Vierde college algoritmiek

25 februari 2020

Toestand-actie-ruimte

Brute Force

Voorbeeld 4: Kannenprobleem

We hebben twee kannen: een grote met een inhoud van 8 liter, en een kleine met een inhoud van 5 liter. Op de kannen staat geen maatverdeling. Verder hebben we de beschikking over een waterkraan en een afvoer. Bij aanvang zijn beide kannen leeg.

Vraag: Hoe krijgen we precies 4 liter water in een van de twee kannen? En liefst zo snel mogelijk.

Een Intermezzo

https://www.youtube.com/watch?v=5_MoNu9Mkm4

We onderscheiden toestanden en zinvolle (!) acties:

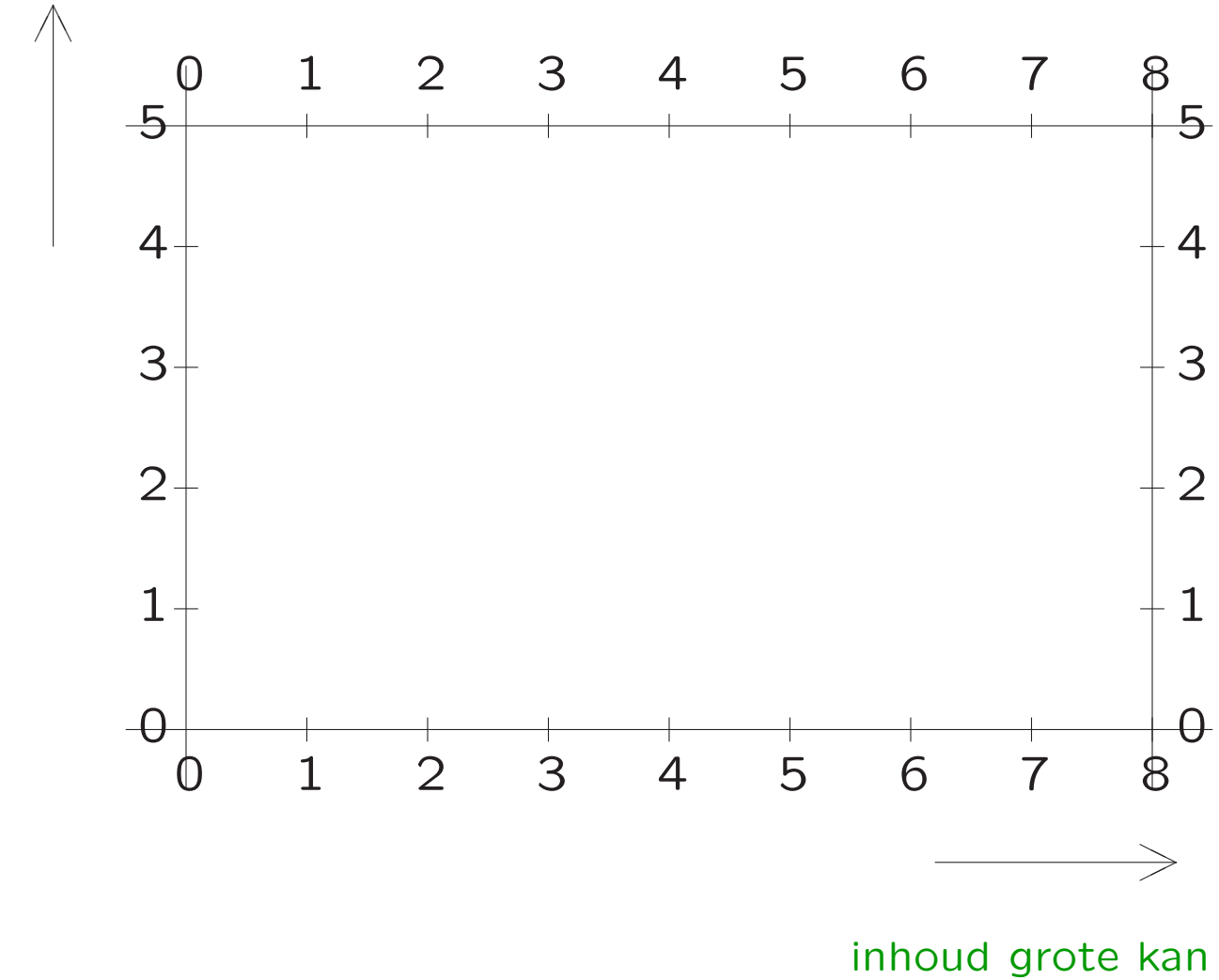
Toestand: Een paar (x, y) met $0 \leq x \leq 8$ en $0 \leq y \leq 5$. Hierin is x de inhoud van de grote kan en y de inhoud van de kleine kan.

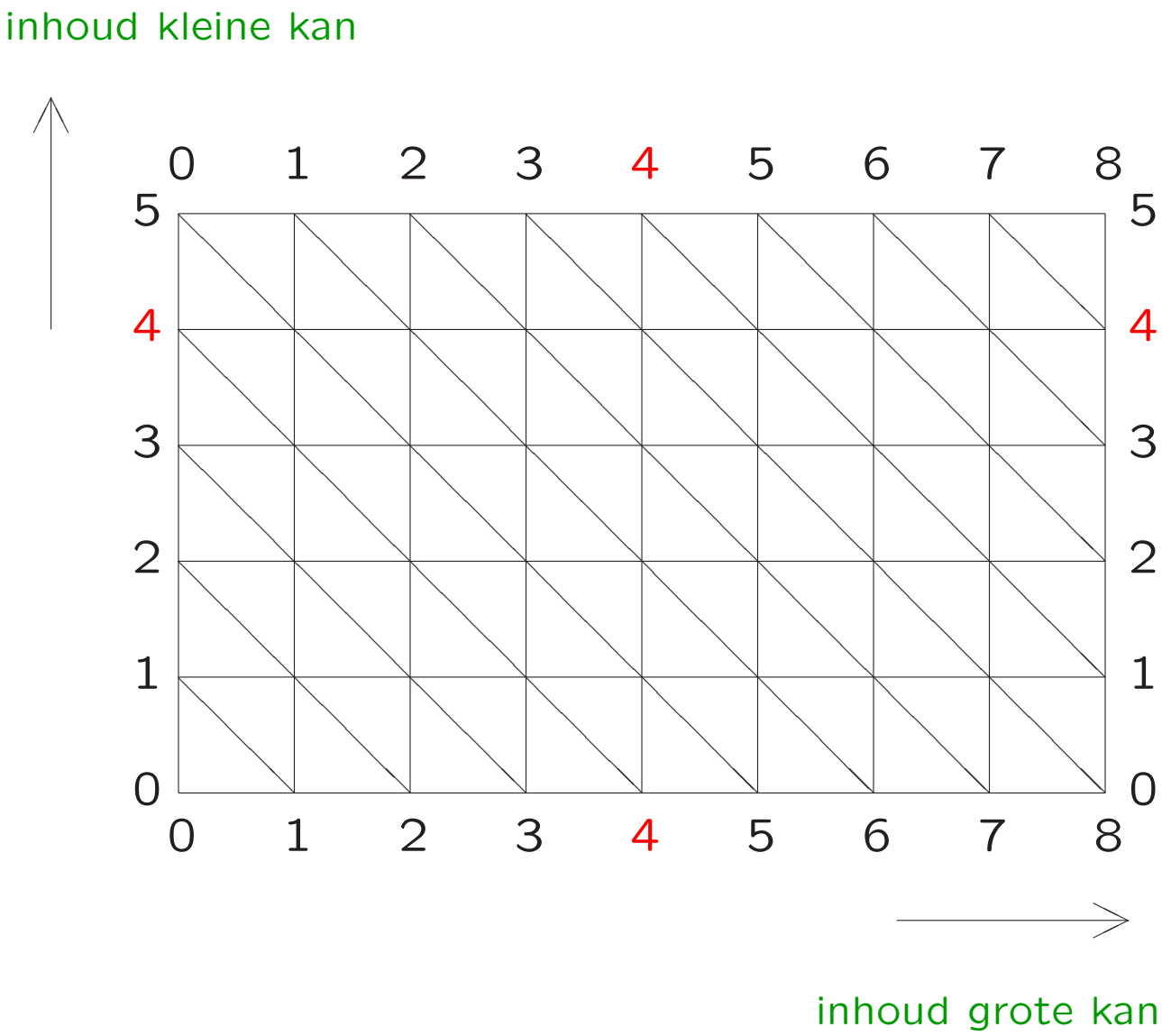
Begintoestand: beide kannen leeg, dus (0,0)

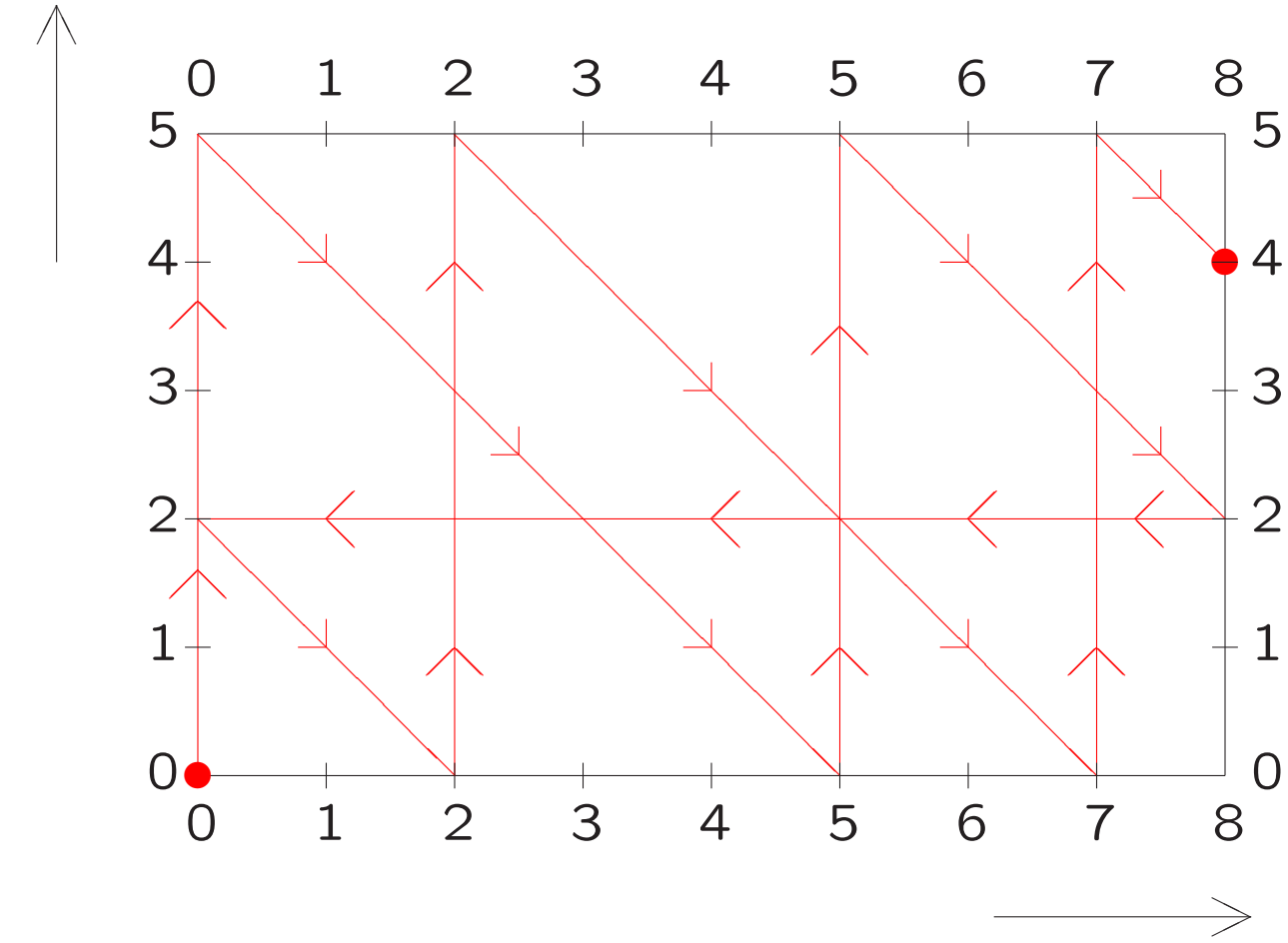
Eindtoestanden: alle toestanden met 4 liter in een van beide kannen, dus (4, y) en (x, 4)

Acties: vullen, legen en overgieten

- een kan geheel (aan)vullen
- een kan geheel leeggooien
- de ene kan leeggooien in de andere
- van de ene kan in de andere gieten totdat deze vol is


inhoud kleine kan
0 1 2 3 4 5 6 7 8
5
4
3
2
1
0
inhoud grote kan


inhoud kleine kan
0 1 2 3 4 5 6 7 8
5
4
3
2
1
0
inhoud grote kan


inhoud kleine kan
0 1 2 3 4 5 6 7 8
5
4
3
2
1
0
inhoud grote kan

De snelste oplossing gebruikt de volgende strategie en zorgt voor 4 liter in de kleine kan. Er is overigens ook een (iets) langere oplossing, die 4 liter in de grote kan achterlaat.

```
Herhaal
    Herhaal
        Vul de kleine kan;
        Giet over in de grote kan;
    totdat (de grote kan vol is) of (oplossing gevonden)

    Als nog geen oplossing gevonden
        Grote kan leeggooien;
        Giet uit de kleine kan over in de grote kan;
totdat oplossing gevonden
```

Wanneer oplossing mogelijk?

Bomberman

Exhaustive Search

Graafwandelingen

- Bij veel (graaf)problemen is het nodig om alle knopen van de graaf op een systematische manier te bezoeken

- **Graafwandelingen:**

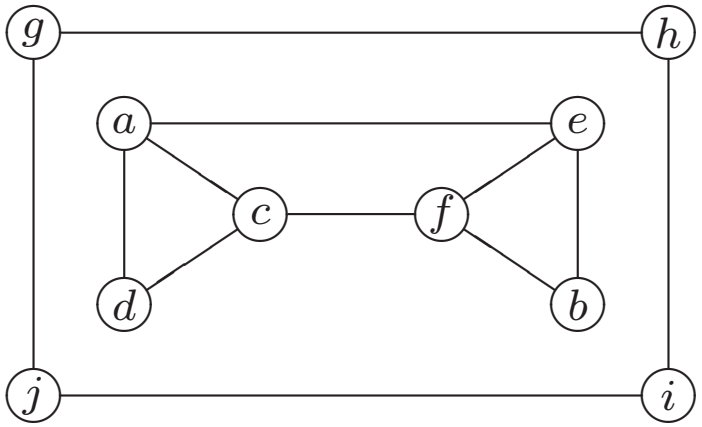
  1. Depth-first-search: te vergelijken met WLR-wandeling bij bomen

  2. Breadth-first-search: te vergelijken met nivo-orde wandeling bij bomen

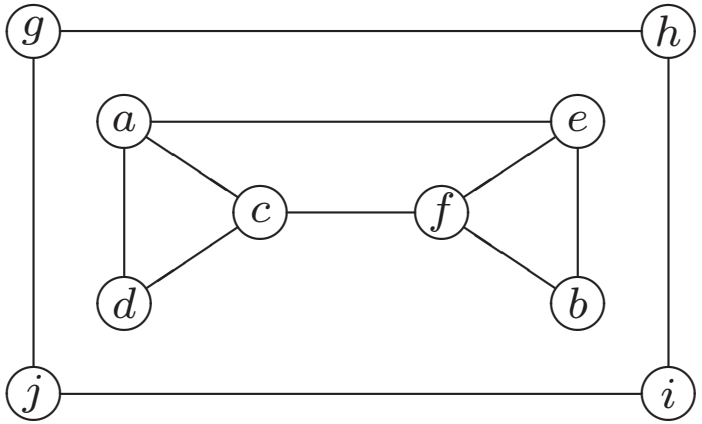
Depth-first-search

- De wandeling begint in een gegeven knoop v van de graaf.
- Vanuit een zojuist bezochte knoop wordt vervolgens steeds een aangrenzende -nog onbezochte- knoop bezocht, en vandaaruit op dezelfde manier verder gelopen tot je niet verder kan.
- In dat geval wordt teruggegaan naar de knoop waar je net vandaan kwam, en wordt een andere aangrenzende knoop daarvan bezocht, en zo verder tot je weer bij v terug bent.
- Aangrenzende knopen kunnen bijvoorbeeld altijd in alfabetische volgorde bezocht worden.
- Een knoop wordt steeds als reeds bezocht gemarkeerd op het moment dat deze voor de eerste keer bekeken wordt.
- Alle knopen die vanuit v bereikbaar zijn worden zo precies één keer bezocht. Voor niet-samenhangende grafen moet bovenstaande telkens herhaald worden vanuit een resterende, nog niet bezochte knoop.
- Depth-first-search kan recursief of met behulp van een stapel worden geïmplementeerd.

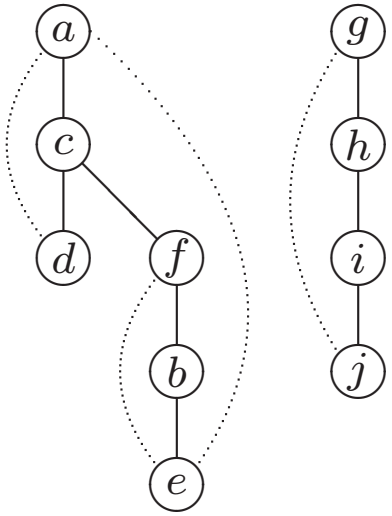
Depth-First Search



Depth-First Search



	$e_{6,2}$	
	$b_{5,3}$	$j_{10,7}$
$d_{3,1}$	$f_{4,4}$	$i_{9,8}$
$c_{2,5}$		$h_{8,9}$
$a_{1,6}$		$g_{7,10}$

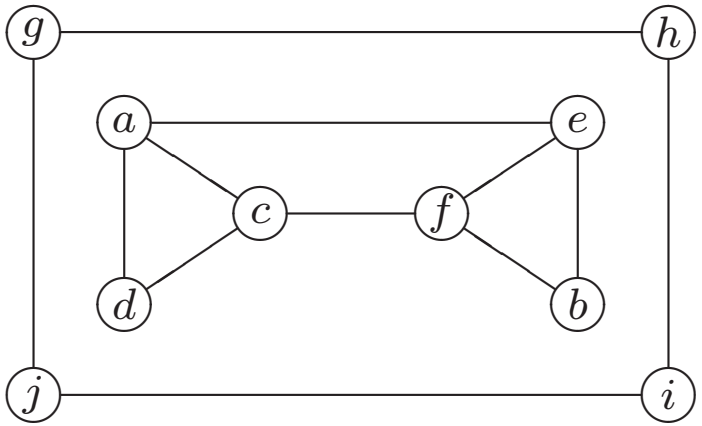


```
ALGORITME DFS (G)
    // Implementeert DFS wandeling door gegeven graaf
    // Invoer: Graaf G = (V,E)
    // Uitvoer: Graaf G met zijn knopen genummerd in de volgorde
    //          waarin ze bij DFS wandeling voor het eerst worden ontdekt

{
    for  elke knoop v in V  do
        mark[v] = 0;   // nog niet bezocht
    od
    teller = 0;
    for  elke knoop v in V  do
        if  mark[v] == 0  then
            dfs (v);
        fi
    od
}
```

```
dfs (v)
    // Bezoekt recursief alle nog onbezochte knopen die via een pad
    // met v zijn verbonden, en nummert deze in de volgorde waarin
    // ze worden ontdekt, met globale variabele 'teller'

{
    teller ++;
    mark[v] = teller;
    for  elke buurknoop w van v  do
        if  mark[w] == 0  then
            dfs (w);
        fi
    od
}
```

Er is ook niet-recursieve implementatie, met expliciete stapel

Complexiteit Depth-First Search



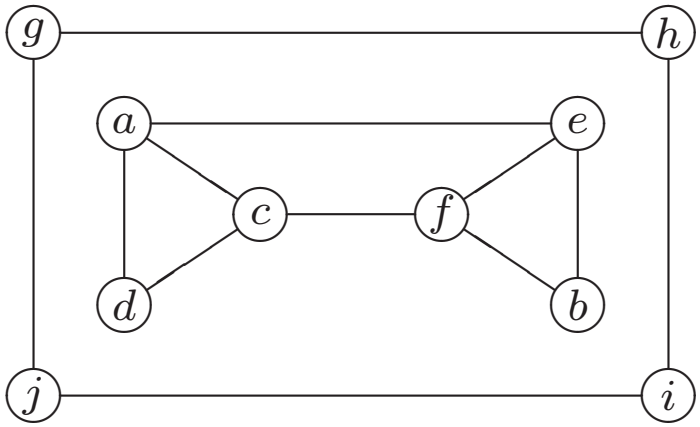
Met adjacency matrix

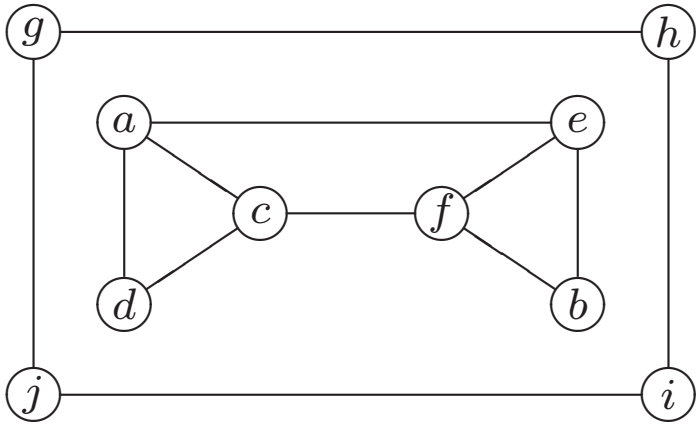
Met adjacency list

Breadth-first-search

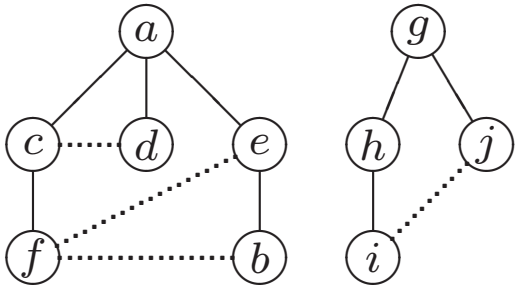
- De wandeling begint in een gegeven knoop v van de graaf.
- Vanuit een zojuist bezochte knoop worden eerst alle aangrenzende -nog onbezochte- knopen bezocht, dan de daaraan grenzende knopen (voor zover nog niet eerder bezocht), en zo verder totdat alle bereikbare knopen bezocht zijn.
- Knopen worden zo bezocht in volgorde van hun afstand vanaf v.
- Aangrenzende knopen kunnen bijvoorbeeld altijd in alfabetische volgorde bezocht worden.
- Bij de implementatie gebruiken we een rij. In de eerste stap wordt v gemarkeerd als bezocht en in de rij gezet. In elke volgende stap wordt de voorste knoop uit de rij gehaald, en worden diens buren gemarkeerd als bezocht en in de rij geplaatst.
- Alle knopen die vanuit v bereikbaar zijn worden zo precies één keer bezocht. Voor niet-samenhangende grafen moet bovenstaande telkens herhaald worden vanuit een resterende, nog niet bezochte knoop.

Breadth-First Search





a_1 c_2 d_3 e_4 f_5 b_6
g_7 h_8 j_9 i_{10}

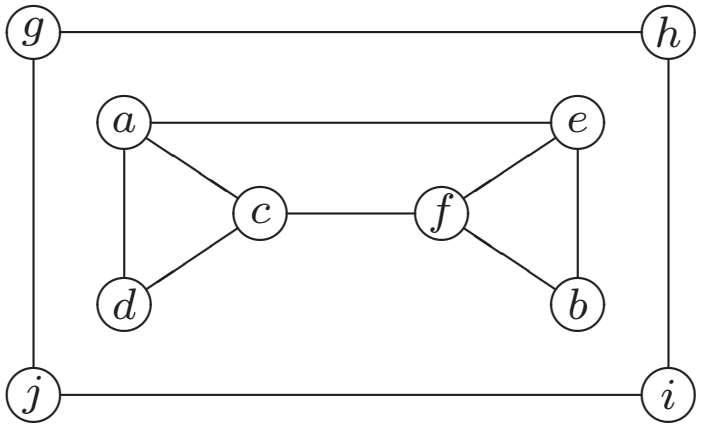


```
ALGORITME BFS (G)
    // Implementeert BFS wandeling door gegeven graaf
    // Invoer: Graaf G = (V,E)
    // Uitvoer: Graaf G met zijn knopen genummerd in de volgorde
    //          waarin ze bij BFS wandeling worden bezocht

{
    for  elke knoop v in V  do
        mark[v] = 0;   // nog niet bezocht
    od
    teller = 0;
    for  elke knoop v in V  do
        if  mark[v] == 0  then
            bfs (v);
        fi
    od
}
```

Pseudo-code BFS (vervolg)

```
bfs (v)
    // Bezoekt alle nog onbezochte knopen die via een pad
    // met v zijn verbonden, en nummert deze in de volgorde waarin
    // ze worden bezocht, met globale variabele 'teller'
{
    teller ++;
    mark[v] = teller;
    initialiseer queue met v erin;
    while  queue is niet leeg  do
        for  elke buurknoop w van voorste-knoop-in-queue  do
            if  mark[w] == 0  then
                teller ++;
                mark[w] = teller;
                voeg w toe aan queue;  // achteraan
            fi
        od
        verwijder voorste knoop uit queue;
    od
}
```

Complexiteit Breadth-First Search

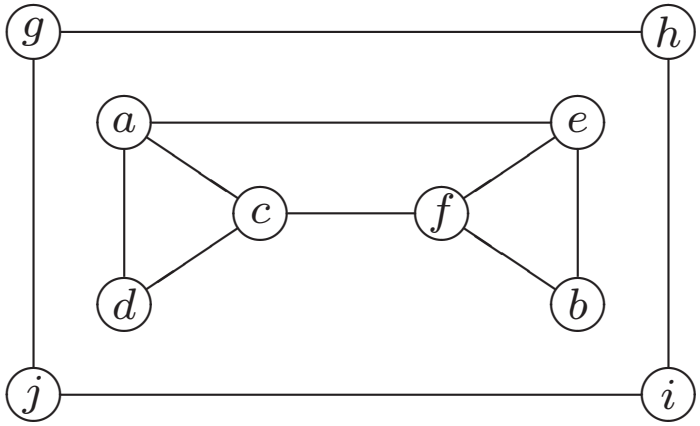


Met adjacency matrix

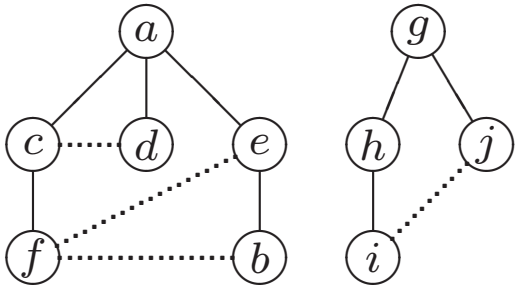
Met adjacency list

DFS vs BFS

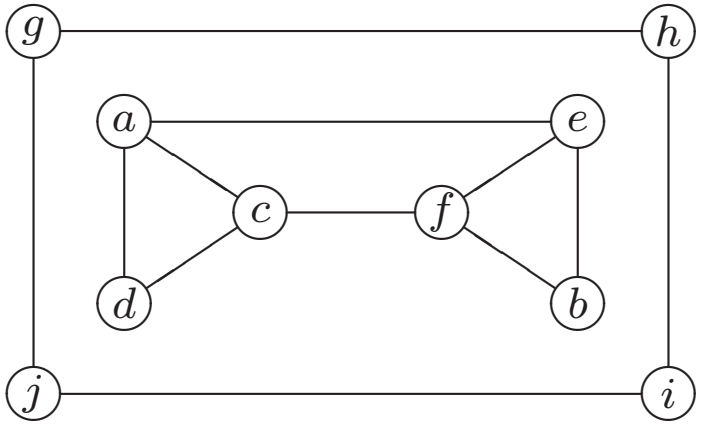
	DFS	**BFS**
Data structuur	een stapel	een queue
Aantal volgordes knopen	twee volgordes	één volgorde
Soorten takken (onger. grf)	tree en back edges	tree en cross edges
Toepassingen	samenhang, acycliciteit, 'articulation points'	samenhang acycliciteit minimum-tak pad
Complexiteit voor adj. matrix	$\Theta(\|V\|^2)$	$\Theta(\|V\|^2)$
Complexiteit voor adj. list	$\Theta(\|V\| + \|E\|)$	$\Theta(\|V\| + \|E\|)$



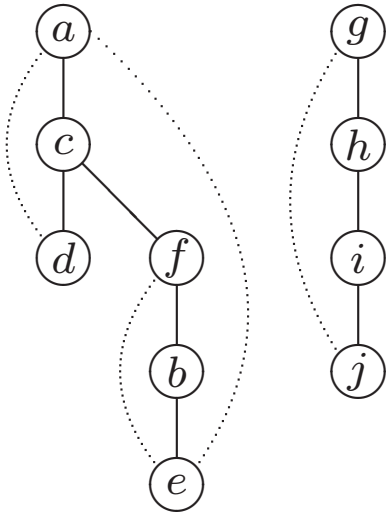
a_1 c_2 d_3 e_4 f_5 b_6
g_7 h_8 j_9 i_{10}

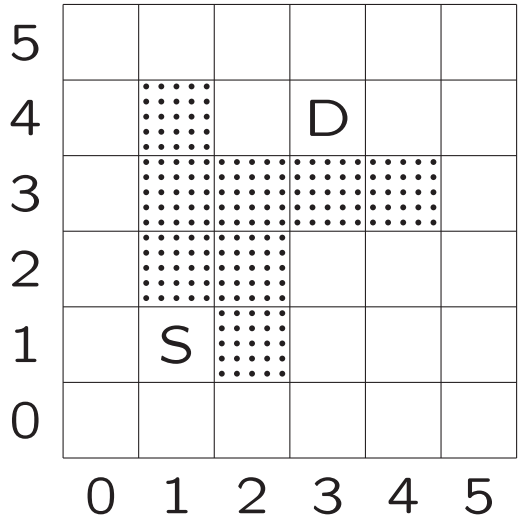


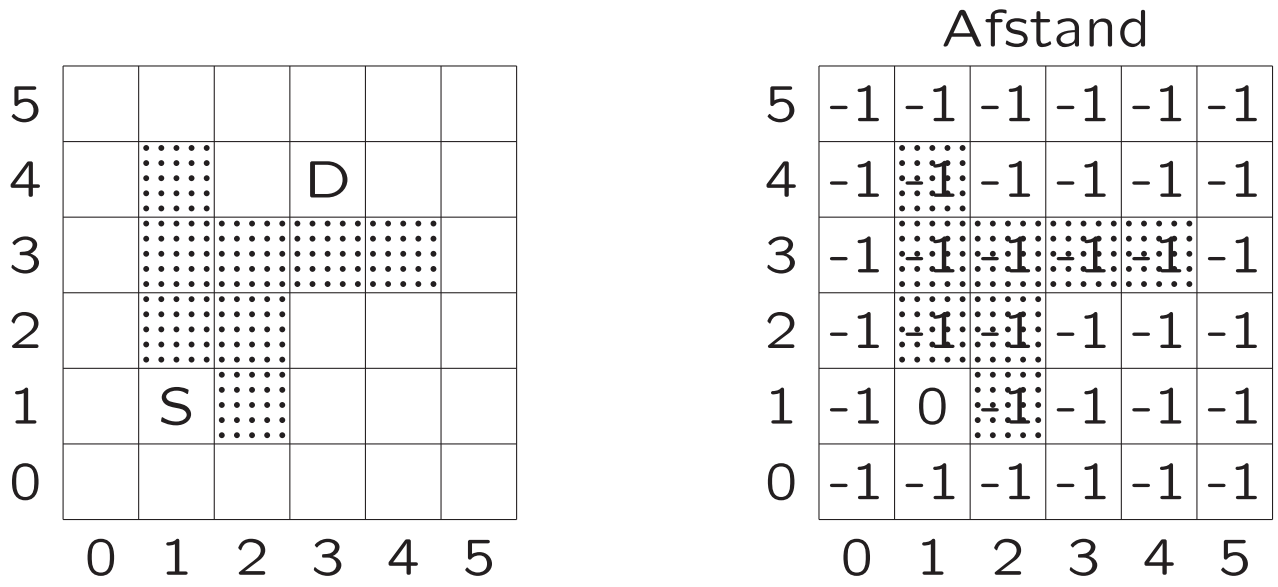
Depth-First Search



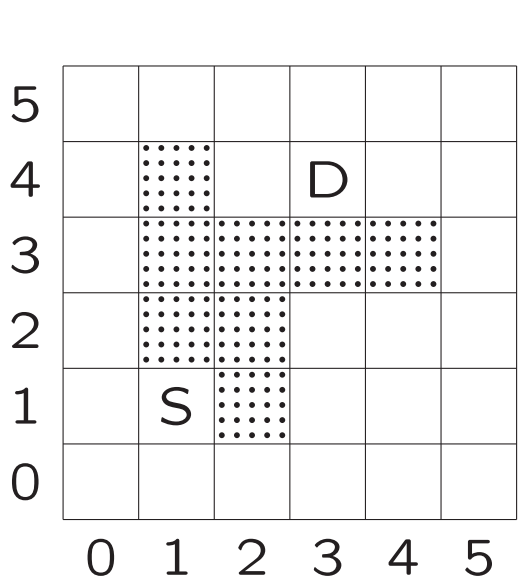
	$e_{6,2}$	
	$b_{5,3}$	$j_{10,7}$
$d_{3,1}$	$f_{4,4}$	$i_{9,8}$
$c_{2,5}$		$h_{8,9}$
$a_{1,6}$		$g_{7,10}$




5
4
3
2
1
0
D
S
0 1 2 3 4 5


Afstand
5
4
3
2
1
0
S
D
0 1 2 3 4 5
-1 -1 -1 -1 -1 -1
-1 1 -1 -1 -1 -1
-1 1 1 1 1 -1
-1 1 1 -1 -1 -1
-1 0 1 -1 -1 -1
-1 -1 -1 -1 -1 -1

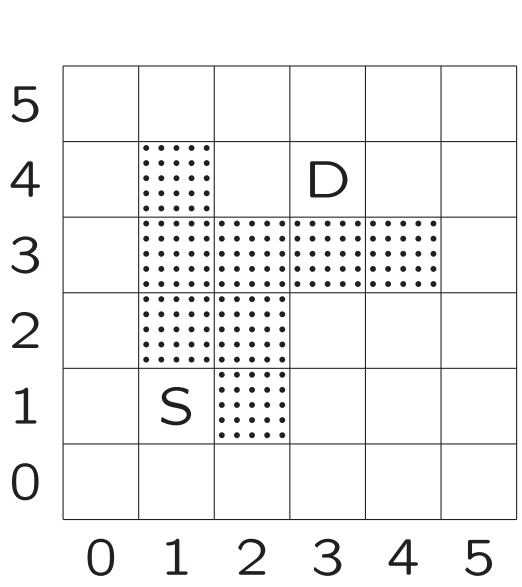
Queue: $(1, 1)$



Afstand

5	-1	-1	-1	-1	-1	-1
4	-1		-1	-1	-1	-1
3	-1					-1
2	1			-1	-1	-1
1	1	0		-1	-1	-1
0	1	1	1	-1	-1	-1
	0	1	2	3	4	5

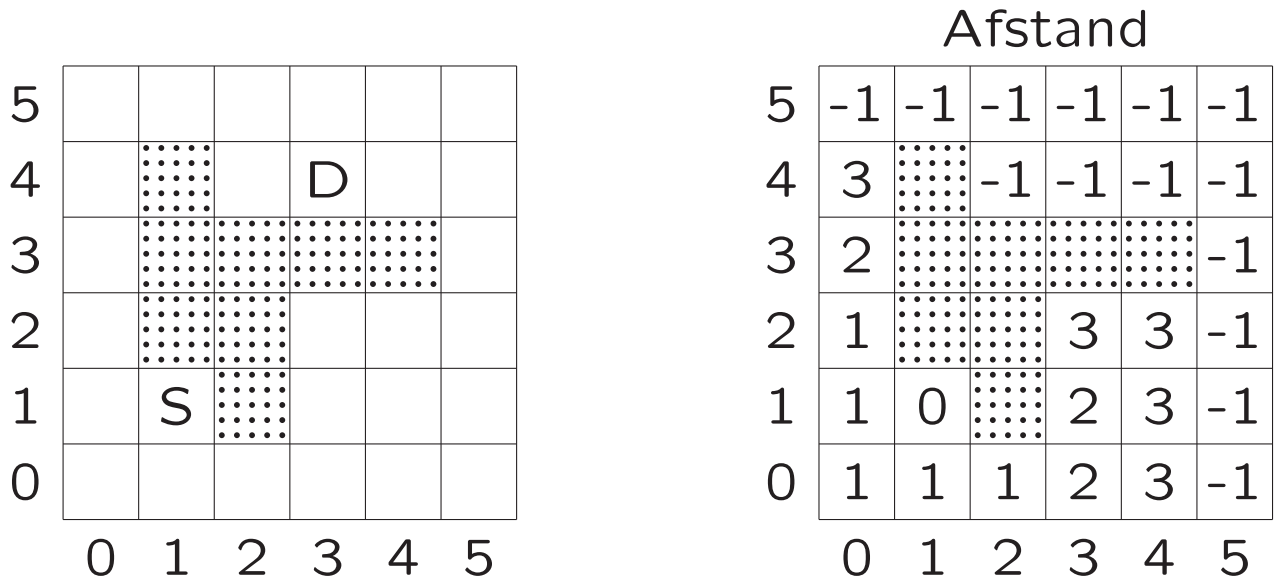
Queue: $(0,2),(0,1),(0,0),(1,0),(2,0)$



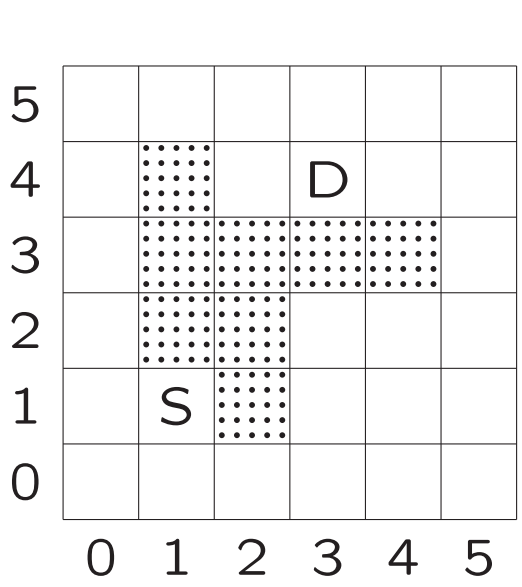
Afstand

5	-1	-1	-1	-1	-1	-1
4	-1		-1	-1	-1	-1
3	2					-1
2	1			-1	-1	-1
1	1	0		2	-1	-1
0	1	1	1	2	-1	-1
	0	1	2	3	4	5

Queue: $(0,3),(3,0),(3,1)$



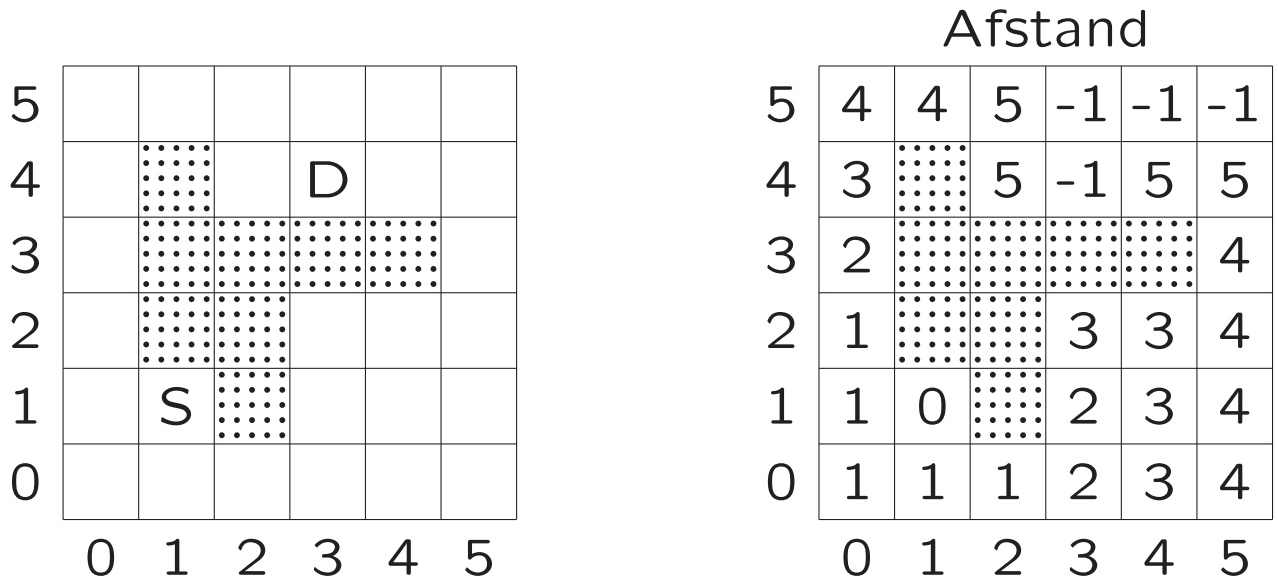
Queue: $(0,4),(4,0),(4,1),(4,2),(3,2)$



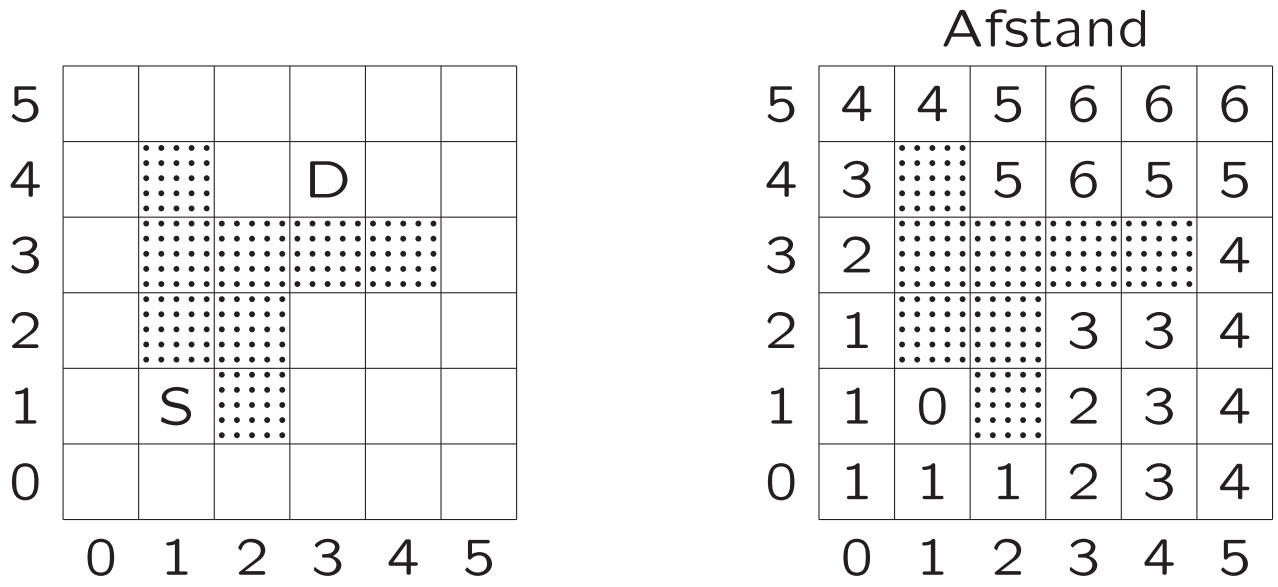
Afstand

5	4	4	-1	-1	-1	-1
4	3		-1	-1	-1	-1
3	2					4
2	1			3	3	4
1	1	0		2	3	4
0	1	1	1	2	3	4
	0	1	2	3	4	5

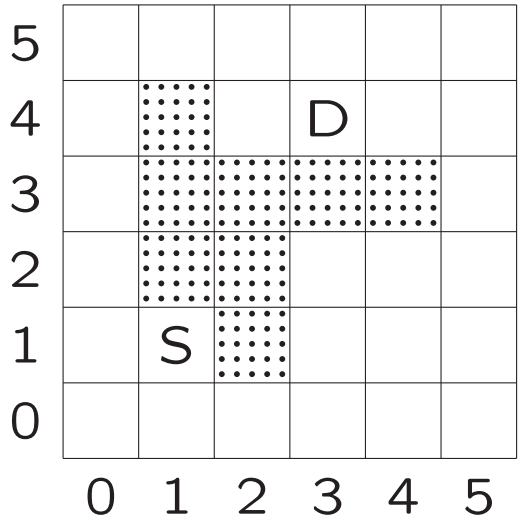
Queue: $(1,5),(0,5),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3)$



Queue: $(2,4),(2,5),(5,4),(4,4)$



Queue: $(3,4),(3,5),(4,5),(5,5)$



Afstand

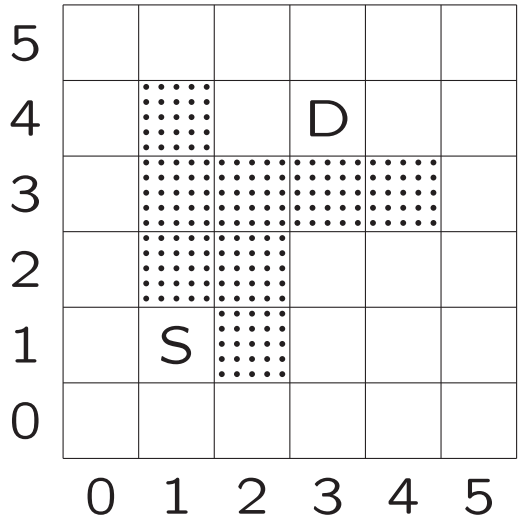
5	4	4	5	6	6	6
4	3		5	6	5	5
3	2					4
2	1			3	3	4
1	1	0		2	3	4
0	1	1	1	2	3	4
	0	1	2	3	4	5

Queue: $(3,4),(3,5),(4,5),(5,5)$

Floodfill

Stop zodra D bereikt is

Bepaal route(s) door . . .



Afstand

5	4	4	5	6	6	6
4	3		5	6	5	5
3	2					4
2	1			3	3	4
1	1	0		2	3	4
0	1	1	1	2	3	4
	0	1	2	3	4	5

Queue: $(3,4),(3,5),(4,5),(5,5)$

Floodfill

Stop zodra D bereikt is

Bepaal route(s) door terug te lopen vanaf D

Bomberman

Brute Force

Brute force: a straightforward approach, usually directly based on the problem statement and definitions.

Ofwel: los een probleem op via de meest voor de hand liggende (recht-toe-recht-aan) methode, meestal door eenvoudigweg de definitie van een oplossing te gebruiken. Vaak ook: alle mogelijkheden proberen.

Voorbeeld 1: vind de grootste gemene deler van twee getallen m en n door van alle mogelijke integers ≥ 2 (en $\leq \min(m, n)$) te proberen of ze zowel m als n delen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 2: los de DONALD + GERALD = ROBERT puzzel op door alle 9! (er was al gegeven dat D = 5) mogelijke antwoorden te proberen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 3: zoek een gegeven X in een array van n stuks door er van links naar rechts doorheen te lopen en X met alle n te vergelijken.

Zoek herhaald de kleinste en zet die op de juiste positie in het array.

```
for i := 0 to n − 2 do
    min := i;
    for j := i + 1 to n − 1 do
        if A[j] < A[min] then
            min := j;
        fi
    od
    wissel(A[i], A[min]);
od
```

Aantal vergelijkingen: $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Probleem: bereken de waarde van het polynoom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in het punt $x = x_0$ (Levitin, opgave 3.1.4)

Brute force algoritme (uit de definitie):

```
p := 0;
for i := n downto 0 do
    macht := 1;
    for j := 1 to i do
        macht := macht * x; // bereken x^i
    od
    p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Efficiëntie (aantal $*/+$): $\Theta(n^2)$

Slimmer: we kunnen de efficiëntie eenvoudig flink verbeteren door van rechts naar links te evalueren en de x^i handiger te berekenen:

```
p := a[0];
macht := 1;
for i := 1 to n do
    macht := macht * x;
    p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Efficiëntie: $\Theta(n)$;
Preciezer: $\#(*) = 2n$; $\#(+) = n$

Dit kan nog beter (methode van Horner), echter niet in orde van grootte.

- **Lezen/leren bij dit college:**
  slides
  Paragraaf 3.5

- **Practicumbijeenkomst** programmeeropdracht 1:
  vanmiddag, 14.15–16.00,
  Snellius, computerzalen 302-304, 303, 306-308, 307, 309

- **Volgend college:**
  3 maart 2020, 11.15–13.00, Havingazaal