Discrete wiskunde

Overzicht van de leerstof

door: drs. C.E. van de Woestijne

Inleiding

Dit is een overzicht van de leerstof voor het avondcollege Discrete Wiskunde. Ik verwijs hierin voortdurend naar het collegedictaat "Discrete Wiskunde" door A. Hordijk en L.C.M. Kallenberg, magazijnuitgave 505013, en naar de extra aantekeningen die ik op college heb uitgedeeld. Let op: niet alle stof staat hierin, het gaat er hier alleen om een overzicht te krijgen van alle behandelde structuren en technieken.

Terugkijkend hebben we op dit college twee hoofdvragen gesteld:
1) wat zijn interessante en nuttige discrete structuren?, en
2) hoeveel van die structuren zijn er?

Deze vragen komen overeen met onderstaande secties 1 (Structuren) en 2 (Combinatoriek).

1 Structuren

Eerst gaan we in op de verschillende structuren die we in dit college zijn tegengekomen. Daarbij noem ik ook enkele belangrijke stellingen die daarbij horen.

1.1 Rijen

Laat $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ een rij getallen zijn, hetzij positieve, gehele, reële of nog andere getallen.

De rij voldoet aan een recurrente betrekking als we een formule hebben waarmee a_n gegeven is in termen van $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, en n. De betrekking is van de p-de orde als we voor a_n alleen $a_{n-p}, a_{n-p+1}, \ldots, a_{n-1}$ en n hoeven te kennen. We kunnen de betrekking vaak oplossen als ze lineair is van de tweede orde, dus als $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = f(n)$ voor zekere constanten A en B en een of andere functie $f(n)$ die alleen van n afhangt. Het kan altijd als $f(n) = 0$; dan is de betrekking homogeen, anders inhomogeen. Zie verder hoofdstuk 8, vooral Stelling 8.4 en 8.5.

Het is belangrijk om zelf te zien of een rij getallen aan een recurrente betrekking voldoet; het oplossen ervan kun je dan eventueel aan een specialist overlaten, of aan een computerprogramma. (Dit gaat over de praktijk :-).)

De voortbrengende functie van de rij is $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$, waarbij x een variabele is. Als de rij eindig is (zeg de rij houdt op bij a_n), is de voortbrengende functie een veelterm: $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Veeltermen kun je optellen en vermenigvuldigen; ze zijn belangrijk in de vorm van torenveeltermen en in de theorie van Pólya. Zie hoofdstuk 9, 12 en 13 en de aantekeningen van de colleges.

1.2 Grafen

We hebben kennis gemaakt met grafen; een graaf bestaat uit een eindige verzameling knooppunten en een eindige verzameling takken. Voor al de definities en eigenschappen verwijs ik naar hoofdstuk 1 t/m 6, en naar de extra aantekeningen over de "max-flow-min-cut-stelling". Ik licht er een paar uit:

1. In elke graaf geldt: de som van de graden van de knooppunten is gelijk aan twee maal het aantal takken (bladzijde 2 bovenaan).

2. Een Eulerkring is een cykel die alle takken gebruikt. Een Hamiltonkring is een cykel die alle knopen één keer bezoekt. Wanneer heeft een graaf een Eulerkring? Zie Stelling 3.4. Wanneer een Hamiltonkring? Weten we niet precies, maar zie Stelling 4.3.

3. Een boom is een samenhangende normale graaf zonder cykels. Maar er is veel meer over te zeggen: zie Stelling 5.2. Een voortbrengende boom van een samenhangende graaf G is een boom die precies dezelfde knooppunten als G heeft, en opgebouwd is uit takken van G. Zo'n boom kunnen we vinden door stapsgewijs zoveel mogelijk takken uit G weg te laten, maar wel zo dat de graaf samenhangend blijft.

4. Een graaf G is vlak dan en slechts dan als G geen deelgraaf heeft die homeomorf is met $K_{3,3}$ of met K_5. Homeomorf wil zeggen: isomorf, nadat we eventueel knooppunten van graad 2 hebben toegevoegd of weggegooid (Stelling 6.3). Een vlakke graaf voldoet aan de formule van Euler: $n - m + r = 2$.

5. Een transportnetwerk (flow network) is een samenhangende gerichte graaf waarvan de takken gelabeld zijn met niet-negatieve getallen (de capaciteiten). De maximale stroomsterkte door zo'n netwerk is gelijk aan de minimale doorstroomcapaciteit van een snede van het netwerk ("Max-flow-min-cut-stelling" van Ford-Fulkerson). We kennen een algoritme om zo'n maximale stroom en minimale snede te vinden, met behulp van groeigrafen.

1.3 Koppelingen

Als we twee eindige verzamelingen S en T hebben, kunnen we tussen S en T een koppeling maken, dat wil zeggen, een één-op-één-afbeelding van S naar T. Een koppeling is volledig als alle elementen van S (wanneer T meer elementen heeft) danwel alle elementen van T (wanneer S meer elementen heeft) gekoppeld zijn. Een koppeling die niet volledig is, heet partieel. We hebben veel vormen van koppelingen gezien:
1) in de vorm van een bipartiete graaf met knooppunten S en T, in hoofdstuk 14;
2) in de vorm van een transversaal (koppel aan elke verzameling een element), in hoofdstuk 15 en verder;
3) in de vorm van permutaties; dan geldt dat S en T gelijk zijn, en ook is een permutatie altijd een volledige koppeling.

Koppelingen kunnen we altijd opschrijven in een rechthoekig diagram, een soort schaakbord, waarbij we de rijen 'nummeren' met de elementen van S en de kolommen met de elementen van T. Een (partiële) koppeling is dan gegeven door een aantal kruisjes te plaatsen in het diagram, met in elke rij en elke kolom hoogstens één kruisje.

Vaak moet een koppeling aan bepaalde voorwaarden voldoen. Bijvoorbeeld in hoofdstuk 14: we mogen alleen elementen aan elkaar koppelen die al verbonden zijn door een tak. Of bij transversalen: we kunnen een verzameling alleen koppelen met een element dat erin zit. In het algemeen: we mogen alleen bepaalde velden van het diagram gebruiken om kruisjes te zetten, of bepaalde velden juist niet gebruiken.

De Stelling van Hall vertelt je of er wel een volledige koppeling bestaat, gegeven de voorwaarden (Stelling 14.2). In hoofdstuk 15 staat dezelfde stelling, maar dan geformuleerd met transversalen. Stel dat een volledige koppeling niet mogelijk is, dan kunnen we met Gevolg 15.2 uitrekenen hoeveel paren we dan wel kunnen koppelen. De Stelling van Hall geeft ook een manier om zo'n koppeling stapsgewijs te construeren.

1.4 Matroïden

Stel we hebben de takken van een graaf elk een gewicht gegeven, en we zoeken een voortbrengende boom met het grootste (of kleinste) gewicht. Of: we hebben aan elke partiële transversaal (koppeling, in het algemeen) een gewicht gegeven (bijvoorbeeld een boete) en we zoeken de partiële transversaal met de kleinste boete.

We hebben al gezien hoe we een voortbrengende boom kunnen vinden, of hoe we een partiële koppeling kunnen construeren. Om ook nog het grootste of kleinste gewicht te vinden, gebruiken we het gretige algoritme. Dat kan alleen gebruikt worden als de objecten waarvan we het gewicht meten de bases zijn van een matroïde. We hebben daar een aantal soorten van gezien; zie ook de extra aantekeningen over matroïden, of hoofdstuk 18. De belangrijkste zijn de graafmatroïd, met als bases de voortbrengende bomen van een graaf, en de transversaalmatroïd, met als bases de maximale partiële transversalen van een stelsel verzamelingen $S_1, \ldots, S_n$.

Het gretige algoritme staat uitgelegd in hoofdstuk 20. Het is niet te herleiden tot het groeigrafen-algoritme, of omgekeerd.

2 Combinatoriek

Vervolgens geef ik de diverse methoden en resultaten die we hebben leren kennen om aantallen structuren te tellen. Je kunt deze methoden onderscheiden in
1) simpel tellen van alle objecten;
2) alleen objecten meetellen die bepaalde eigenschappen hebben;
3) alleen objecten meetellen die echt verschillen van elkaar, met andere woorden, de objecten verdelen in symmetrieklassen, en die klassen tellen.

2.1 Simpel tellen

De onderstaande beweringen komen uit hoofdstuk 7 en 10.

We hebben de volgende basisaantallen:

1. Permutaties van n objecten: $p(n) = n!$.
2. Keuzen van k objecten uit n met volgorde =
   k-rangschikkingen van n objecten: $p(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
3. Keuzen van k objecten uit n zonder volgorde (of met 1 vaste volgorde) =
   combinaties van k uit n = binomiaalcoëfficiënten: $c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
4. Keuzen van k objecten uit n met herhaling, met volgorde =
   k-herhalingsrangschikkingen van n objecten =
   rijtjes van lengte k gekozen uit n objecten: $g(n,k) = n^k$.
5. Keuzen van k objecten uit n met herhaling, zonder volgorde =
   k-herhalingscombinaties van n objecten: $h(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1}$.
6. Verdelingen van n objecten over p dozen zodat doos i precies n_i objecten bevat (hierbij is $n_i \geq 0$ en $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$): $\binom{n}{n_1; n_2; \ldots; n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_p!}$.

Enkele simpele toepassingen (met 'grafen' bedoel ik normale grafen met n genummerde knooppunten, en met 'bomen' hetzelfde voor bomen):

1. Er geldt $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, waarbij x en y willekeurige grootheden zijn (binomium van Newton).
2. Er geldt dat $(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n$ gelijk is aan de som van alle termen $\binom{n}{n_1; \ldots; n_p} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot x_p^{n_p}$ waarvoor $n_i \geq 0$ en $n_1 + \ldots + n_p = n$ (multinomium).
3. Er zijn $\binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{m}$ 'grafen' met m takken (keuzen van m uit $\frac{1}{2}n(n-1)$). Er zijn $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ 'grafen' in totaal (binomium met $x = y = 1$).
4. Er zijn $\binom{n-2}{d_1 - 1; \ldots; d_n - 1}$ 'bomen' zo dat knooppunt i precies graad d_i heeft (waarbij $d_i \geq 0$ en $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2(n-1)$). Er zijn n^{n-2} 'bomen' in totaal (multinomium met $x_1 = \ldots = x_n = 1$).

2.2 Tellen onder voorwaarden

Stel dat we een verzameling objecten hebben, die we willen tellen. We willen echter alleen die objecten meetellen die bepaalde eigenschappen hebben, of juist objecten die bepaalde eigenschappen niet hebben. Hiervoor hebben we twee methoden gezien. Deze worden besproken in hoofdstuk 9.

Het principe van inclusie en exclusie helpt je om het juiste aantal objecten te vinden, op voorwaarde dat je precies weet hoeveel objecten minstens 1 eigenschap heeft, hoeveel er minstens twee hebben, enzovoort. De precieze bewering wordt gegeven in Stelling 9.2.

Een voorbeeld hiervan is het bepalen van het aantal permutaties zonder dekpunt (dus geen enkel van de gepermuteerde elementen blijft op zijn plaats). Hierbij heeft een permutatie eigenschap i als het i-de element op zijn plaats blijft. De uitkomst staat in Voorbeeld 9.4.

Een probleem met dit principe is dat we nog wel zelf het aantal objecten moeten bepalen dat een gegeven stel eigenschappen heeft. Als dat te moeilijk is met de hand, gebruiken we de techniek van de torenveelterm. Die kunnen we alleen gebruiken voor het tellen van koppelingen, want we gebruiken daarbij diagrammen zoals ik hierboven heb behandeld bij de koppelingen. Maar permutaties horen hier in elk geval bij, dus met de torenveelterm kunnen we bepalen hoeveel permutaties van n objecten er zijn met allerlei vreemde eigenschappen.

Stel dat we koppelingen willen tellen tussen de verzamelingen S en T (bij permutaties geldt dus $S = T$). Het komt erop neer dat we een diagram tekenen (een 'schaakbord'), waarbij we de rijen nummeren met de elementen uit S en de kolommen met de elementen uit T (zie voorbeeld 9.12 op bladzijde 54). De voorwaarden waar de koppelingen aan moeten voldoen geven we weer als 'verboden velden' van het schaakbord.

Nu kunnen we twee dingen doen: we kunnen de torenveelterm van het bord met toegestane velden uitrekenen; stel dit is $r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots + r_kx^k$, met variabele x. Dat betekent dat er r_0 toegestane koppelingen zijn met 0 paren gekoppeld, r_1 met 1 paar gekoppeld, enzovoort, en r_k met k paren gekoppeld. Als S of T precies k elementen heeft, zijn die laatste dus volledige koppelingen.

Maar als we alleen permutaties zoeken kunnen we ook het omgekeerde doen: we berekenen de torenveelterm van het bord met verboden velden; stel dit is $r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots + r_kx^k$. Dat betekent dat een permutatie op r_k manieren k verboden velden kan bezetten, op r_{k-1} manieren $k-1$ velden, enzovoort, en (natuurlijk) dat er $r_0 = 1$ manier is om nul verboden velden te bezetten. Nu moeten we nog kijken welke elementen we dan op die verboden velden zetten; de uitkomst vinden we in Stelling 9.11, waar we met het principe van inclusie en exclusie uiteindelijk hebben uitgerekend dat er $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot (k-i)! \cdot r_i$ permutaties zijn die geen verboden veld gebruiken.

Die laatste techniek kan handig zijn als er maar weinig verboden velden zijn. Het is namelijk zo dat het uitrekenen van de torenveelterm veel meer werk kost naarmate er meer velden in het bord zijn, dus kiezen we het bord met de minste velden (verboden of toegestane velden) om de torenveelterm van te bepalen.

Dit geeft uiteindelijk de handigste manier om bijvoorbeeld het aantal permutaties van n objecten zonder dekpunt uit te rekenen: alleen de diagonaalvelden zijn verboden!

2.3 Tellen van symmetrieklassen

Hier hebben we het omgekeerde van de vorige paragraaf: alle objecten doen mee, maar we tellen ze alleen als ze ook echt verschillend zijn! De situatie is hier als volgt: we hebben een verzameling objecten, en een verzameling transformaties die die objecten in elkaar overvoeren. Bijvoorbeeld: we hebben vierkanten met gekleurde ribben, en we mogen die draaien over 90, 180, en 270 graden. Of: we hebben grafen, en die kunnen isomorf aan elkaar zijn. Ook hier hebben we twee technieken geleerd om nu uit te rekenen hoeveel echt verschillende objecten er zijn; anders gezegd: in hoeveel klassen de objecten uiteenvallen (in elke klasse zitten dan alleen die objecten die in elkaar overgaan of isomorf aan elkaar zijn).

Overigens moeten we erop letten dat de verzameling bewerkingen een groep G vormt: als we twee bewerkingen na elkaar uitvoeren, moeten we weer een bewerking krijgen die we al in onze verzameling hadden; we moeten elke bewerking weer ongedaan kunnen maken; en niets doen is ook een bewerking!

De eerste techniek is de Stelling van Burnside. Hiervoor moeten we voor elke bewerking in de groep weten hoeveel objecten niet veranderen als we deze bewerking erop toepassen (het aantal 'invarianten' onder de bewerking). Als we dat aantal weergeven met $\psi(\pi)$ (voor de bewerking π), geldt dat het aantal klassen gelijk is aan $\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\psi(\pi)$ (Stelling 11.2).

Een probleem hierbij is dat het soms niet gemakkelijk is om het aantal invarianten onder een bepaalde bewerking te bepalen. Verder is het zo dat we alleen het totale aantal klassen krijgen, en geen informatie over de verdeling van de objecten over de klassen. Om deze problemen (voor een deel) op te lossen, gebruiken we de theorie van Pólya.

In de theorie van Pólya moeten we meer weten over de structuur van onze objecten. Elk object is opgebouwd uit een aantal plaatsen, en aan elke plaats kunnen we een zogenaamde figuur koppelen. In ons voorbeeld zijn de plaatsen de ribben van het vierkant, en de figuren zijn de kleuren. Het punt is nu dat we door meer over de interne structuur van de objecten te vertellen, meer informatie krijgen over de werking van de groep G op de objecten. We moeten nu de cykelindex van de groep uitrekenen, zoals ik op college heb uitgelegd (zie ook hoofdstuk 12). Dat is een functie met een aantal variabelen; het aantal is gelijk aan het aantal plaatsen. Als we nu in die functie op de juiste manier de figuurtelreeks invullen (ook zoals op college verteld), krijgen we een veelterm met evenveel variabelen als de figuurtelreeks. Daaruit kunnen we dan de gevraagde aantallen aflezen. Deze veelterm heet de patronentelreeks.

Als we elke figuur gewicht 1 geven (dan is de figuurtelreeks gelijk aan het aantal figuren), is de patronentelreeks een getal, namelijk het aantal klassen objecten. Als we figuur i gewicht x_i geven, waarbij x_i een variabele is, is de patronentelreeks een veelterm in de variabelen $x_1,\ldots,x_p$; als c de coëfficiënt is van $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_p^{n_p}$, betekent dat dat er c echt verschillende objecten zijn met n_1 keer figuur 1, n_2 keer figuur 2, enzovoort (natuurlijk is $n_1+n_2+\ldots+n_p$ gelijk aan het aantal plaatsen). Er zijn nog meer mogelijkheden voor de figuurtelreeks, maar die zijn minder bruikbaar (vergelijk het voorbeeld van de moleculen, op college). Met de Pólya-theorie zijn we eindelijk in staat om het aantal niet-isomorfe grafen met n knopen te bepalen (hoofdstuk 13).

Voor vragen en opmerkingen: C.E. van de Woestijne, Mathematisch Instituut.
E-mail: `cvdwoest@math.LeidenUniv.nl`.