HERTENTAMEN AUTOMATA THEORY
Donderdag 25 maart 2021, 09.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit negen opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Wanneer er bij een vraag om uitleg, motivatie of toelichting gevraagd wordt, is het belangrijk om die ook te geven.
Als we het in dit tentamen over een eindige automaat hebben (zonder verdere toevoeging), bedoelen we een deterministische eindige automaat zonder Λ-transities (wat elders *DFA* genoemd wordt).

---

1. [18 pt] Laat

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ bevat geen substring } bb\text{, of } n_b(x) \text{ is even}\}$$

Het woordje 'of' hierboven betreft de *inclusive or*, dus ook de string bab zit in L.

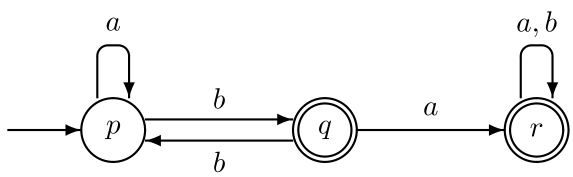
(a) Teken een eindige automaat M, zó dat $L(M) = L$.

(b) Geef een reguliere expressie voor de taal L. Deze expressie moet rechtstreeks gebaseerd zijn op eigenschappen van de taal. Hij moet dus b.v. niet het resultaat zijn van een standaardconstructie om een eindige automaat om te zetten in een reguliere expressie.

Leg ook uit waarom je expressie precies de taal L beschrijft.

---

2. [14 pt] Beschouw onderstaande eindige automaat M:



Pas de *state-elimination* methode van Brzozowski en McCluskey toe om een reguliere expressie voor de taal van M te construeren. Leg kort uit wat je doet, en geef tussenresultaten.

---

3. [11 pt]

(a) Wanneer noemen we een context-vrije grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ *regulier* (wat elders *rechts-lineair* genoemd wordt).

Als je dit antwoord niet weet, kun je het 'kopen' van de docent, zodat je het volgende onderdeel wellicht wel kunt maken.

(b) Leg uit hoe je voor een willekeurige eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ een reguliere grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ kunt construeren, zó dat $L(G) = L(M)$. Dat wil zeggen: wat zijn V, S en P in dit geval.

Je hoeft niet aan te tonen dat de constructie correct is.

---

4. [10 pt] Laat

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x) \geq n_a(x) - 2\}$$

Ofwel: het aantal b's is niet groter, maar ook niet veel kleiner dan het aantal a's. Bij huiswerkopgave 3 werd gevraagd om een context-vrije grammatica voor L.

Laat G de context-vrije grammatica zijn met startvariabele S en de volgende producties:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \Lambda \mid aB \mid aaB \mid aaaB \mid bA \\ A & \to & aS \mid bAA \\ B & \to & bS \mid aBB \end{array}$$

(a) Is $L(G) \subseteq L$? Zo nee, geef een element van $L(G)$ dat niet in L zit.

(b) Is $L \subseteq L(G)$? Zo nee, geef een element van L dat niet in $L(G)$ zit.

---

5. [7 pt] Laat G de context-vrije grammatica zijn met startvariabele S en de volgende producties:

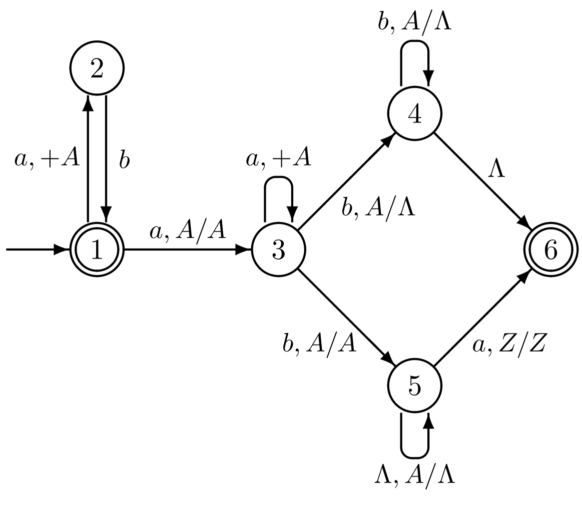
$$S \to b \mid aSS \mid SaS \mid SSa$$

(G genereert alle strings x over $\{a,b\}$, waarvoor $n_a(x) = n_b(x) - 1$.)

Is G dubbelzinnig?
Zo nee, beredeneer waarom niet.
Zo ja, geef een string $x \in \{a,b\}^*$ die twee verschillende afleidingsbomen in G heeft; geef vervolgens ook die afleidingsbomen.

---

6. [6 pt] Beschouw onderstaande stapelautomaat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z, A, \delta)$ met $\Gamma = \{Z, A\}$.



De component δ van het zevental is de transitiefunctie. Wat zijn achtereenvolgens de functiewaardes $\delta(1, a, A)$, $\delta(2, b, Z)$ en $\delta(3, a, A)$?

---

7. [12 pt] Laat
$$L = \{a^i b^{i+k} a^k \mid i, k \geq 0\}$$
   (a) Geef de eerste zes elementen van L in de canonieke volgorde.
   (b) Teken een stapelautomaat M, zodat $L(M) = L$.
   Deze stapelautomaat moet rechtstreeks gebaseerd zijn op eigenschappen van de taal. Hij moet dus niet het resultaat zijn van een standaardconstructie om b.v. een context-vrije grammatica om te zetten in een stapelautomaat.
   Probeer ervoor te zorgen dat M deterministisch is en geen Λ-transities bevat. Als dit niet lukt, kun je nog wel het grootste deel van de punten verdienen.

---

8. [8 pt]
   (a) Wanneer noemen we een context-vrije grammatica G een LL(1) grammatica?
   (b) Laat G_1 de context-vrije grammatica zijn met startvariabele S en de volgende producties:
$$S \to Sab \mid Sb \mid Ab \qquad A \to aSb \mid ab$$
   Construeer vanuit G_1 een context-vrije grammatica G_2, door (indien van toepassing) links-recursie te elimineren en te factoriseren. Leg kort uit wat je doet, en geef, indien van toepassing, ook tussenresultaten.

---

9. [14 pt] Het pomplemma voor context-vrije talen luidt als volgt:

   Stel L is een context-vrije taal.
   Dan is er een integer n, zó dat
   voor iedere $u \in L$ waarvoor $|u| \geq n$, u geschreven kan worden als
   $u = vwxyz$ voor bepaalde strings v, w, x, y en z waarvoor
   1. $|wy| > 0$ (dwz $wy \neq \Lambda$).
   2. $|wxy| \leq n$.
   3. Voor elke $m \geq 0$ behoort de string $vw^m xy^m z$ ook tot L.

   Laat nu
$$L_1 = \{a^i b^{i+k} a^k \mid 0 \leq i < k\}$$
   Gebruik bovenstaand pomplemma om aan te tonen dat de taal L_1 niet context-vrij is. Ofwel: veronderstel dat L_1 wél context-vrij is, kies dan een geschikt woord $u \in L_1$ en toon aan dat u niet opgepompt en/of weggepompt kan worden. Vergeet ook niet om de conclusie te trekken.

`einde tentamen`