.

Derhalve is $a_2 = 64 + 3 + 1 = 68$.

Voor het geval $n \geq 3$ kijken we eveneens eerst naar het eerste cijfer. Hiervoor zijn 10 mogelijkheden:

0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dan zijn er voor de volgende $n-1$ cijfers verder geen beperkingen. In totaal zijn er in dit geval dus $8 \cdot a_{n-1}$ mogelijkheden.

1. Dan zijn er voor het tweede cijfer 3 mogelijkheden: het is 2, 4 of 8. Voor de volgende $n-2$ cijfers zijn er dan verder geen beperkingen. Daarvoor zijn dus a_{n-2} mogelijkheden. In totaal zijn er in dit geval dus $3 \cdot a_{n-2}$ mogelijkheden.

3. Dan is er voor het tweede cijfer 1 mogelijkheid: het is 9. Voor de volgende $n-2$ cijfers zijn er dan verder geen beperkingen. Daarvoor zijn dus a_{n-2} mogelijkheden. In totaal zijn er in dit geval dus $1 \cdot a_{n-2}$ mogelijkheden.

Derhalve is voor $n \geq 3$,

$$a_n = 8a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1a_{n-2} = 8a_{n-1} + 4a_{n-2}.$$

Overigens, voor wie er geen moeite mee heeft om het aantal rijtjes met 0 cijfers te tellen had de recurrente betrekking ook als volgt beschreven kunnen worden:

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} + 4a_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 8 \end{cases}$$

(b) De recurrente betrekking luidt $a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$ met $A = 8$ en $B = 4$. We lossen nu de karakteristieke vergelijking $x^2 - Ax - B = 0$ op:

$$x^2 - 8x - 4 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 16}}{2} = \ldots = 4 \pm 2\sqrt{5}.$$

De wortels zijn dus $\alpha = 4 + 2\sqrt{5}$ en $\beta = 4 - 2\sqrt{5}$. Dit zijn twee verschillende wortels, zodat volgens Stelling 8.2 uit het dictaat geldt dat

$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ voor $n \geq 1$, waarbij K_1 en K_2 bepaald worden door a_1 en a_2. We vullen nu $n = 1$ en $n = 2$ in:

$$\begin{array}{ll} n = 1: & a_1 = 8 = K_1(4+2\sqrt{5}) + K_2(4-2\sqrt{5}) \\ n = 2: & a_2 = 68 = K_1(4+2\sqrt{5})^2 + K_2(4-2\sqrt{5})^2 \end{array}$$

Om de K_1 in de eerste gelijkheid kwijt te raken, vermenigvuldigen we die gelijkheid met $(4+2\sqrt{5})$ en trekken dan de tweede gelijkheid ervanaf:

$$\begin{aligned} & 8(4+2\sqrt{5}) - 68 = K_2(4-2\sqrt{5})(4+2\sqrt{5}) - K_2(4-2\sqrt{5})^2 \\ & \quad = \ \ldots = K_2(16\sqrt{5}-40) \Longleftrightarrow \\ & K_2 = \ \frac{16\sqrt{5}-36}{16\sqrt{5}-40} = \frac{4\sqrt{5}-9}{4\sqrt{5}-10} = \frac{(4\sqrt{5}-9)}{(4\sqrt{5}-10)}\frac{(4\sqrt{5}+10)}{(4\sqrt{5}+10)} \\ & \quad = \ \frac{-10+4\sqrt{5}}{-20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

We vullen deze waarde voor K_2 in in de gelijkheid voor $n = 1$ om ook K_1 te krijgen:

$$\begin{aligned} 8 &= K_1(4+2\sqrt{5}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{5})(4-2\sqrt{5}) \\ &= \ldots = K_1(4+2\sqrt{5}) + 4 - \frac{9}{5}\sqrt{5} \Longleftrightarrow \\ K_1 &= \frac{4+\frac{9}{5}\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}+9}{4\sqrt{5}+10} = \frac{(4\sqrt{5}+9)}{(4\sqrt{5}+10)}\frac{(4\sqrt{5}-10)}{(4\sqrt{5}-10)} \\ &= \frac{-10-4\sqrt{5}}{-20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Derhalve is voor $n \geq 1$,

$$a_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{5})(4+2\sqrt{5})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{5})(4-2\sqrt{5})^n.$$

4. (a) Het bord C van verboden velden bestaat uit twee niet-interfererende gedeeltes. Hierdoor kunnen we het bord al bij het begin van de berekening van de torenveelterm $R(x, C)$ in twee stukken breken:

$$
\begin{aligned}
R(x,C) = R\left(\begin{smallmatrix} & \square & & & \square \\ \blacksquare & & & \blacksquare & \\ & \square & \square & & \square \\ \blacksquare & & & & \\ & & & & \square \end{smallmatrix}\right) &= R\left(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}\right) \cdot R\left(\begin{smallmatrix} \square & & \square \\ \square & \square & \blacksquare \\ & & \square \end{smallmatrix}\right) \\
&= (1+3x+x^2)\cdot\left(x\cdot R(\square) + R\left(\begin{smallmatrix} \blacksquare & & \square \\ \square & \square & \\ & & \square \end{smallmatrix}\right)\right) \\
&= (1+3x+x^2)\cdot\left(x\cdot(1+x) + x\cdot R\left(\begin{smallmatrix} \square & \\ & \square \end{smallmatrix}\right) + R\left(\begin{smallmatrix} & & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \\ & & \square \end{smallmatrix}\right)\right) \\
&= (1+3x+x^2)\cdot\left(x + x^2 + x\cdot(1+2x+x^2) + R(\square\square)\cdot R\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right)\right) \\
&= (1+3x+x^2)\cdot(2x+3x^2+x^3+(1+2x)\cdot(1+2x)) \\
&= (1+3x+x^2)\cdot(1+6x+7x^2+x^3) \\
&= 1+9x+26x^2+28x^3+10x^4+x^5.
\end{aligned}
$$

(b) Laat voor $k = 0, \ldots, 5$, $r_k(C)$ het aantal manieren zijn om k niet-slaagsrakende torens op het bord C te plaatsen. Dan is volgens Stelling 9.11 uit het dictaat het gevraagde aantal mogelijkheden gelijk aan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!r_k(C) \\
&\quad = 5!\cdot r_0(C) - 4!\cdot r_1(C) + 3!\cdot r_2(C) - 2!\cdot r_3(C) + 1!\cdot r_4(C) - 0!\cdot r_5(C) \\
&\quad = 120\cdot 1 - 24\cdot 9 + 6\cdot 26 - 2\cdot 28 + 1\cdot 10 - 1\cdot 1 = \ldots = 13.
\end{aligned}
$$

5. (a) Je laat zien dat P_2 polynomiaal reduceerbaar is tot P_1. Dit betekent dat je een transformatie van P_2 naar P_1 geeft, die iedere instantie I_2 van P_2 overvoert in een instantie I_1 van P_1, zodanig dat

   - de transformatie een tijd (= aantal elementaire stappen) kost die polynomiaal is in de lengte van de invoer I_2,
   - een ja-instantie van P_2 altijd wordt overgevoerd in een ja-instantie van P_1,
   - en een nee-instantie van P_2 altijd wordt overgevoerd in een nee-instantie van P_1.

   Wanneer we weten dat P_2 polynomiaal reduceerbaar is tot P_1 ($P_2 \leq_P P_1$), weten we dat P_1 'minstens zo moeilijk' is als P_2. Omdat P_2 $\mathcal{NP}$-volledig is en $P_1 \in \mathcal{NP}$, is dan ook P_1 $\mathcal{NP}$-volledig.

   (b) Volgens de procedure bij het vorige onderdeel moeten we het gegeven $\mathcal{NP}$-volledige probleem HK2 polynomiaal reduceren tot HRP$\triangle$.

   Gegeven een instantie $G_2 = (V_2, E_2)$ van HK2, laat dan $n = |V_2|$ (het aantal knopen in G_2). We maken nu de volgende instantie van HRP$\triangle$:

   - $G_1 = (V_1, E_1) = (V_2, E_1)$ met $E_1 = \{(u\&v) | u \neq v; u, v \in V_2\}$ (ofwel: dezelfde knooppunten als in G_2, maar nu met alle takken ertussen);
   - een lengte-functie c gedefinieerd door:

$$
c(u\&v) = \begin{cases} 1 & \text{als } (u\&v) \in E_2, \\ 2 & \text{als } (u\&v) \notin E_2 \end{cases}
$$

(ofwel: de oorspronkelijke takken krijgen lengte 1 en de toegevoegde takken krijgen lengte 2). Inderdaad geldt dat $c(u\&v) \in \mathbb{Z}_0^+$ voor iedere $(u\&v) \in E_1$ en dat c aan de driehoeksongelijkheid voldoet. Immers, zij $u, v, w \in V_2$ willekeurige, verschillende knooppunten. Dan is $c(u\&w) \leq 2 = 1 + 1 \leq c(u\&v) + c(v\&w)$;
- $B = n$ (ofwel: de bovengrens wordt gelijk aan het aantal knooppunten in de graaf).

Dit is inderdaad een polynomiale transformatie, want

- G_1 maak je in een tijd $\mathcal{O}(n^2)$,
- c maak je in een tijd $\mathcal{O}(n^2)$,
- B maak / schrijf je in een tijd $\mathcal{O}(\lg n)$.

Stel nu dat G_2 een ja-instantie van HK2 is. Dan bevat G_2 kennelijk een Hamilton kring. De takken van deze Hamilton kring hebben in G_1 allemaal lengte 1, want ze kwamen al voor in E_2. Hierdoor is de totale lengte van de Hamilton kring in G_1 dus: (# takken in de kring) $\cdot 1 = n \cdot 1 = B$. Kennelijk bevat G_1 dus een Hamilton kring met totale lengte B, en dus ook hoogstens B. Ofwel: G_1 is een ja-instantie van HRP$\triangle$.

Stel nu omgekeerd dat G_1 (het resultaat van de transformatie) een ja-instantie van HRP$\triangle$ is. Dan bevat G_1 kennelijk een Hamilton kring C van lengte hoogstens $B = n$. Deze Hamilton kring bevat (zoals iedere Hamilton kring in G_1) n takken, elk van lengte 1 of 2. Omdat de totale lengte van C hoogstens n is, moet wel elk van de takken lengte 1 hebben (zodat de totale lengte precies $B = n$ is). Dit betekent dat alle takken van C al in E_2 voorkwamen. Ook G_2 bevatte dus al de Hamilton kring C. Ofwel: G_2 was een ja-instantie van HK2.

Kortom: iedere ja-instantie van HK2 wordt overgevoerd in een ja-instantie van HRP$\triangle$, en iedere ja-instantie van HRP$\triangle$ (als resultaat van de transformatie) is afkomstig van een ja-instantie van HK2. Dit laatste betekent dat iedere nee-instantie van HK2 wordt overgevoerd in een nee-instantie van HRP$\triangle$.

(RvV, 12 juni 2003)