Tentamen Discrete Wiskunde voor Informatici
Dinsdag 14 januari 2003, 9:00-12:00 uur

Vier opmerkingen vooraf:

- Geef bij al je antwoorden voldoende toelichting.
- Indien er naar een bewijs gevraagd wordt, levert een formeel bewijs het maximum aantal punten op. Echter, ook met alleen woorden en plaatjes kun je punten verdienen.
- Vergeet de opgaven op de achterkant van dit tentamenvel niet!
- De puntenverdeling is als volgt:

opgave 1:	24
opgave 2:	25
opgave 3:	17
opgave 4:	14
opgave 5:	20
totaal:	100

---

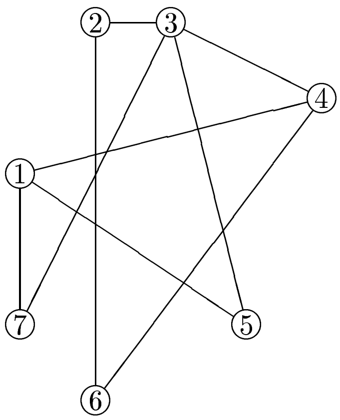
1. (a) Wanneer noemen we een ongerichte graaf G bipartiet?

   (b) Zij G een ongerichte graaf. Bewijs de volgende bewering:

   Als G bipartiet is, bevat G geen kringen van oneven lengte.

   (c) Beschouw onderstaande graaf G:

   G:



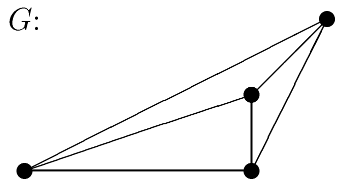
   i. Is G bipartiet?
   ii. Is G Euler?
   iii. Is G Hamilton?
   iv. Is G semi-Euler?
   v. Is G semi-Hamilton?

   Motiveer je antwoorden.

2. (a) Bewijs dat de graaf $K_{3,3}$ niet vlak is. In het bewijs mag je gebruik maken van eerdere resultaten uit het dictaat.

   (b) Is de graaf G uit opgave 1c vlak? Motiveer je antwoord.

   (c) Bij een vlak getekende graaf kun je de geometrisch duale graaf definiëren. Geef de geometrisch duale graaf van onderstaande graaf G:



   (d) Soms hangt (de vorm van) de geometrisch duale graaf af van de tekening van een vlakke graaf. Geef een voorbeeld van een graaf G, waarbij twee verschillende vlakke tekeningen van G tot wezenlijk verschillende (d.w.z. niet-isomorfe) geometrisch duale grafen leiden.

   Geef ook de twee verschillende vlakke tekeningen en de bijbehorende geometrisch duale grafen. Leg uit waarom de geometrisch duale grafen niet isomorf zijn.

3. Zij a_n voor $n \geq 1$ het aantal rijtjes van n cijfers uit $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ zodanig dat

   - iedere 1 wordt gevolgd door een 2, een 4 of een 8 (op de direct volgende positie dus), en
   - iedere 3 wordt gevolgd door een 9 (opnieuw: direct eropvolgend).

   (a) Toon aan dat

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-1} + 4a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 8, \quad a_2 = 68 \end{cases}$$

   (b) Bepaal een gesloten formule voor a_n voor $n \geq 1$.

4. Beschouw het volgende 5×5-bord, waarbij de met X gemarkeerde velden 'verboden' zijn.

	X			X
X			X	
	X	X		X
X				
				X

Alle verboden velden samen noemen we het bord van verboden velden C.

(a) Bereken de torenveelterm van het bord C.

(b) Bereken met behulp van het principe van inclusie en exclusie hoeveel manieren er zijn om 5 torens op het hierboven gegeven 5×5-bord te plaatsen zódat geen enkel verboden veld bezet wordt.

5. (a) Hoe toon je in het algemeen aan dat een beslissingsprobleem P_1 (waarvan gegeven is dat het in $\mathcal{NP}$ zit) $\mathcal{NP}$-volledig is, uitgaande van een gegeven $\mathcal{NP}$-volledig beslissingsprobleem P_2.

Wees precies in je beschrijving van de procedure.

(b) Beschouw de volgende twee beslissingsproblemen:

HRP$\triangle$ (Handelsreizigers probleem met driehoeksongelijkheid)

Gegeven:

- een ongerichte graaf $G_1 = (V_1, E_1)$ met $E_1 = \{(u\&v) | u \neq v;\ u, v \in V_1\}$ (G_1 is dus volledig),
- een 'lengte' $c(u\&v) \in \mathbb{Z}_0^+$ voor iedere tak $(u\&v) \in E_1$, die voldoet aan de driehoeksongelijkheid. Dat wil zeggen: voor alle verschillende knopen u, v, w geldt:

  $$c(u\&w) \leq c(u\&v) + c(v\&w)$$

  ($\mathbb{Z}_0^+$ is de verzameling van niet-negatieve gehele getallen),
- en een bovengrens $B \in \mathbb{Z}_0^+$.

Bevat G_1 een Hamilton kring (d.w.z. een enkelvoudige kring die alle knooppunten in V_1 bevat) met totale lengte hoogstens B?

HK2 (Hamilton kring voor ongerichte grafen)

Gegeven een ongerichte graaf $G_2 = (V_2, E_2)$.

Bevat G_2 een Hamilton kring?

Gegeven is dat HRP$\triangle \in \mathcal{NP}$ en dat HK2 $\mathcal{NP}$-volledig is. Toon aan dat ook HRP$\triangle$ $\mathcal{NP}$-volledig is.