Laatste hertentamen Discrete Wiskunde voor Informatici
Donderdag 4 december 2003, 14:00-17:00 uur

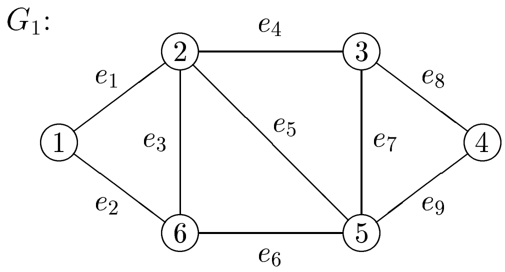
Vijf opmerkingen vooraf:

- Van opgaven 5 en 5′ hoef je er maar één te maken. Je mag zelf kiezen welke. Indien je beide opgaven (gedeeltelijk) maakt, zal alleen opgave 5′ worden nagekeken.
- Neem de tijd om de opgaven goed te lezen, zodat je weet wat er bedoeld wordt.
- Geef bij al je antwoorden voldoende toelichting.
- Indien er naar een bewijs gevraagd wordt, levert een formeel bewijs het maximum aantal punten op. Echter, ook met alleen woorden en plaatjes kun je punten verdienen.
- De puntenverdeling is als volgt:

opgave 1:	17
opgave 2:	24
opgave 3:	22
opgave 4:	15
opgave 5:	22
totaal:	100

---

1. Beschouw onderstaande graaf G_1:



   (a) Is G_1 bipartiet?

   (b) Is de takkenverzameling $\{e_1, e_2, e_8, e_9\}$ een snede van G_1? En is dezelfde takkenverzameling een minimale snede van G_1?

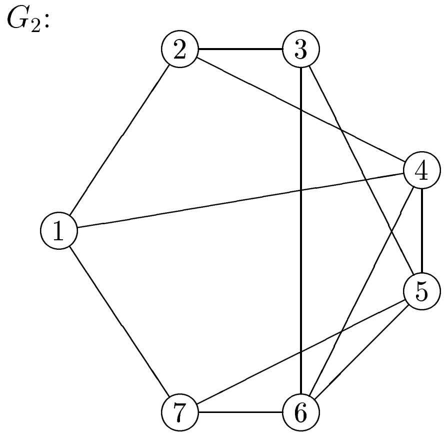
   (c) Is de takkenverzameling $\{e_2, e_3, e_6\}$ een snede van G_1? En is dezelfde takkenverzameling een minimale snede van G_1?

   (d) Is G_1 een Euler graaf?

   (e) Is G_1 een semi-Euler graaf?

Motiveer in alle gevallen je antwoord. Bij iedere snede moet je ook de twee knooppuntenverzamelingen aangeven die met de snede corresponderen.

2. (a) Beschouw onderstaande graaf G_2:



Is G_2 vlak? Zo ja, geef een vlakke tekening van G_2. Zo nee, toon aan waarom niet.

(b) Geef een vlakke, normale, ongerichte graaf met 6 knooppunten en zo veel mogelijk takken.

Bewijs ook dat er geen vlakke, normale, ongerichte graaf met 6 knooppunten kan zijn die meer takken bevat. *Hint: gebruik Eulers veelvlakken formule.*

3. Escapia is een eiland in de buurt van Australië, onbewoond, maar vol met gras. Aanvankelijk zijn er zelfs geen dieren op het eiland. Vanaf zeker moment spoelen er iedere herfst (voor het eerst in herfst 1) na een schipbreuk 3 levende schapen aan: twee jonge ooien (vrouwtjes) en een ram (een mannetje).

Eén ram is genoeg voor heel veel ooien. In het volgende voorjaar krijgen alle jonge ooien dus twee lammeren. Toevallig zijn al deze lammeren weer ooien. De ram sterft in het voorjaar en de moeder-ooien trekken zich in de zomer terug op een afgelegen deel van het eiland waar ze ongestoord, oneindig lang en gelukkig leven. De lammeren krijgen in de herfst weer gezelschap van drie schipbreukelingen, enzovoort, enzovoort.

(a) Zij a_n voor $n \geq 1$ het totaal aantal schapen op Escapia in herfst n, na de schipbreuk. Toon aan dat

$$\begin{cases} a_1 = 3, \quad a_2 = 9 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Hint: bedenk dat $3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 = a_{n-1} + 2 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2}) + 2$.

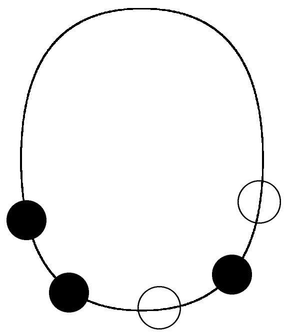
(b) Bepaal een gesloten formule voor a_n voor $n \geq 1$.

4. Zij M een $m \times n$ Latijnse rechthoek (met m rijen en n kolommen dus), met $m < n$. Toon met behulp van de huwelijksstelling van Hall aan dat M is uit te breiden tot een $(m+1) \times n$ Latijnse rechthoek door een rij toe te voegen.

   Leg duidelijk uit wat in deze situatie de jongens zijn, wat de meisjes zijn en hoe de vriendschapsrelatie gedefinieerd is.

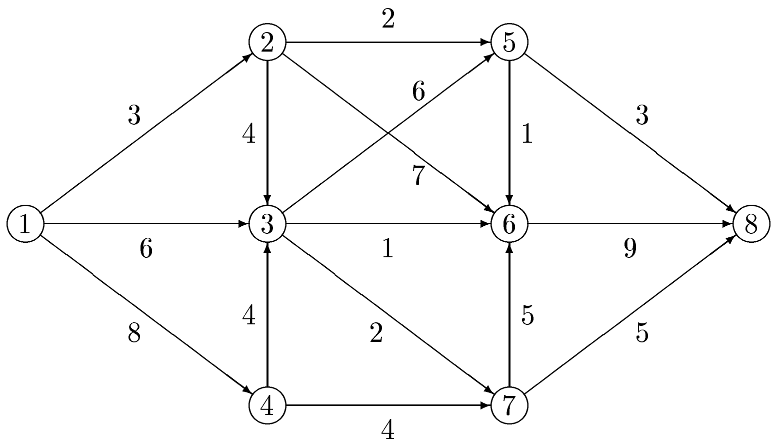
   Als je niet weet wat een Latijnse rechthoek is, kun je een definitie bij Rudy van Vliet 'kopen'. Dit kost in principe 5 punten.

5. (a) Een Holland-ketting bestaat uit 5 bolvormige kralen aan een gesloten ketting die elk rood, wit, blauw of oranje zijn. De kralen kunnen vrij bewegen langs de ketting, en de ketting in zijn geheel kan ook worden omgekeerd (zodat de achterkant naar voren komt). Onderstaand plaatje toont een voorbeeld van een Holland-ketting (de kleuren komen niet zo goed uit).



   Bepaal het aantal echt verschillende Holland-kettingen met behulp van de stelling van Burnside.

   (b) Beschouw onderstaand transportnetwerk.



   Geef een maximale stroom door het netwerk van knooppunt 1 naar knooppunt 8 (je hoeft niet de hele constructie te tonen). Geef ook de groeigraaf die met deze stroom correspondeert.

5′ (a) Het beslissingsprobleem Priem is als volgt gedefinieerd:

> Gegeven een positief geheel getal N. Is N een priemgetal?

Priem kan met het volgende algoritme worden opgelost:

```
NogGeenFactor = true;
Factor = 2;
while (NogGeenFactor and (Factor ≤ √N))
do   if (N mod Factor == 0)
     then NogGeenFactor = false;
     else Factor ++;
     fi
od
return NogGeenFactor;
```

Kun je op basis van dit algoritme concluderen dat Priem $\in \mathcal{P}$? Licht je antwoord toe.

(b) De beslissingsversie van het handelsreizigersprobleem (HRPb) is als volgt gedefinieerd:

> Gegeven een volledige, ongerichte graaf $G = (V, E)$, waarbij elk van de takken $(u\&v)$ een niet-negatief geheel getal $c(u\&v)$ als gewicht heeft, en gegeven een geheel getal k. Bestaat er een Hamilton kring in G met totaal gewicht hoogstens k?

De optimale-waarde-versie van het handelsreizigersprobleem (HRPo) is als volgt gedefinieerd:

> Gegeven een volledige, ongerichte graaf $G = (V, E)$, waarbij elk van de takken $(u\&v)$ een niet-negatief geheel getal $c(u\&v)$ als gewicht heeft. Wat is de laagste gehele waarde k zodanig dat G een Hamilton kring van gewicht hoogstens k bevat (ofwel: wat is de lengte van de kortste tour)?

Stel dat HRPb $\in \mathcal{P}$. Stel verder dat HRPb(G, c, k) een polynomiaal algoritme voor HRPb is (c is de gewichtsfunctie). Het algoritme geeft **true** terug als het antwoord "ja" is voor de instantie met G, c en k, en **false** als het antwoord "nee" is.

Geef een algoritme voor HRPo dat gebruik maakt van HRPb(G, c, k) en dat nu ook polynomiale tijd vergt. Leg ook uit *waarom* je algoritme voor HRPo (slechts) polynomiale tijd vergt (onder de aanname dat HRPb(G, c, k) polynomiaal is).