

ALGORITMIEK: opgaven werkcollege 13

Gretige algoritmen / Branch-and-bound

Opgave 1.

Ontwerp een gretig algoritme voor het toewijzingsprobleem (dat we kennen uit paragraaf 3.4). Levert je gretige algoritme altijd een optimale oplossing op?

Opgave 2. (Opgave 1.2.2 en opgave 9.1.5 uit het boek van Levitin.)

New World puzzle Er zijn vier mensen die een gammele brug willen oversteken; ze beginnen allemaal aan dezelfde kant. Je hebt 17 minuten om ze allemaal naar de overkant te krijgen. Het is nacht, en ze hebben één zaklamp. Er kunnen hoogstens twee mensen tegelijk de brug oversteken. Wanneer mensen de brug oversteken, of het er nu één is of twee zijn, moeten ze de zaklamp bij zich hebben. De zaklamp moet heen en weer meegenomen worden; hij kan bijvoorbeeld niet gegooid worden.

Persoon 1 heeft één minuut nodig om de brug over te steken, persoon 2 twee minuten, persoon 3 vijf minuten en persoon 4 tien minuten. Als twee mensen samen oversteken, lopen ze met de snelheid van de langzaamste. (N.B.: Volgens een gerucht op internet werd dit probleem bij een bekend softwarebedrijf in de buurt van Seattle aan sollicitanten gegeven.)

a. Bepaal voor het voorbeeldgeval hierboven een oplossing.

b. Beschouw nu het algemene geval, waarin we $n > 1$ mensen hebben, met oversteektijden t_1, t_2, \dots, t_n . Alle andere voorwaarden in het probleem zijn hetzelfde. Je mag aannemen dat $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$.

Bedenk een gretig algoritme voor dit probleem en bereken de totale tijd die het kost om de brug over te steken als je dat algoritme gebruikt. Ga na of het gretige algoritme altijd een optimale oplossing oplevert. Zo ja, toon dit aan. Zo nee, geef een instantie met zo weinig mogelijk mensen waaruit dit blijkt.

Opgave 3. (Opgave 9.1.8 uit het boek van Levitin.)

Bachet's gewichtenprobleem Bepaal een optimale rij van n gewichten $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ zodat het mogelijk is om met een balans elk voorwerp met een integer gewicht tussen 1 en W te wegen, voor een zo groot mogelijk getal W , ervanuitgaande dat

a. de gewichten alleen op de vrije schaal van de balans gezet kunnen worden (dus waar het te wegen voorwerp niet staat). Dit komt erop neer dat je met n positieve gehele getallen een zo groot mogelijke aaneengesloten reeks getallen moet kunnen maken door ze op alle mogelijke manieren op te tellen. De bedoeling is om de optimale rij 'gewichten' op een gretige manier op te bouwen.

b. (voor de liefhebbers) de gewichten op beide schalen van de balans gezet kunnen worden. Nu kun je dus ook aftrekken, door sommige gewichten op de linkerschaal van de balans te zetten, en andere op de rechterschaal. Zo kun je bijvoorbeeld een voorwerp met gewicht 2 wegen met behulp van de gewichten $w_1 = 1$ en $w_2 = 3$ door w_1 bij het voorwerp op de ene schaal te plaatsen en gewicht w_2 op de andere.

Opgave 4. Los het toewijzingsprobleem op voor onderstaand voorbeeld met behulp van

- a. branch-and-bound, met de ondergrens op de te verwachten waarde van de object-functie via de rijen berekend (zoals het voorbeeld in het boek/college), en gebruikmakend van de best-first strategie
- b. branch-and-bound, met de ondergrens op de te verwachten waarde van de object-functie via de kolommen berekend, en gebruikmakend van de best-first strategie
- c. backtracking (kosten van deeloplossingen kunnen worden gebruikt om te snoeien)

en vergelijk de hoeveelheid snoeiwerk bij de drie methodes. Teken in alle drie de gevallen de bijbehorende state-space-tree (bij backtracking is een substantieel deel voldoende). Geef daarin ook aan in welke volgorde de knopen (=deeloplossingen) worden uitgebreid.

	W	X	Y	Z
Alice	4	7	3	5
Bob	6	2	9	1
Carol	3	9	5	3
David	1	1	1	8

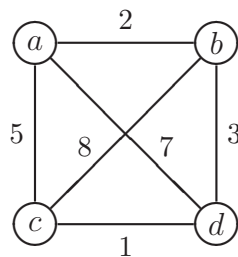
d. Hoeveel knopen bevat de state-space-tree van het branch-and-bound algoritme in het beste geval? Beantwoord deze vraag voor het voorbeeld (dus $n = 4$), maar ook voor algemene n .

Opgave 5. (Opgave 12.2.5. uit het boek van Levitin.) Los de volgende instantie van het knapzakprobleem op met behulp van het branch-and-bound algoritme:

object	gewicht	waarde
1	10	100
2	7	63
3	8	56
4	4	12

knapzakcapaciteit $W = 16$

Opgave 6. (Opgave 12.2.9. uit het boek van Levitin (zie tevens de college-slides).) Gebruik het branch-and-bound algoritme om het handelsreizigersprobleem op te lossen voor de volgende graaf:



Gebruik de in het boek gehanteerde ondergrens.

(In hoorcollege 5 hebben we dit probleem met exhaustive search opgelost.)

Opgave 7. Handelsreizigersprobleem: bedenken een andere ondergrens voor de te verwachten lengte van een Hamiltonkring en pas het branch-and-bound algoritme met die ondergrens toe op de graaf uit de vorige opgave en op de graaf uit het boek (p.465)/college.

Bijvoorbeeld: (1) lengte van huidige pad + som over: alle nog niet bezochte knopen en laatste knoop van huidige pad, van: voor elk van die knopen de lengte van de kortste tak incident met die knoop (de reeds in het huidige pad zittende takken uitgesloten)

of (2), manier 2 van de bijbehorende slide van college 13: lengte huidige pad + de lengtes van de $(n - \text{het aantal takken in het huidige pad})$ kortste takken gesommeerd (voor zover die nog niet gebruikt zijn).