Hertentamen Discrete Wiskunde voor Informatici
Donderdag 14 augustus 2003, 9:00-12:00 uur

Vijf opmerkingen vooraf:

- Neem de tijd om de opgaven goed te lezen, zodat je weet wat er bedoeld wordt.
- Geef bij al je antwoorden voldoende toelichting.
- Indien er naar een bewijs gevraagd wordt, levert een formeel bewijs het maximum aantal punten op. Echter, ook met alleen woorden en plaatjes kun je punten verdienen.
- Vergeet de opgaven op de achterkant van dit tentamenvel niet!
- De puntenverdeling is als volgt:

opgave 1:	20
opgave 2:	22
opgave 3:	20
opgave 4:	25
opgave 5:	13
totaal:	100

---

1. (a) Wanneer noemen we een ongerichte graaf G een Euler graaf?

   (b) Wanneer noemen we een ongerichte graaf G een Hamilton graaf?

   (c) Geef een voorbeeld van een samenhangende, ongerichte, normale graaf G, die wel een Euler graaf is, maar geen Hamilton graaf. Toon ook aan dat de graaf wel een Euler graaf is, maar geen Hamilton graaf.

   (d) Dezelfde vraag als in het vorige onderdeel, maar nu dient G zo weinig mogelijk knooppunten te bevatten. (Misschien had je al zo'n G!) Beargumenteer ook waarom je geen graaf G' met minder knooppunten kunt vinden die aan alle eisen voldoet.

2. (a) Bewijs de volgende stelling:

   > Een samenhangende, vlak-getekende vlakke graaf met n knooppunten, m takken en r gebieden voldoet aan de betrekking: $n - m + r = 2$ (Euler's veelvlakken formule).

   (b) Bewijs dat de K_5 (de volledige, ongerichte graaf met 5 knooppunten) niet vlak is.

3. Bij de verbouwing van een niet nader genoemd onderwijsinstituut zijn 4 fraaie collegezalen ontstaan, voorzien van allerlei technische snufjes. Helaas was er nauwelijks geld meer over om stoeltjes en tafeltjes voor de studenten aan te schaffen. Er konden nog precies 11 stoeltjes worden gekocht. Deze dienen verdeeld te worden over de 4 collegezalen. Uiteraard mogen de (juist aangeschafte) stoeltjes hierbij niet in stukken worden gezaagd.

   (a) Neem aan de 11 stoeltjes identiek zijn.

   Op hoeveel verschillende manieren kunnen deze stoeltjes dan over de 4 verschillende collegezalen worden verdeeld? We stellen geen aanvullende eisen aan het aantal stoeltjes per collegezaal.

   (b) In het onderwijsinstituut wordt wel eens ingebroken. Om diefstal van de stoeltjes onaantrekkelijk te maken, worden ze voorzien van een serienummer. Alle 11 stoeltjes zijn nu dus verschillend.

   Op hoeveel verschillende manieren kunnen de stoeltjes nu over de 4 verschillende collegezalen worden verdeeld? We stellen opnieuw geen aanvullende eisen aan het aantal stoeltjes per collegezaal. Als het aantal manieren te hoog wordt om expliciet uit te rekenen, volstaat het om een gesloten uitdrukking voor dit aantal te geven.

   (c) Omdat geen docent les wil geven voor een lege klas eisen we nu dat er in ieder van de 4 collegezalen minstens 1 stoeltje komt te staan. De 11 stoeltjes zijn ook nu genummerd, en dus verschillend.

   Op hoeveel verschillende manieren kunnen de stoeltjes nu nog over de 4 verschillende collegezalen worden verdeeld? Opnieuw, als het aantal manieren te hoog wordt om expliciet uit te rekenen, volstaat het om een gesloten uitdrukking voor dit aantal te geven.

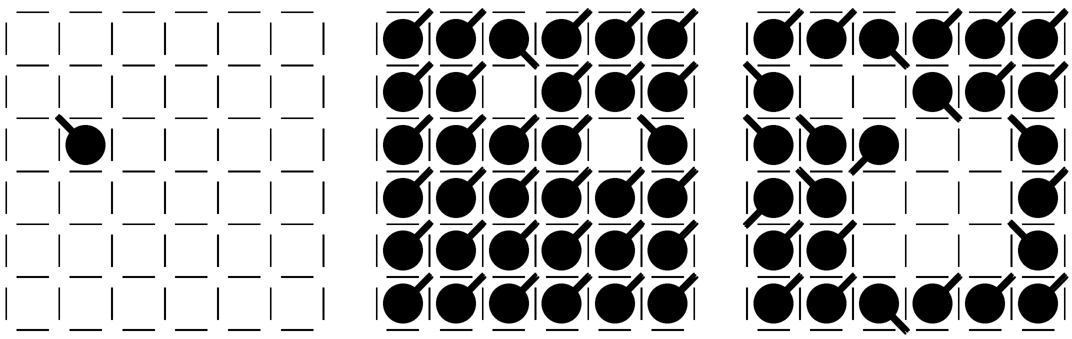
4. (a) Hoe ziet in het algemeen een niet-deterministisch polynomiaal algoritme voor een beslissingsprobleem P eruit? Uit welke onderdelen bestaat het, wat gebeurt er in elk van de onderdelen en aan welke voorwaarden moeten de onderdelen voldoen?

   (b) Het subgraaf-isomorfisme probleem (SGI) is als volgt gedefinieerd.

   > Gegeven een ongerichte graaf $G_1 = (V_1, E_1)$ en een ongerichte graaf $G_2 = (V_2, E_2)$. Bestaat er een deelgraaf H_1 van G_1 zódat H_1 isomorf is met G_2?

   Toon aan dat SGI in $\mathcal{NP}$ zit door een niet-deterministisch polynomiaal algoritme voor SGI te geven. Laat ook zien dat het algoritme inderdaad aan de definitie van een niet-deterministisch polynomiaal algoritme voldoet.

5. Een uitdruiprek voor koffiekopjes bestaat uit 6×6 vakjes waar precies een kopje inpast. De vakjes zijn van elkaar gescheiden door wandjes, maar de hoeken van de vakjes zijn opengehouden. Daar past het oor van een kopje in (zie het linker plaatje).



Elke open hoek kan maar voor één kopje tegelijk gebruikt worden. Het is duidelijk dat als alle kopjes met het oor in dezelfde richting worden geplaatst, het uitdruiprek volledig benut kan worden. Bij een onhandige plaatsing van de eerste kopjes op het rek kan het echter voorkomen dat niet alle vakjes meer benut kunnen worden, zonder reeds aanwezige kopjes te draaien of te verwijderen (zie het middelste plaatje, waar de twee open vakjes niet meer te benutten zijn).

De vraag is nu of gegeven een bepaalde plaatsing van een aantal kopjes op het rek, het volledige rek nog benut kan worden.

(a) Vertaal dit probleem naar een probleem dat we bij het college Discrete Wiskunde voor Informatici hebben behandeld. Wees precies in je vertaling.

(b) Los het probleem op voor het uitdruiprek in de rechterfiguur, waar nog tien vakjes open zijn. Dat wil zeggen: als het uitdruiprek volledig benut kan worden (zonder reeds aanwezige kopjes te draaien of te verwijderen), geef dan een plaatsing van kopjes op de tien open vakjes. Als dit niet mogelijk is, toon dan aan waarom niet.