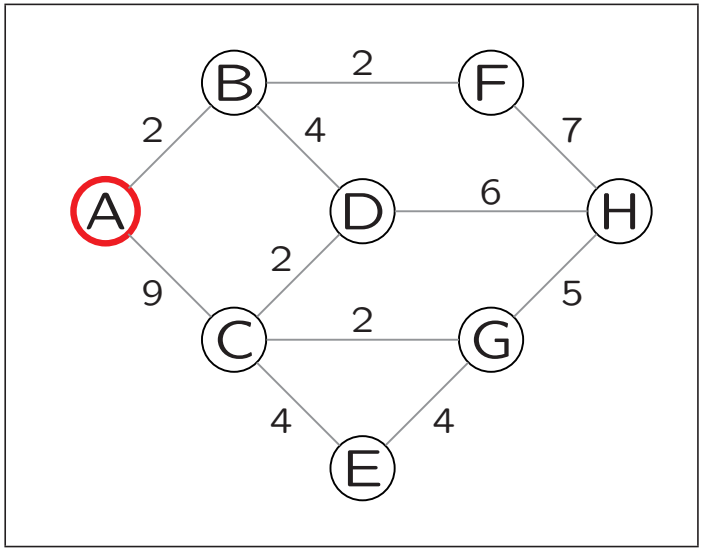
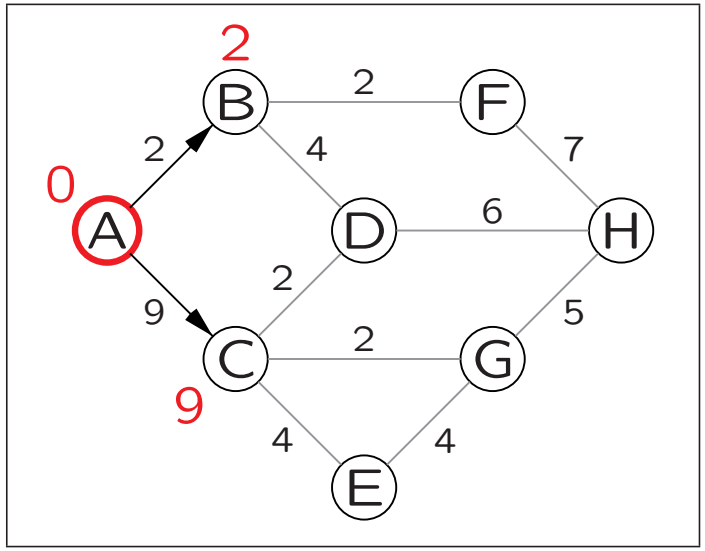
Elfde college algoritmiek

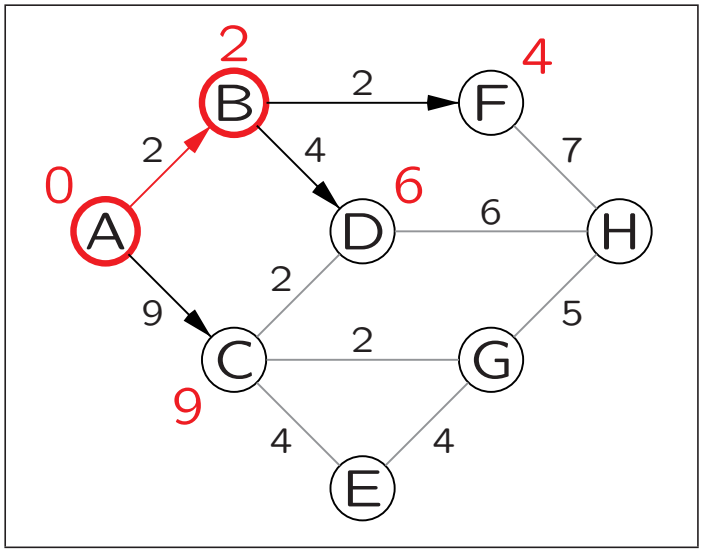
29 april 2020

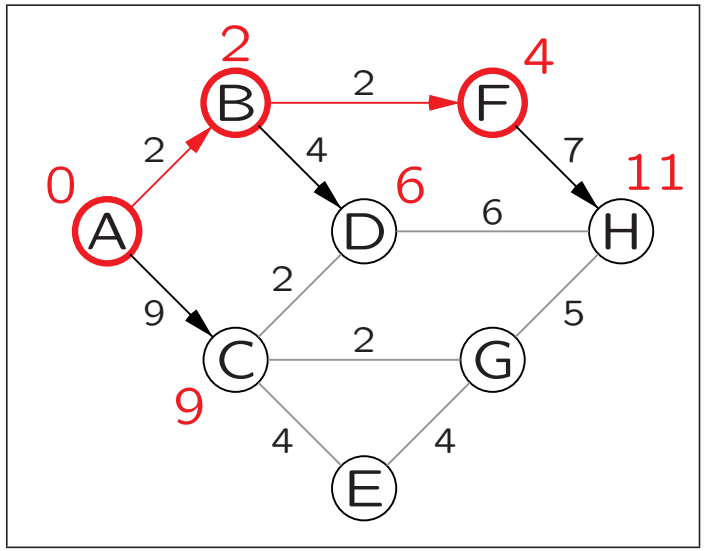
Algoritme van Dijkstra,
Gretige Algoritmen

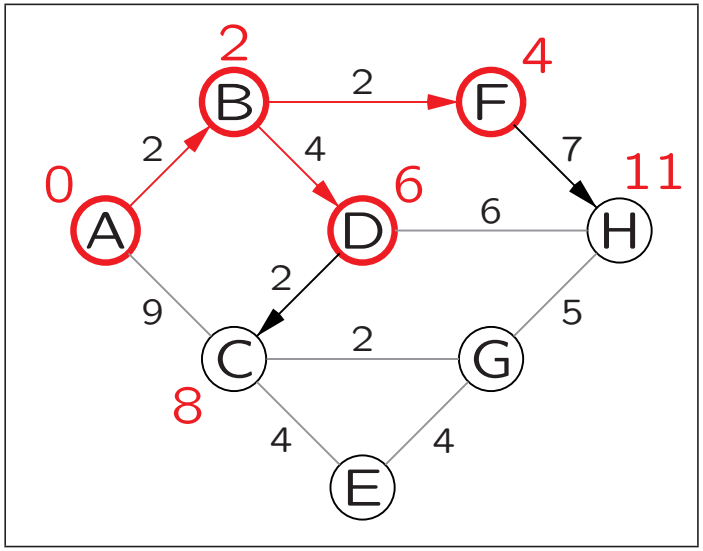
Healthy University @ Home

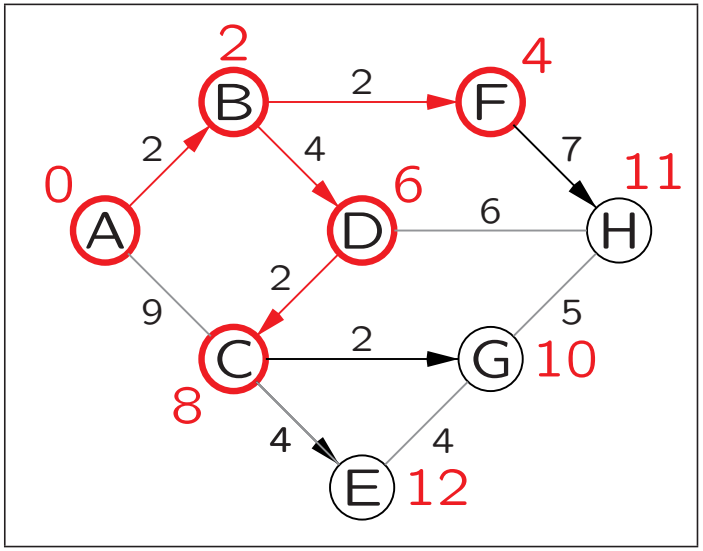

A
B
C
D
E
F
G
H
2
2
9
4
2
6
7
2
5
4
4

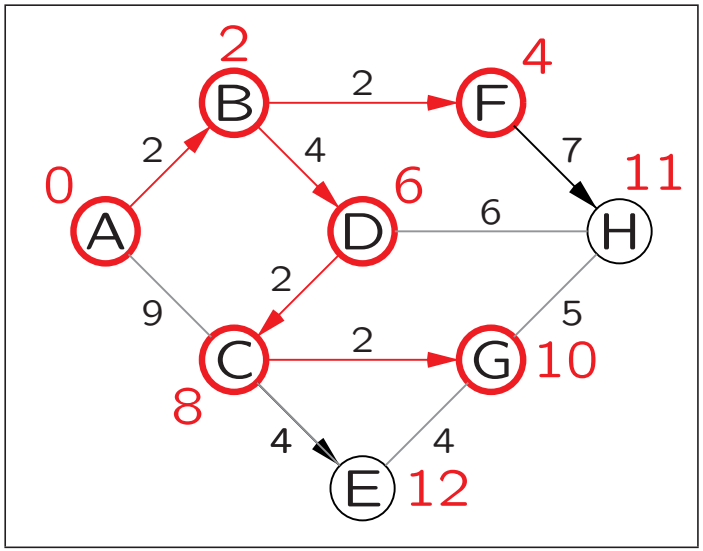

0
2
9
A
B
C
D
E
F
G
H
2
2
4
2
6
7
2
5
4
4

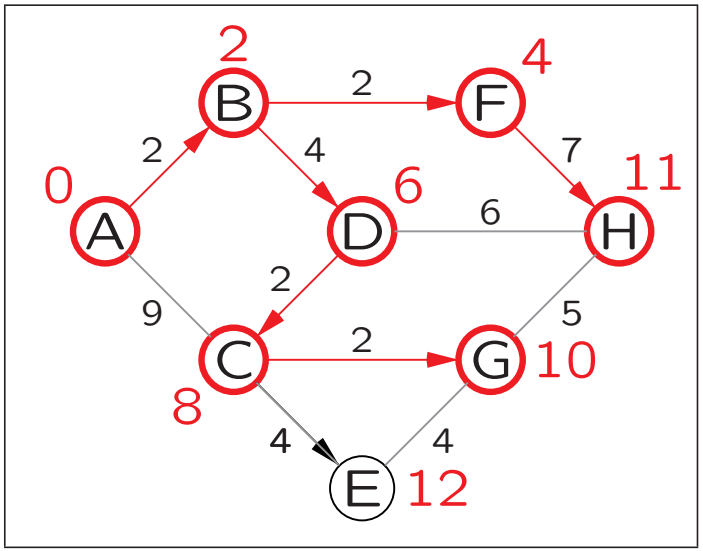

0
2
9
6
9
A
B
C
D
E
F
G
H
2
2
4
2
6
7
2
5
4
4

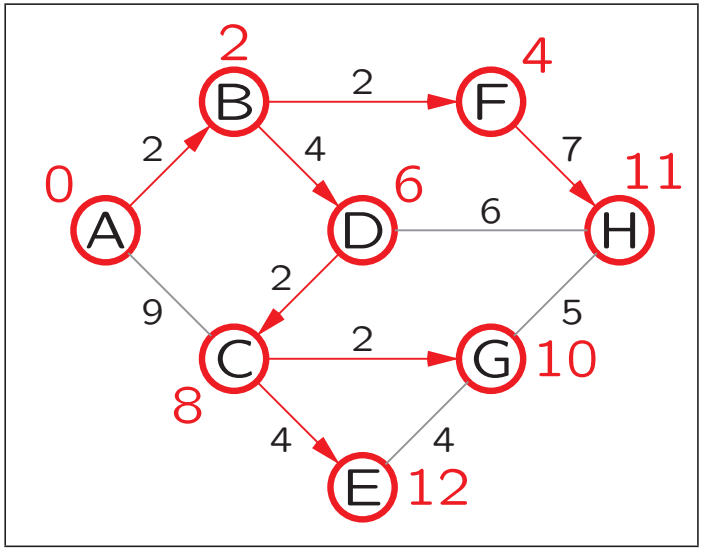

0
2
9
6
9
11
A
B
C
D
E
F
G
H
2
2
4
2
6
7
2
5
4
4


0
A
2
B
4
F
11
H
6
D
8
C
E
G
2
4
2
9
4
2
6
7
2
5
4

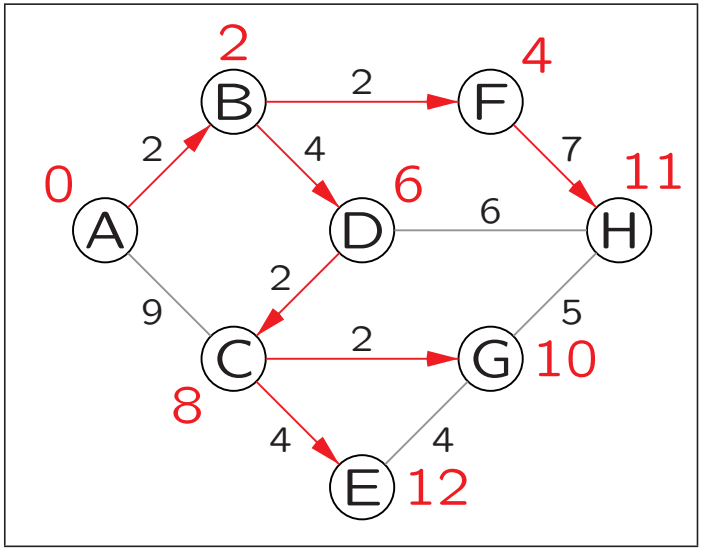

0
A
2
B
4
F
11
H
6
D
8
C
E
10
G
12
2
4
2
9
4
2
6
7
2
5
4


0
A
2
B
4
F
11
H
6
D
8
C
E
10
G
12
2
4
2
9
4
2
6
7
2
5
4


0
A
2
B
4
F
11
H
6
D
8
C
E
10
G
12
2
4
2
9
4
2
6
7
2
5
4



Het algoritme is klaar: alle knopen gehad



Alle kortste paden vanuit A met hun lengtes

// invoer: samenhangende gewogen graaf $G = (V, E)$ en startknoop s
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit s bevat;
// na afloop is pad[v] = de lengte van een kortste pad van s naar v

for $v \in V$ **do**
    pad[v] := ∞;
od
pad[s] := 0;
$U := \emptyset$;

while ($U \neq V$) **do**
    vind knoop $v^* \in V \setminus U$ met pad[v^*] minimaal;
    $U := U \cup \{v^*\}$;
    for alle knopen v aangrenzend aan v^* **do**
        if pad[v^*] + gewicht(v^*, v) < pad[v] **then**
            pad[v] := pad[v^*] + gewicht(v^*, v);
        fi
    od
od

Complexiteit (met adjacency matrix): . . .

// invoer: samenhangende gewogen graaf $G = (V, E)$ en startknoop s
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit s bevat;
// na afloop is pad[v] = de lengte van een kortste pad van s naar v

for $v \in V$ **do**
    pad[v] := ∞;
od
pad[s] := 0;
$U := \emptyset$;

while ($U \neq V$) **do**
    vind knoop $v^* \in V \setminus U$ met pad[v^*] minimaal;
    $U := U \cup \{v^*\}$;
    for alle knopen v aangrenzend aan v^* **do**
        if pad[v^*] + gewicht(v^*, v) < pad[v] **then**
            pad[v] := pad[v^*] + gewicht(v^*, v);
        fi
    od
od

Complexiteit (met adjacency matrix):
$\Theta(n + 1 + n(n + 1 + n)) = \Theta(n^2)$

// invoer: samenhangende gewogen graaf $G = (V, E)$ en startknoop s
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit s bevat;
// na afloop is pad[v] = de lengte van een kortste pad van s naar v

for $v \in V$ **do**
    pad[v] := ∞;
od
pad[s] := 0;
$U := \emptyset$;

while ($U \neq V$) **do**
    vind knoop $v^* \in V \setminus U$ met pad[v^*] minimaal;
    $U := U \cup \{v^*\}$;
    for alle knopen v aangrenzend aan v^* **do**
        if pad[v^*] + gewicht(v^*, v) < pad[v] **then**
            pad[v] := pad[v^*] + gewicht(v^*, v);
        fi
    od
od

Complexiteit (met adjacency list en priority queue): . . .

Bij Dijkstra:
kies knoop v^* buiten boom met laagste kandidaatwaarde pad[v^*]

Bij Branch & Bound (volgende week):
kies deeloplossing met beste ondergrens/bovengrens

Priority Queue:

- objecten met prioriteit (en info), b.v. { (C,9), (D,6), (H,11) }
- insert
- findmax (findmin)
- deletemax (deletemin)
- (optioneel) changepriority

Bij Dijkstra: kies knoop buiten boom met laagste kandidaatwaarde

Bij Branch & Bound (volgende week):
kies deeloplossing met beste ondergrens/bovengrens

Priority Queue:

- objecten met prioriteit (en info), b.v. $\{(C, 9), (D, 6), (H, 11)\}$
- insert: heap: $O(\log n)$
- findmax (findmin): heap: $O(1)$
- deletemax (deletemin): heap: $O(\log n)$
- (optioneel) changepriority: heap: $O(\log n)$

// invoer: samenhangende gewogen graaf $G = (V, E)$ en startknoop s
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit s bevat;
// na afloop is pad[v] = de lengte van een kortste pad van s naar v

for $v \in V$ **do**
    pad[v] := ∞;
od
pad[s] := 0;
$U := \emptyset$;

while ($U \neq V$) **do**
    vind knoop $v^* \in V \setminus U$ met pad[v^*] minimaal;
    $U := U \cup \{v^*\}$;
    for alle knopen v aangrenzend aan v^* **do**
        if pad[v^*] + gewicht(v^*, v) < pad[v] **then**
            pad[v] := pad[v^*] + gewicht(v^*, v);
        fi
    od
od

Complexiteit (met adjacency list en heap): . . .

// invoer: samenhangende gewogen graaf $G = (V, E)$ en startknoop s
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit s bevat;
// na afloop is pad[v] = de lengte van een kortste pad van s naar v

for $v \in V$ **do**
    pad[v] := ∞;
od
pad[s] := 0;
$U := \emptyset$;

while ($U \neq V$) **do**
    vind knoop $v^* \in V \setminus U$ met pad[v^*] minimaal;
    $U := U \cup \{v^*\}$;
    for alle knopen v aangrenzend aan v^* **do**
        if pad[v^*] + gewicht(v^*, v) < pad[v] **then**
            pad[v] := pad[v^*] + gewicht(v^*, v);
        fi
    od
od

Complexiteit (met adjacency list en heap):
$O(n + 1 + n + n \log n + m \log n) = O(m \log n)$

- In het algoritme bevat U steeds alle knopen waarvan de definitieve kortste afstand vanaf s reeds bepaald is. Voor deze knopen geeft het label pad[v] al de definitieve kortste afstand aan. Moet bewezen worden.
- Voor de andere knopen w geldt na elke ronde (= doorgang door de while):

  $$(\#)\ \text{pad}[w] = \min_{u \in U}\{\text{pad}[u] + \text{gewicht}(u, w)\}^*$$

  Dit volgt direct uit het algoritme.
- De volgende dichtstbijzijnde knoop v^* wordt gekozen uit de knopen uit $V \setminus U$ die direct grenzen aan U. Nadat deze gekozen is worden de labels aangepast, zodat (#) ook geldt voor de nieuwe U.
- Het is niet zo moeilijk dit algoritme aan te passen zodat ook de kortste paden zelf worden berekend. Sla direct na het aanpassen van het label van knoop v de nieuwe kandidaattak (v^*, v) op:

  if pad[v^*] + gewicht(v^*, v) < pad[v] **then**
  pad[v] := pad[v^*] + gewicht(v^*, v);
  nieuwe kandidaattak voor v: (v^*, v)
  fi

*Dit betekent dat pad[w] voor deze knopen $w \notin U$ de lengte van een kortste pad van s naar w aangeeft via uitsluitend knopen van U.

Na elke ronde (dus ook na de laatste, wanneer $U = V$) van het algoritme van Dijkstra geldt:

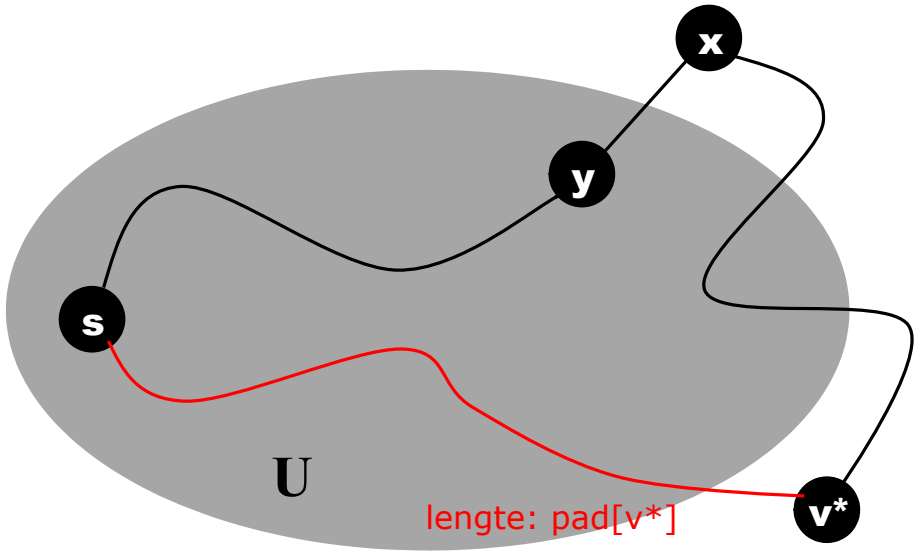
- U bevat alle knopen waarvan de definitieve kortste afstand vanaf s reeds bepaald is. Voor elke $v \in U$ geeft het label pad[v] die kortste afstand aan.

Om dit te bewijzen moet je laten zien dat:

- wanneer v^* wordt toegevoegd aan U, pad[v^*] inderdaad de lengte van het kortste pad van s naar v^* bevat

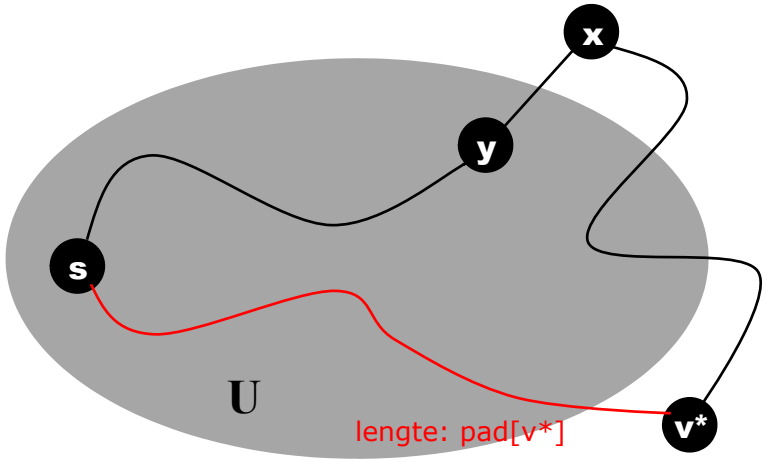
pad$[v^*]$ is daadwerkelijk lengte van een pad van s naar v^*:

$$(\#)\ \text{pad}[v^*] = \min_{u \in U}\{\text{pad}[u] + \text{gewicht}(u, v^*)\}^*$$



*Dit betekent dat pad$[v^*]$ de lengte van een kortste pad van s naar v^* aangeeft via uitsluitend knopen van U.

Bekijk, behalve het pad ter lengte pad[v^*] van s naar v^* via U een willekeurig ander pad van s naar v^*. Stel dat x de eerste knoop op dat pad is buiten U, en y de laatste knoop daarvóór. (Deze x kán gelijk zijn aan v^*.) Zij $d(s, y, x, v^*)$ de lengte van dat pad.

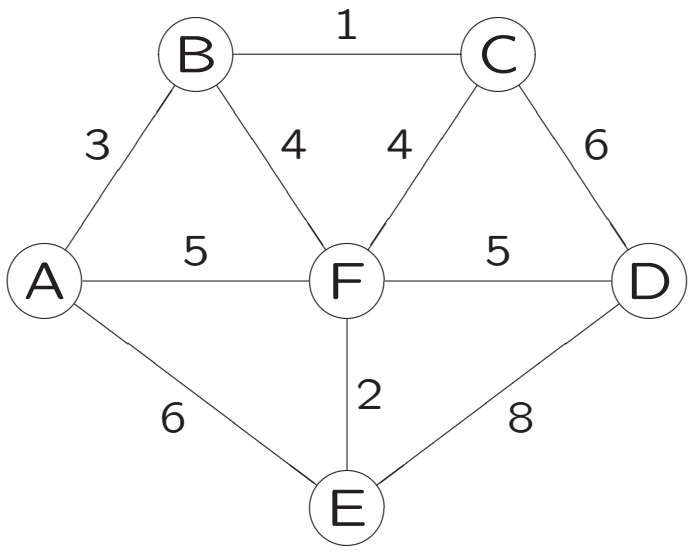


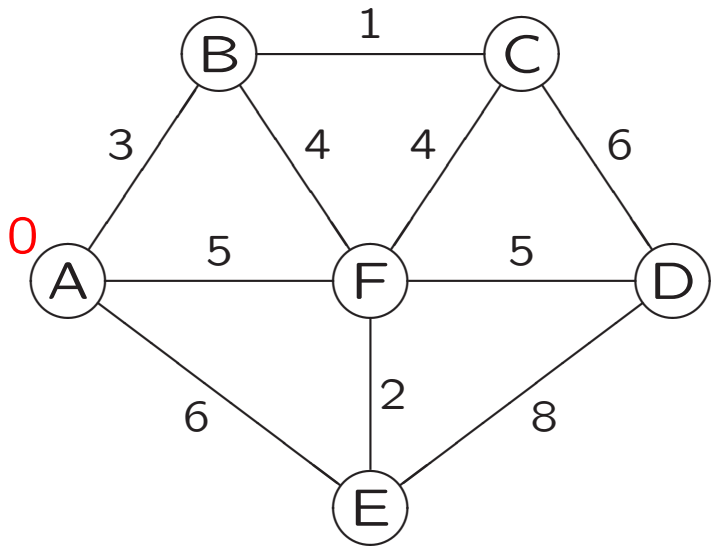
Dan geldt: $d(s, y, x, v^*) \geq d(s, y, x) = d(s, y) + \text{gewicht}(y, x) \geq \text{pad}[y] + \text{gewicht}(y, x) \geq \text{pad}[x] \geq \text{pad}[v^*]$ omdat respectievelijk alle gewichten van de takken ≥ 0 zijn, pad[y] volgens inductiehypothese kortste afstand is naar y, (#) geldt voor x, en v^* gekozen was in deze ronde als 'minimale' knoop.

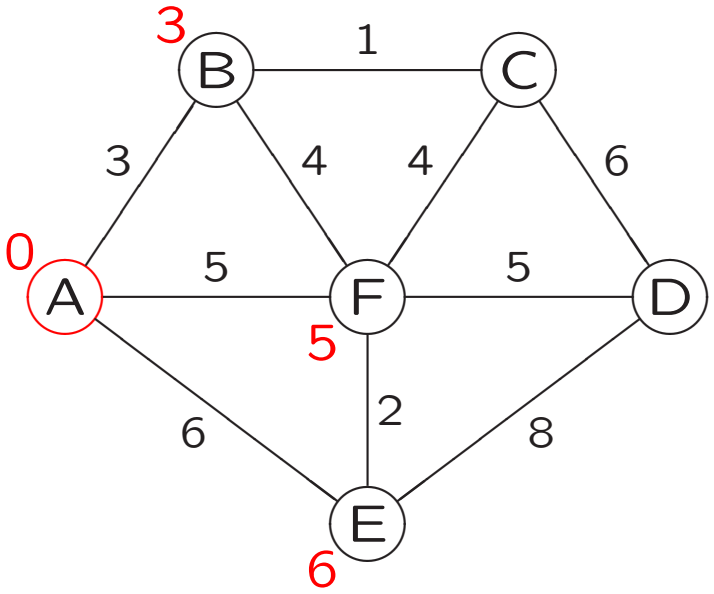
QED

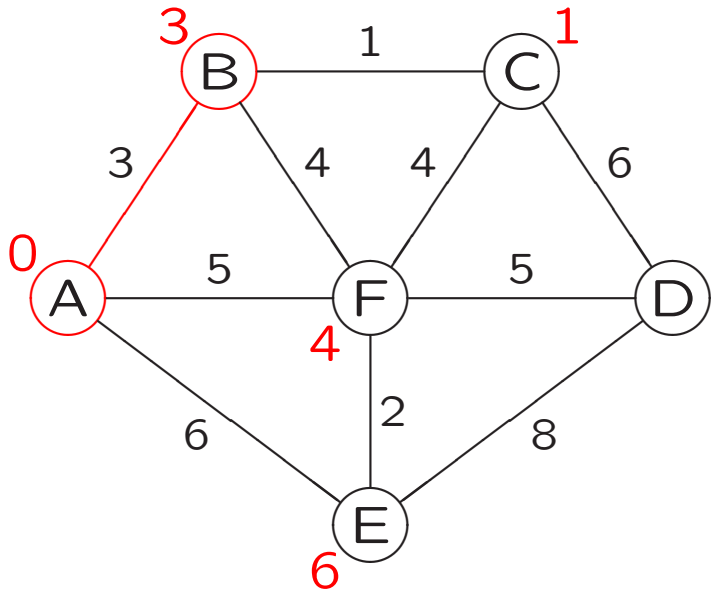
Gegeven een samenhangende, ongerichte graaf G met gewichten op de takken.

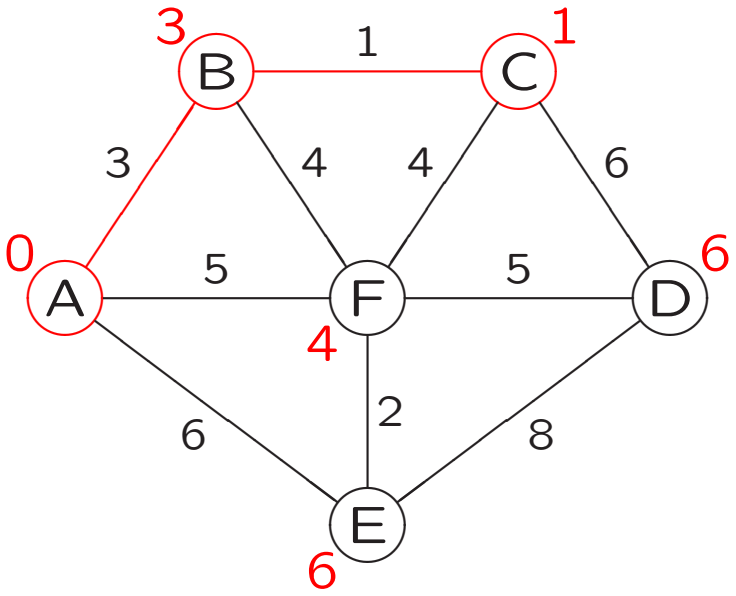
Gevraagd: een opspannende boom van G met minimaal totaal gewicht.



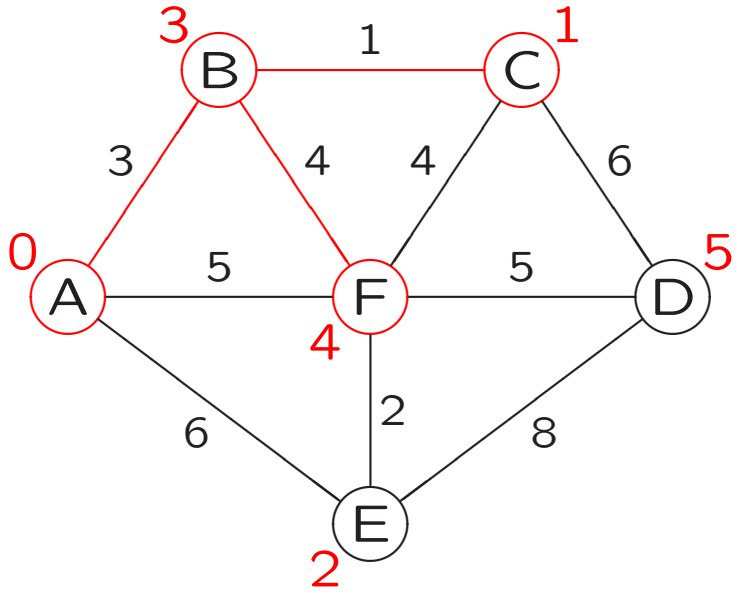

B
C
A
F
D
E
1
3
4
4
6
5
5
6
2
8
0

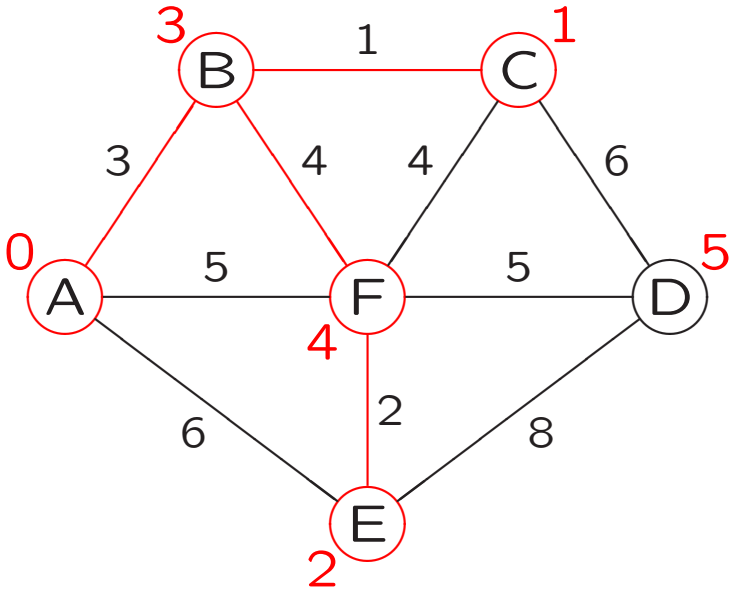

B
C
A
F
D
E
3
1
3
4
4
6
0
5
5
5
6
2
8

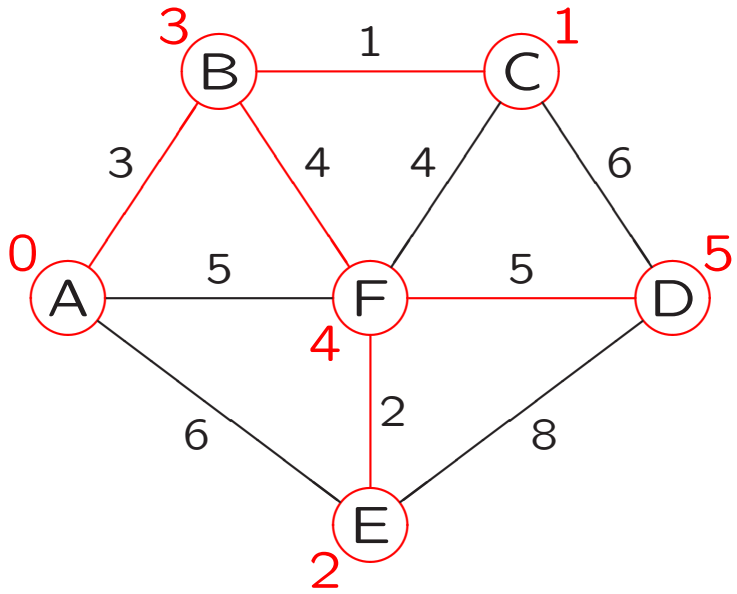

B
C
A
F
D
E
3
1
1
3
4
4
6
0
5
5
4
6
2
8


B
C
A
F
D
E
3
1
1
3
4
4
6
0
5
5
6
4
6
2
8

Algoritme van Prim







// invoer: samenhangende, ongerichte gewogen graaf $G = (V, E)$ en startknoop s
// uitvoer: E_T, verzameling takken van minimale opspannende boom T van G

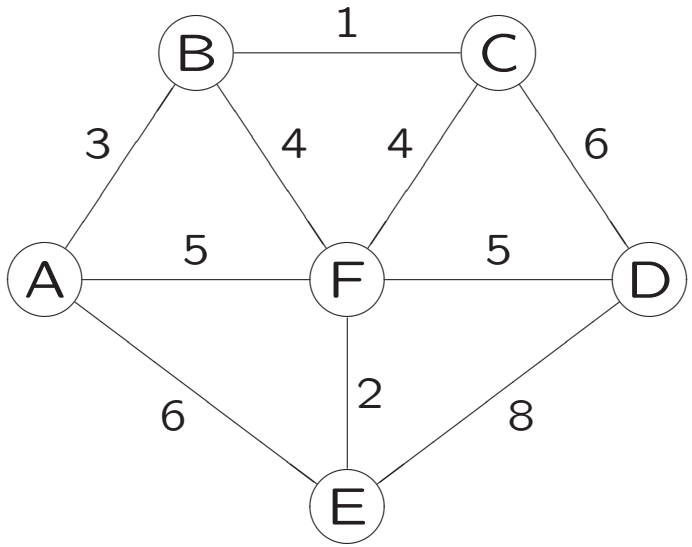
for $v \in V$ **do**
    tak[v] := ∞;
od
tak[s] := 0;
$U := \emptyset$;
$E_T := \emptyset$;

while ($U \neq V$) **do**
    vind knoop $v^* \in V \setminus U$ met tak[v^*] minimaal;
    $U := U \cup \{v^*\}$;
    voeg bijbehorende tak naar v^* toe aan E_T (als $v^* \neq s$);
    for alle knopen v aangrenzend aan v^* **do**
        if gewicht(v^*, v) $<$ tak[v] **then**
            tak[v] := gewicht(v^*, v);
        fi
    od
od

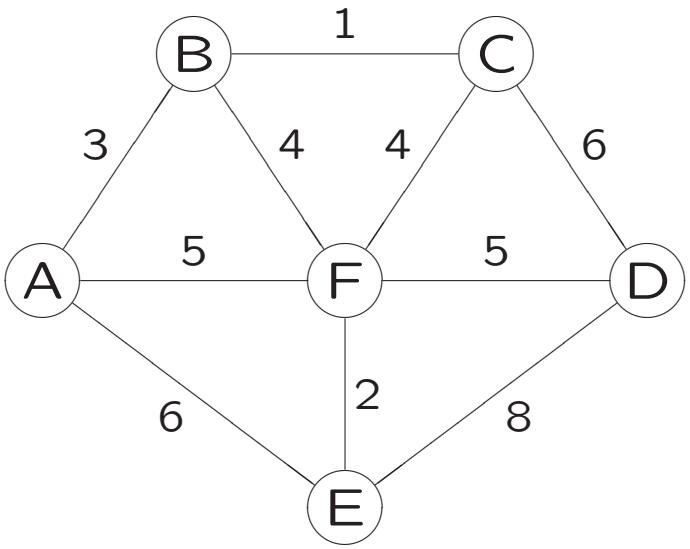
Complexiteit: zie Dijkstra

Als je gewoon wilt doortekenen in één plaatje. . .

A	B	C	D	E	F	Actie
0	∞	∞	∞	∞	∞	Begin met A
–	3	∞	∞	6	5	Kies B, vanaf A
–	–	1	∞	6	4	Kies C, vanaf B
–	–	–	6	6	4	Kies F, vanaf B
–	–	–	5	2	–	Kies E, vanaf F
–	–	–	5	–	–	Kies D, vanaf F



Een rij in de tabel komt overeen met het array `tak` in pseudo-code op vorige slide.


B
C
A
F
D
E
1
3
4
4
6
5
5
6
2
8

// invoer: samenhangende, ongerichte gewogen graaf $G = (V, E)$
// uitvoer: E_T, verzameling takken van minimale opspannende boom T van G

sorteer E op gewicht (in oplopende volgorde): $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$;
$E_T = \emptyset$;
takteller = 0;
k = 0;
while takteller $< |V| - 1$ **do**
    k = k+1;
    if $E_T \cup \{e_{i_k}\}$ is acyclisch **then**
        $E_T = E_T \cup \{e_{i_k}\}$;
        takteller = takteller+1;
    fi
do

// invoer: samenhangende, ongerichte gewogen graaf $G = (V, E)$
// uitvoer: E_T, verzameling takken van minimale opspannende boom T van G

sorteer E op gewicht (in oplopende volgorde): $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$;
$E_T = \emptyset$;
takteller = 0;
k = 0;
while takteller $< |V| - 1$ **do**
    k = k+1;
    if $E_T \cup \{e_{i_k}\}$ is acyclisch **then**
        $E_T = E_T \cup \{e_{i_k}\}$;
        takteller = takteller+1;
    fi
do

Complexiteit. . .

// invoer: samenhangende, ongerichte gewogen graaf $G = (V, E)$
// uitvoer: E_T, verzameling takken van minimale opspannende boom T van G

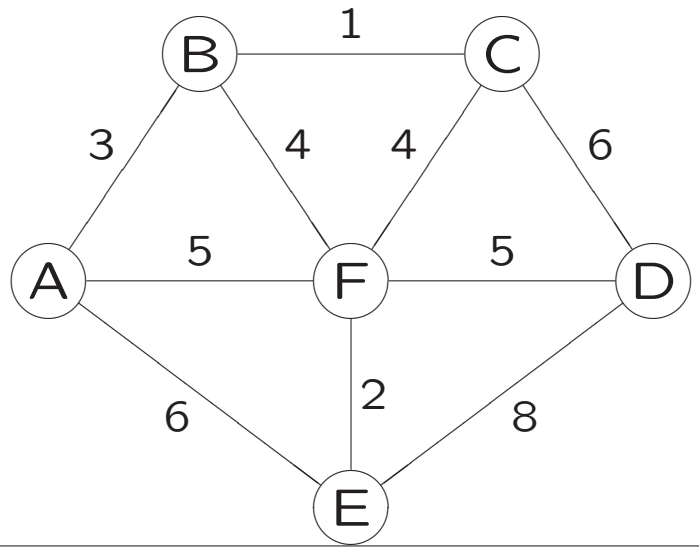
sorteer E op gewicht (in oplopende volgorde): $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$;
$E_T = \emptyset$;
takteller = 0;
k = 0;
while takteller $< |V| - 1$ **do**
    k = k+1;
    if $E_T \cup \{e_{i_k}\}$ is acyclisch **then**
        $E_T = E_T \cup \{e_{i_k}\}$;
        takteller = takteller+1;
    fi
do

Complexiteit (met herhaald DFS of BFS): $\Theta(m * \log m + 1 + m * n)$

Complexiteit Kruskal, m.b.v. **Union-Find**

Abstract data type van een collectie disjuncte deelverzamelingen van een eindige verzameling

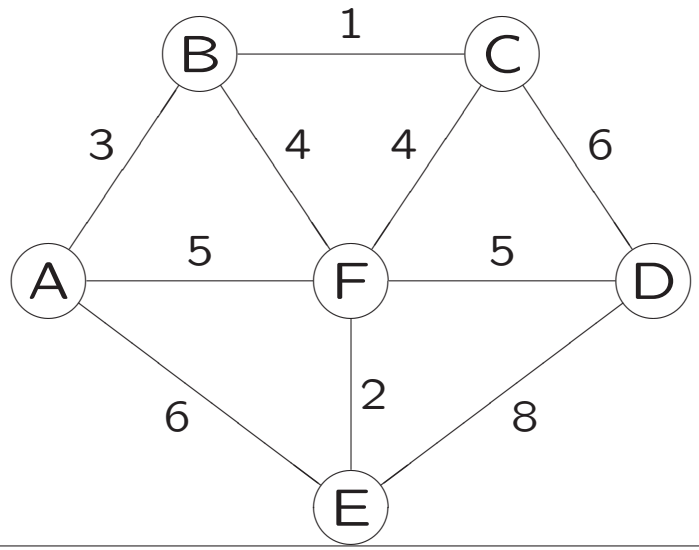
- makeset(x)
- find(x)
- union(x, y)



Twee implementaties Union-Find. . . (zie werkcollege 12)

Abstract data type van een collectie disjuncte deelverzamelingen van een eindige verzameling

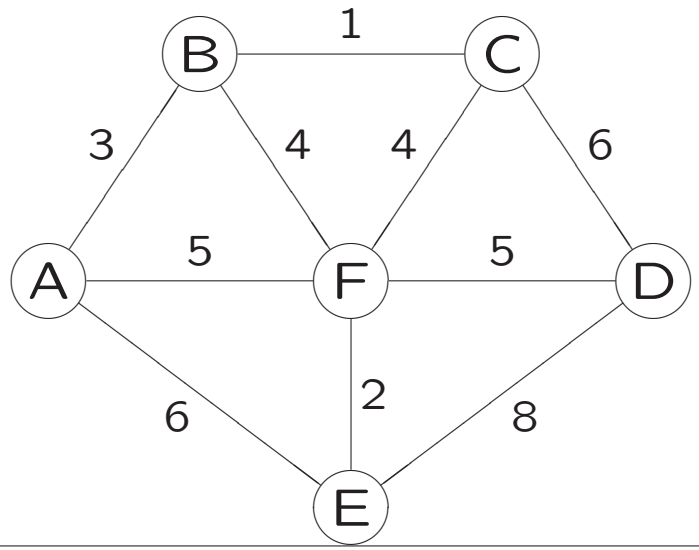
- makeset(x)
- find(x)
- union(x, y)



Complexiteit Kruskal, m.b.v. **Union-Find** (boomimplementatie)

Abstract data type van een collectie deelverzamelingen van een eindige verzameling

- makeset(x): $O(1)$
- find(x): $O(\log n)$
- union(x, y): $O(1)$, als . . .



// invoer: samenhangende, ongerichte gewogen graaf $G = (V, E)$
// uitvoer: E_T, verzameling takken van minimale opspannende boom T van G

sorteer E op gewicht (in oplopende volgorde): $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$;
$E_T = \emptyset$;
takteller = 0;
k = 0;
while takteller $< |V| - 1$ **do**
    k = k+1;
    if $E_T \cup \{e_{i_k}\}$ is acyclisch **then**
        $E_T = E_T \cup \{e_{i_k}\}$;
        takteller = takteller+1;
    fi
do

Complexiteit. . .

// invoer: samenhangende, ongerichte gewogen graaf $G = (V, E)$
// uitvoer: E_T, verzameling takken van minimale opspannende boom T van G

sorteer E op gewicht (in oplopende volgorde): $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$;
$E_T = \emptyset$;
takteller = 0;
k = 0;
while takteller $< |V| - 1$ **do**
    k = k+1;
    if $E_T \cup \{e_{i_k}\}$ is acyclisch **then**
        $E_T = E_T \cup \{e_{i_k}\}$;
        takteller = takteller+1;
    fi
do

Complexiteit: $O(m \log m + 1 + m \log n)$

Correctheid:

> Voor de eerste iteratie, en na elke iteratie van de while-lus is E_T nog bevat in (uit te breiden tot) een minimale opspannende boom.

Bewijs: . . .

- **Lezen/leren bij dit college:**
  paragraaf 9.1, 9.2 (inclusief implementatie van Union Find), 9.3, slides

- **Geen werkcollege** deze week

- **Vragenuur opdracht 2:**
  woensdag 6 mei, 13.00–15.00, Kaltura Live Room

- **Volgend (laatste!) hoorcollege:**
  6 mei 2020, 15.10–17.00, weblecture