Zevende college Algoritmiek

16 maart 2026

Backtracking

- dinsdag 17 maart: werkcollege

- Programmeeropdracht 1
  - deadline: 20 april 2026, 23.59 uur
  - woensdag 18 maart: practicumbijeenkomst
  - backtracking. . .

Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

```
void zetdames (int n) {          // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0;   // zet eerste dame klaar
    while (          ) {
        stand[rij]++;            // volgende kolom









    } // while
} // zetdames
```

Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

```
void zetdames (int n) {          // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0;   // zet eerste dame klaar
    while (          ) {
        stand[rij]++;            // volgende kolom
        while ( ( stand[rij] <= n ) && ( ! geenaanval( rij, stand ) ) )
            stand[rij]++;        // eerste de beste goede kolom









    } // while
} // zetdames
```

Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

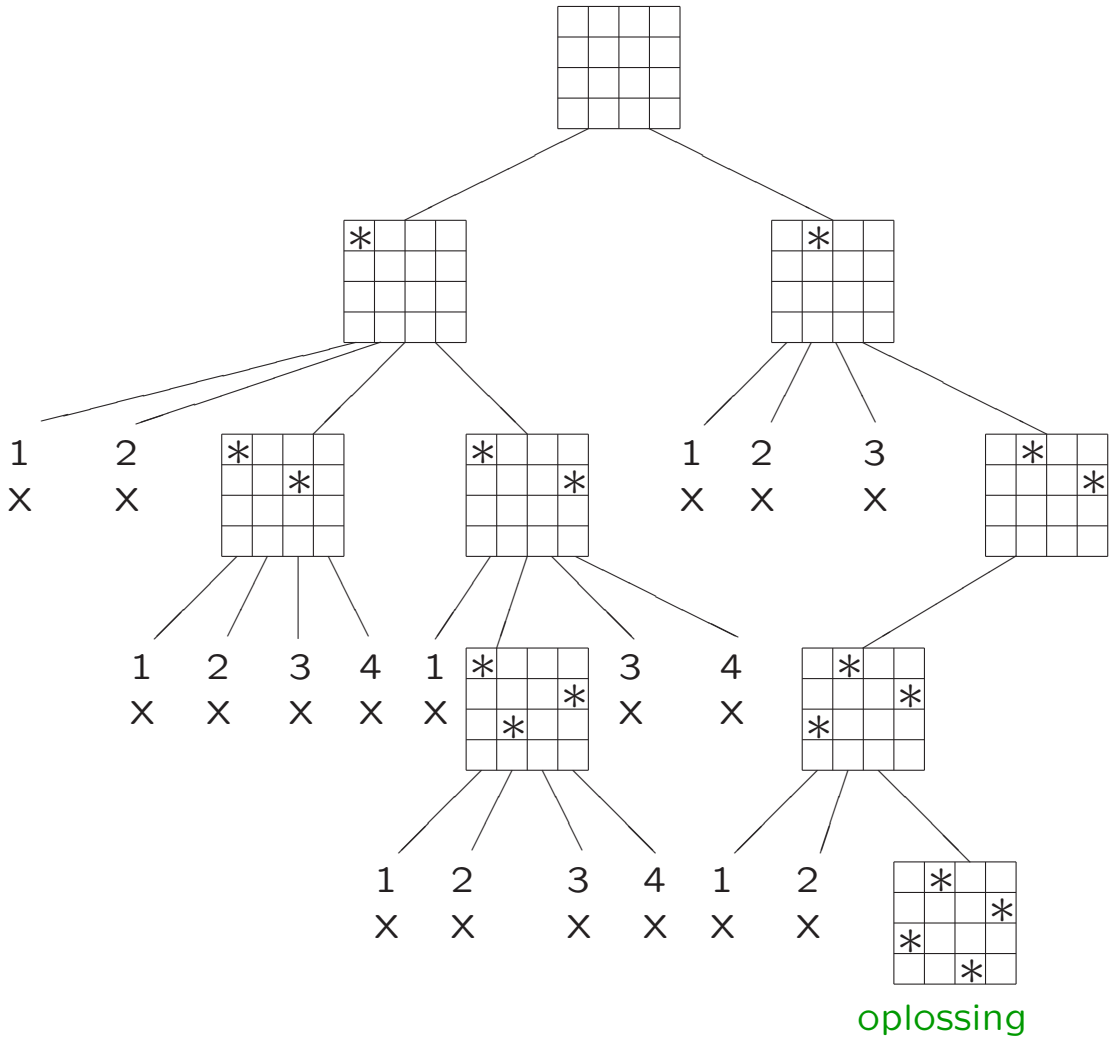
```
void zetdames (int n) {          // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0;   // zet eerste dame klaar
    while (          ) {
        stand[rij]++;            // volgende kolom
        while ( ( stand[rij] <= n ) && ( ! geenaanval( rij, stand ) ) )
            stand[rij]++;        // eerste de beste goede kolom
        if ( stand[rij] <= n )
            if ( rij == n )      // n-de dame gezet
                drukaf (n, stand);
            else {               // nog niet alle dames gezet
                rij++;
                stand[rij] = 0;
            }
        else         // alle kolommen van een rij geprobeerd

    } // while
} // zetdames
```

Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

```
void zetdames (int n) {          // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0;   // zet eerste dame klaar
    while ( rij > 0 ) {
        stand[rij]++;            // volgende kolom
        while ( ( stand[rij] <= n ) && ( ! geenaanval( rij, stand ) ) )
            stand[rij]++;        // eerste de beste goede kolom
        if ( stand[rij] <= n )
            if ( rij == n )      // n-de dame gezet
                drukaf (n, stand);
            else {               // nog niet alle dames gezet
                rij++;
                stand[rij] = 0;
            }
        else         // alle kolommen van een rij geprobeerd
            rij--;   // vorige dame herzien
    } // while
} // zetdames
```

State-space tree dames



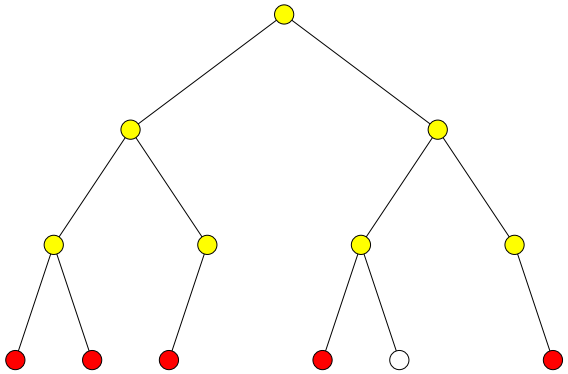
x: deeloplossing niet verder uitbreiden, keuze herzien

Om de werking van backtracking te *beschrijven* kunnen we een state-space *tree* (toestand-actie-*boom*) gebruiken.

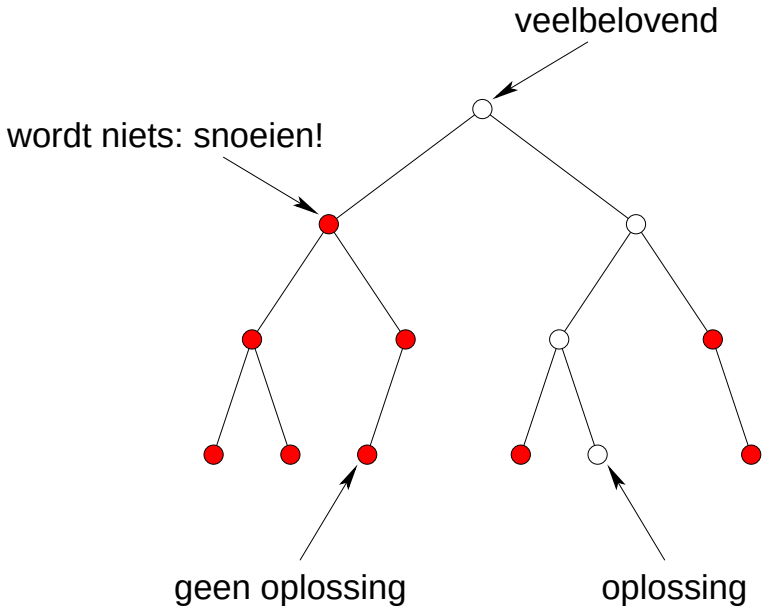
- speciaal soort toestandsruimte
- toestand (=knoop) $\Longleftrightarrow$ deeloplossing;
  actie (=tak) $\Longleftrightarrow$ keuze uitbreiding deeloplossing
- blad $\Longleftrightarrow$ (kandidaat)oplossing
- pad van wortel naar blad $\Longleftrightarrow$ stap-voor-stap-constructie van (kandidaat)oplossing

Exhaustive search (met stap-voor-stap-constructie van kandidaatoplossingen) doorloopt de hele boom en evalueert alle bladeren. Backtracking stopt met het doorlopen van een subboom bij een knoop als de betreffende knoop nooit tot een oplossing kan leiden (en backtrackt dan naar de ouder van die knoop om van daaruit verder te zoeken).

State-space tree -1-



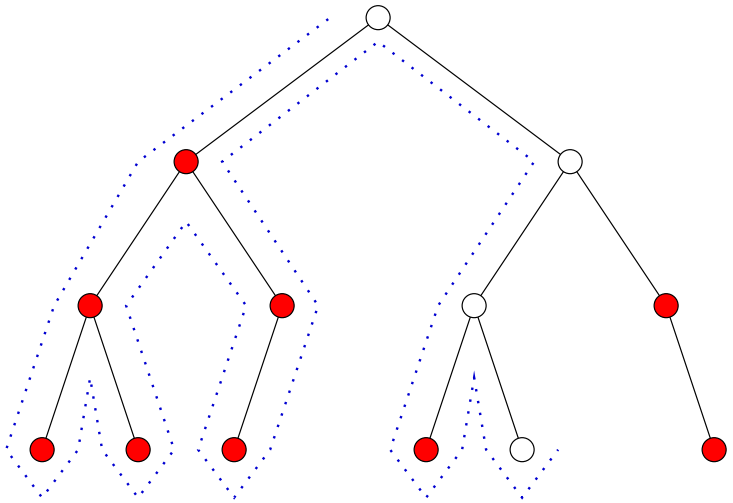
kandidaatoplossingen



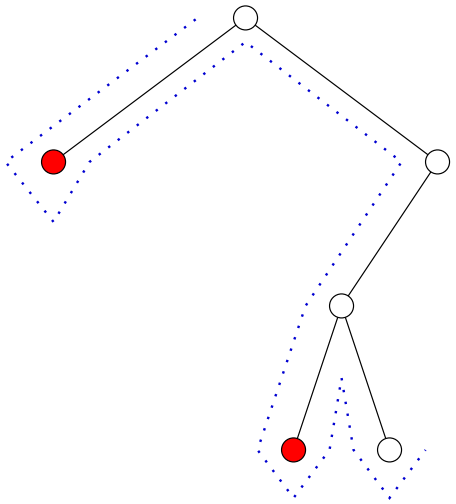
Exhaustive search: de hele boom wordt bekeken (tot een goede oplossing is gevonden)

Backtracking: hele subbomen kunnen soms worden gesnoeid

State-space tree -2-



Backtracking doorzoekt de state-space tree via depth first search.



Als het meezit wordt er flink gesnoeid.

De volledige toestandsruimte (state space) is superexponentieel:

- 1 begintoestand (leeg bord)
- . . . eindtoestanden (n dames geplaatst)(*)
- . . . tussengelegen toestanden (de eerste 'zoveel' dames geplaatst)(*)

(*) We bekijken alleen toestanden met hooguit één dame per rij en hooguit één per kolom.

De volledige toestandsruimte (state space) is superexponentieel:

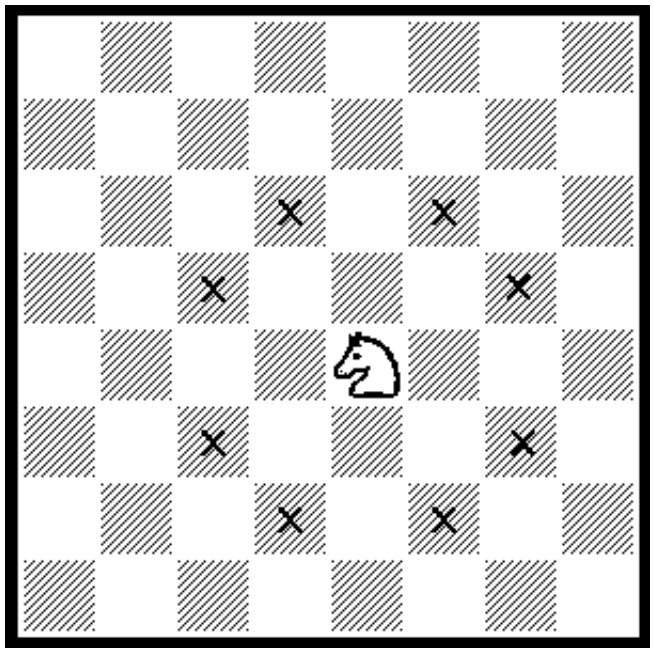
- 1 begintoestand (leeg bord)
- $n!$ eindtoestanden (n dames geplaatst)(*)
- $n + n * (n-1) + n * (n-1) * (n-2) + \ldots + n * (n-1) * \ldots * 2$ tussengelegen toestanden (de eerste 'zoveel' dames geplaatst)(*)

Backtracking zal voor grote probleeminstanties toch superexponentieel zijn.

(*) We bekijken alleen toestanden met hooguit één dame per rij en hooguit één per kolom.

Vraag:

Hoeveel verschillende series van $m * n - 1$ sprongen van het paard zijn er op een m bij n bord, zodat elk veld precies één keer bezocht wordt?



beweging van het paard

1	14	17	20	11	8	5
16	19	12	3	6	21	10
13	2	15	18	9	4	7

een oplossing op het 3 bij 7 bord

Genereer alle permutaties van 1 t/m n met backtracking.

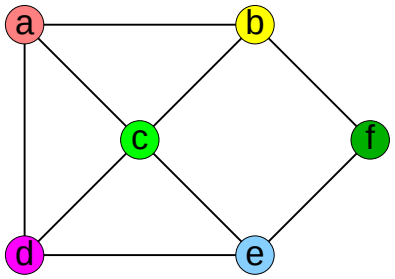
```
void permutaties( int n, int perm[ ], int index ) {
    int i;
    if ( index == n + 1 )
        drukaf( perm, n ); // permutatie gevonden
    else {
        for ( i = 1; i <= n; i++ ) {
            perm[index] = i;
            if ( ! aanwezig( perm, i, index ) )  // test of i
               // al in perm[1] t/m perm[index-1] voorkomt
               permutaties( n, perm, index + 1 );
        } // for
    } // else
} // permutaties
```

Vraag: wat heeft dit met torens op een schaakbord te maken?

Implementatie `aanwezig`. . .

Definitie: Een Hamiltonkring in een (ongerichte) graaf is een kring die elke knoop precies één keer aandoet.

Voorbeeld: a b f e c d a is een Hamiltonkring in nevenstaande graaf, echter a b c d e f a is geen Hamiltonkring.



Probleem: vind een Hamiltonkring in een gegeven ongerichte graaf.

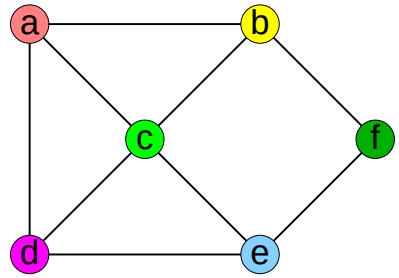
Exhaustive search: genereer alle $(n-1)!$ kandidaatoplossingen (permutaties van de knopen) en controleer daarna van elk of het een Hamiltonkring voorstelt.

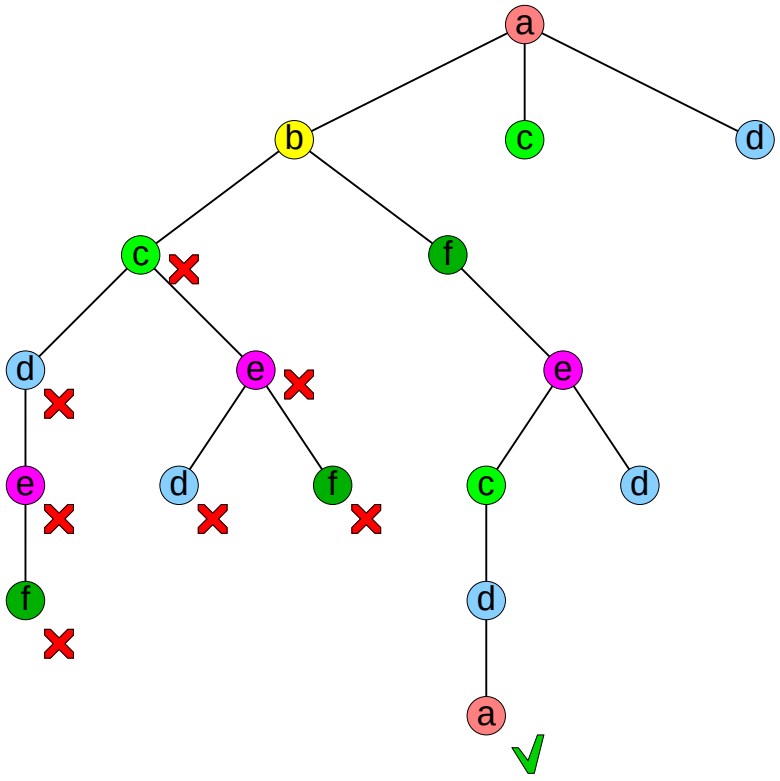
Backtracking: genereer de mogelijke Hamiltonkringen stap voor stap* en controleer tijdens de constructie al of de deeloplossing wel aan de restricties† voldoet.
Kies in elke uitbreidingsstap steeds de eerstvolgende **buurknoop** (in een of andere volgorde) en controleer hiervan of deze nog niet geweest is in het reeds geconstrueerde deelpad. Blijkt die keuze toch (hier of verderop in de constructie) op niets uit te lopen, kies dan de volgende buurknoop. Als er geen buurknopen meer zijn kan het deelpad blijkbaar niet meer uitgebreid worden en moet je je vorige keuze herzien.

*hier: tak voor tak of knoop voor knoop

†alle knopen verschillend; tak tussen opeenvolgende knopen

Een beschrijving van de werking van het backtracking-algoritme voor het vinden van een Hamiltonkring in de voorbeeldgraaf wordt gegeven door de volgende state space tree:



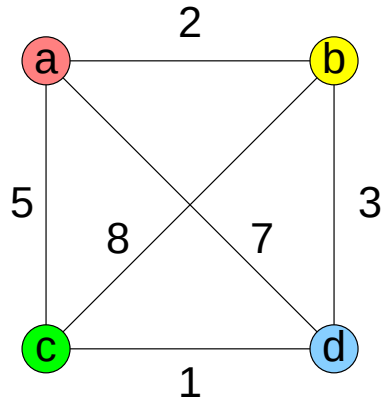


- breid het pad telkens met één knoop uit (hier: keuzes in alfabetische volgorde)
- uitbreidingen met knopen die al eerder voorkwamen in het pad zijn niet weergegeven
- in de knopen met een rood kruis backtrackt het algoritme zodra blijkt dat die niet tot een oplossing leiden

Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

Gegeven n steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn.
Gevraagd: de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.
Ofwel: vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (complete) graaf.

Voorbeeld:



minimale route:
a b d c (ofwel a b d c a)
(of a c d b (ofwel a c d b a))

Merk op: elke permutatie van de knopen is een Hamiltonkring, dus:

- genereer alle permutaties van de knopen (beginnend bij knoop a) **stap voor stap**, door deelpermutaties (= beginstuk Hamiltonkring) verstandig uit te breiden:

- houd de tot dusver gevonden minimale lengte `min` bij

- **controleer** of de lengte van de deelpermutatie kleiner is dan `min`

- zo ja, ga dan op **dezelfde** manier door met uitbreiden

- zo nee, dan heeft het geen zin om door te gaan*, dus **herzie je meest recente keuze**

*Ervanuitgaande dat de gewichten niet negatief zijn.

Basisidee backtracking

- bouw een oplossing stap voor stap op en controleer steeds of de deeloplossing in conflict komt met de restricties (en nog wel tot een oplossing kan leiden)

- op elk moment kun je kiezen uit een aantal mogelijke vervolgstappen; maak een keuze en ga langs die weg verder met het opbouwen van de oplossing

- als een keuze op niets uitloopt, herzie je deze keuze en probeer je een andere mogelijkheid

Vergelijk

- het vinden van de uitgang in een doolhof: loop steeds verder en als je bij het zoeken vastloopt, ga terug op je pad om het laatste open alternatief te proberen. Straks!

Backtracking versus exhaustive search

Exhaustive search bekijkt *alle* volledige kandidaatoplossingen.
Backtracking controleert telkens van deeloplossingen of ze nog aan de eisen/restricties voldoen; zo niet, dan weet je zeker dat alle uitbreidingen van deze oplossing ook niet voldoen, dus die hoef je dan niet meer expliciet te bekijken.

Voorbeeld
Gegeven de rij $A =$ `3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 7`.
Gevraagd: de/een langste *stijgende* deelrij (niet per se aaneengesloten), met volgorde der elementen als in A zelf.

Exhaustive search. Genereer alle 2^{10} deelrijtjes van A en controleer van elk daarvan of hij stijgend is en bepaal wat de langste deelrij is.

Backtracking. Bouw de deelrijtjes stap voor stap op (hoe?) en controleer na elke stap of het deelrijtje nog wel stijgend is. Zo niet, dan hoeft het rijtje niet meer uitgebreid te worden (het kan toch niets worden). Houd de lengte van het deelrijtje bij en vergelijk die met de lengte van de tot dusver gevonden langste deelrij.

Deze methode kan erg veel werk uitsparen. Bijvoorbeeld het deelrijtje `3, 1` is al niet stijgend, dus alle 2^8 deelrijtjes van A die met `3, 1` beginnen zeker ook niet. Deze hoeven bij backtracking dus niet allemaal te worden gegenereerd.

Probleem:
Gegeven een verzameling $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ van positieve (> 0) gehele getallen en een geheel getal d. Laat S oplopend gesorteerd zijn. Vind een deelverzameling (of alle deelverzamelingen) van S waarvan de som der getallen gelijk is aan d.

Voorbeelden:
$S = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ en $d = 9$. Er zijn twee oplossingen, namelijk $\{1, 2, 6\}$ en $\{1, 8\}$.
$S = \{3, 5, 6, 7\}$ en $d = 15$. Er is één oplossing: $\{3, 5, 7\}$.

Exhaustive search: genereer alle 2^n deelverzamelingen van S en controleer of hun som gelijk is aan d.

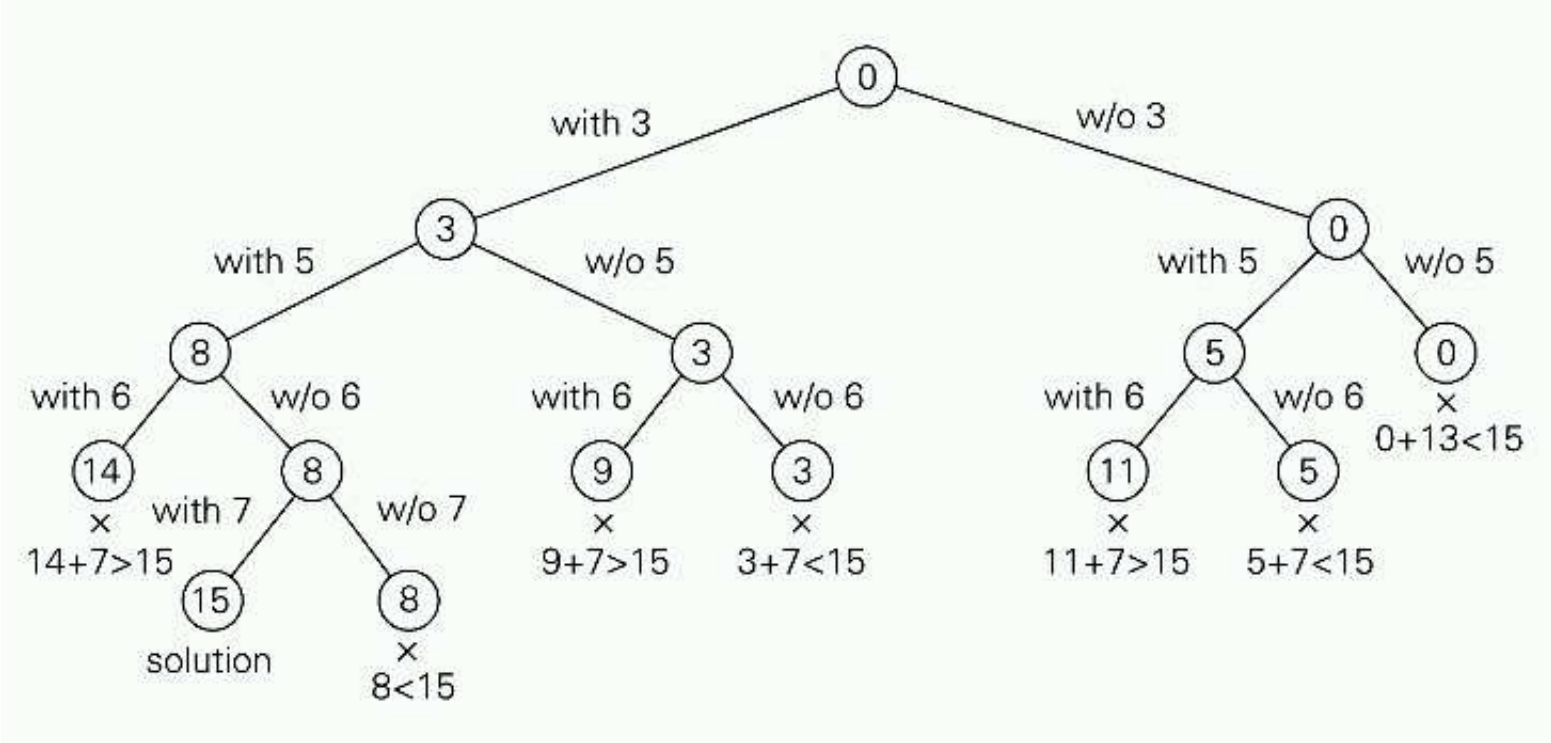
De stap-voor-stap constructie van deeloplossingen doen we (bijvoorbeeld) zo: gegeven een deeloplossing (= een veelbelovende deelverzameling van $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$), dan zijn er twee mogelijke vervolgstappen: óf s_{i+1} wordt toegevoegd, óf s_{i+1} wordt niet toegevoegd.

Backtracking bekijkt zo ook alle deelverzamelingen, maar hoeft ze niet allemaal volledig te genereren. Een (veelbelovende) deelverzameling van $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$ met som s' hoeft niet verder uitgebreid te worden als ...

De stap-voor-stap constructie van deeloplossingen doen we (bijvoorbeeld) zo: gegeven een deeloplossing (= een veelbelovende deelverzameling van $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$), dan zijn er twee mogelijke vervolgstappen: óf s_{i+1} wordt toegevoegd, óf s_{i+1} wordt niet toegevoegd.

Backtracking bekijkt zo ook alle deelverzamelingen, maar hoeft ze niet allemaal volledig te genereren. Een (veelbelovende) deelverzameling van $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$ met som s' hoeft niet verder uitgebreid te worden als $s' + s_{i+1} > d$ (*), of als $s' + \Sigma_{j=i+1}^{n} s_j < d$.

Opmerking:
Als (*) geldt levert elke uitbreiding, met welke s_j $(j \geq i+1)$ dan ook een te grote totaalsom op. Dus herzie je vorige keuze. Hier is gebruikt dat S oplopend gesorteerd is.



Volledige state-space tree bij toepassing van backtracking op probleeminstantie $S = \{3, 5, 6, 7\}$ en $d = 15$ (waarbij alle oplossingen gezocht worden). De knopen stellen deeloplossingen voor. Het getal in een knoop is de som van de s_j uit de corresponderende deelverzameling. De ongelijkheid onder een blad geeft aan waarom daar backtracking plaatsvindt.

Knapzakprobleem

Gegeven n objecten, met gewicht $w_1, \ldots, w_n$ en waarde $v_1, \ldots, v_n$, en een knapzak met capaciteit W.

Gevraagd: de meest waardevolle deelverzameling der objecten die in de knapzak past (dus met totaalgewicht $\leq W$).

Voorbeeld:

object	gewicht	waarde
1	8	42
2	3	14
3	4	40
4	5	27

knapzakcapaciteit 12

- genereer de deelverzamelingen **stap voor stap**, bijvoorbeeld door steeds aan een goede deelverzameling van de objecten 1 t/m i achtereenvolgens object $i+1$ of $i+2$ of $\cdots$ n toe te voegen (mogelijke **keuzes**)

- **controleer** of het totaalgewicht van de aldus uitgebreide verzameling nog steeds $\leq W$ is

- zo nee, **herzie** dan **je keuze** (en probeer het volgende object)

- zo ja, ga dan op **dezelfde** manier verder

- houd ook de totaalwaarde van de (deel)verzamelingen bij en de tot dusver gevonden maximale waarde

Gegeven een rechthoekig doolhof. Gevraagd wordt een pad van Start naar Eind, waarbij alleen horizontaal en verticaal gelopen mag worden.

```
XXXXXXXXXXXXX
X     X     X
X X X XXX XX
XXX X X     X
X   X   X XX
X XXXXXXX XX
X     X     X
XXXX X X X X
S  XXX X X X
XX     X X X
X  X X X X X
XXXXXXXXEXXX
```

```
XXXXXXXXXXXXX
X  ***X     X
X X*X*XXX XX
XXX*X*X***OX
X***X***X*XX
X*XXXXXXX*XX
X******X**OX
XXXXOX*X*XOX
S**XXX*X*XOX
XX*****X*XOX
X  X XOX*XOX
XXXXXXXXEXXX
```

```
bool dwaal(int x, int y) {
// is er een pad van (x,y) naar (x_eind,y_eind) ?
    int richting, x_volgende, y_volgende;
    if ( ( x == x_eind ) && ( y == y_eind ) ) { // gevonden!
        doolhof[x][y] = '*';
        return true;
    }
    else if ( doolhof[x][y] != ' ' )  // geen vrije plek
        return false;
    else {
        doolhof[x][y] = '?'; // tijdelijk markeren; voorkomt oneindig loopen
        for ( richting = OOST; richting <= NOORD; richting++ ) {
            x_volgende = volgende_x(x,richting);
            y_volgende = volgende_y(y,richting);
            if ( dwaal(x_volgende,y_volgende) ) {
                doolhof[x][y] = '*';
                return true;
            }
        }
        doolhof[x][y] = 'O'; // afgehandeld:
        return false;        // geen rechtstreeks pad via deze (x,y)
    }
}
```

Laten oplossingen van een bepaald probleem van de vorm $(X[1], X[2], \ldots, X[m])$ zijn en zij S_i de verzameling waarden die $X[i]$ kan aannemen. De algemene vorm van een backtracking algoritme is dan:

```
backtrack(X[1···i])::
// X[1···i] is een veelbelovende deeloplossing, consistent met
// de restricties; we zoeken alle oplossingen
if X[1···i] is een oplossing then
  print(X[1···i]);
else
  for elke x ∈ S_{i+1} consistent met X[1···i] en de restricties do
      X[i + 1] := x;
      backtrack(X[1···i + 1]);
  od
fi
```

Construeren van delervrije deelverzamelingen:
opgave 5(b) van hertentamen van 9 juli 2018

Divide and Conquer

1. Verdeel een instantie van het probleem in twee (of meer) kleinere instanties

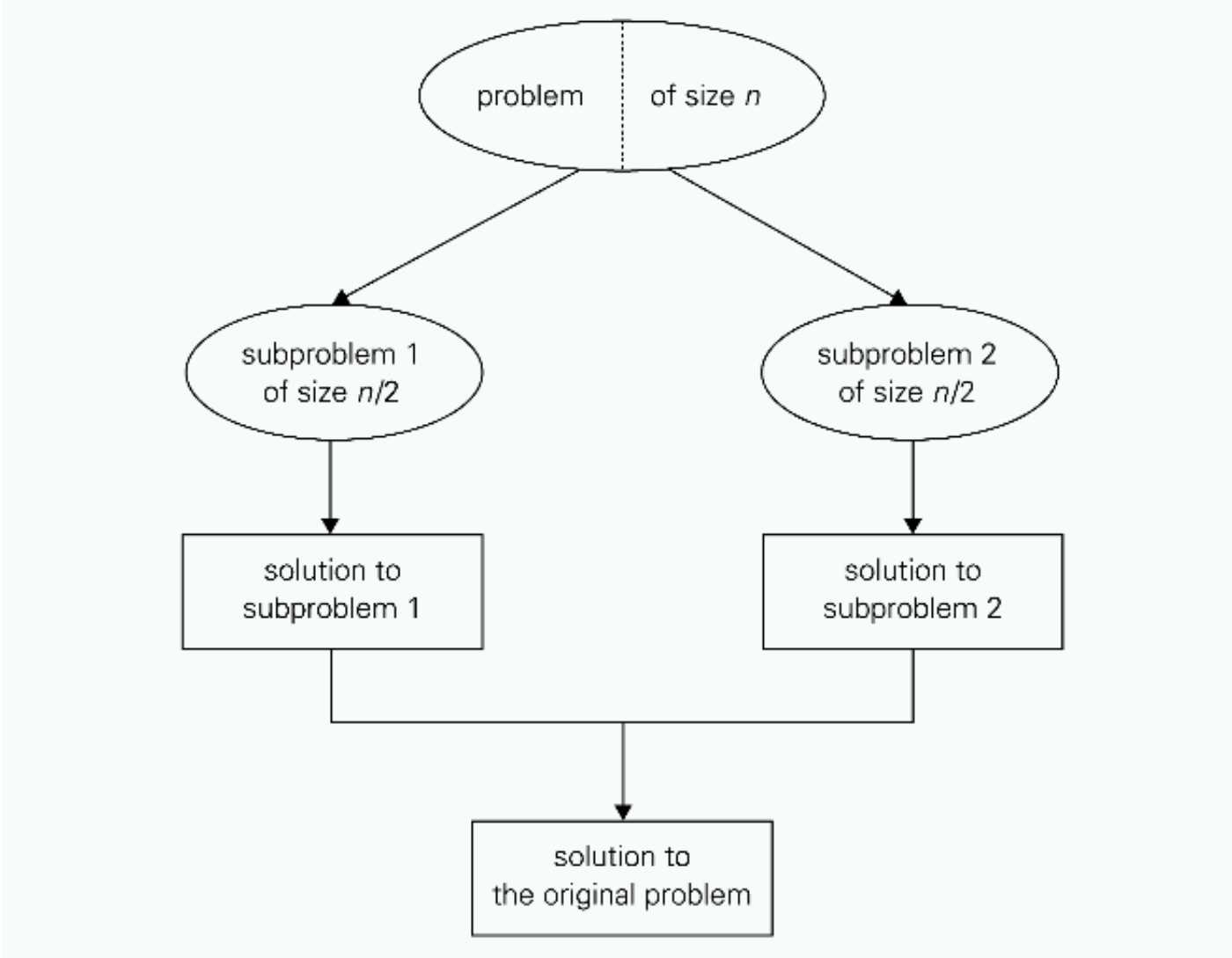
2. Los de kleinere instanties op: meestal recursief

3. Combineer deze twee (of meer) oplossingen tot een oplossing van de oorspronkelijke (grotere) instantie

Opmerking: meestal wordt een probleeminstantie in twee ongeveer gelijke delen verdeeld.

Verdeel en heers

(vaak: verdeel in twee gelijke delen)



Decrease and Conquer

1. Reduceer een instantie van het probleem tot een kleinere instantie van hetzelfde probleem

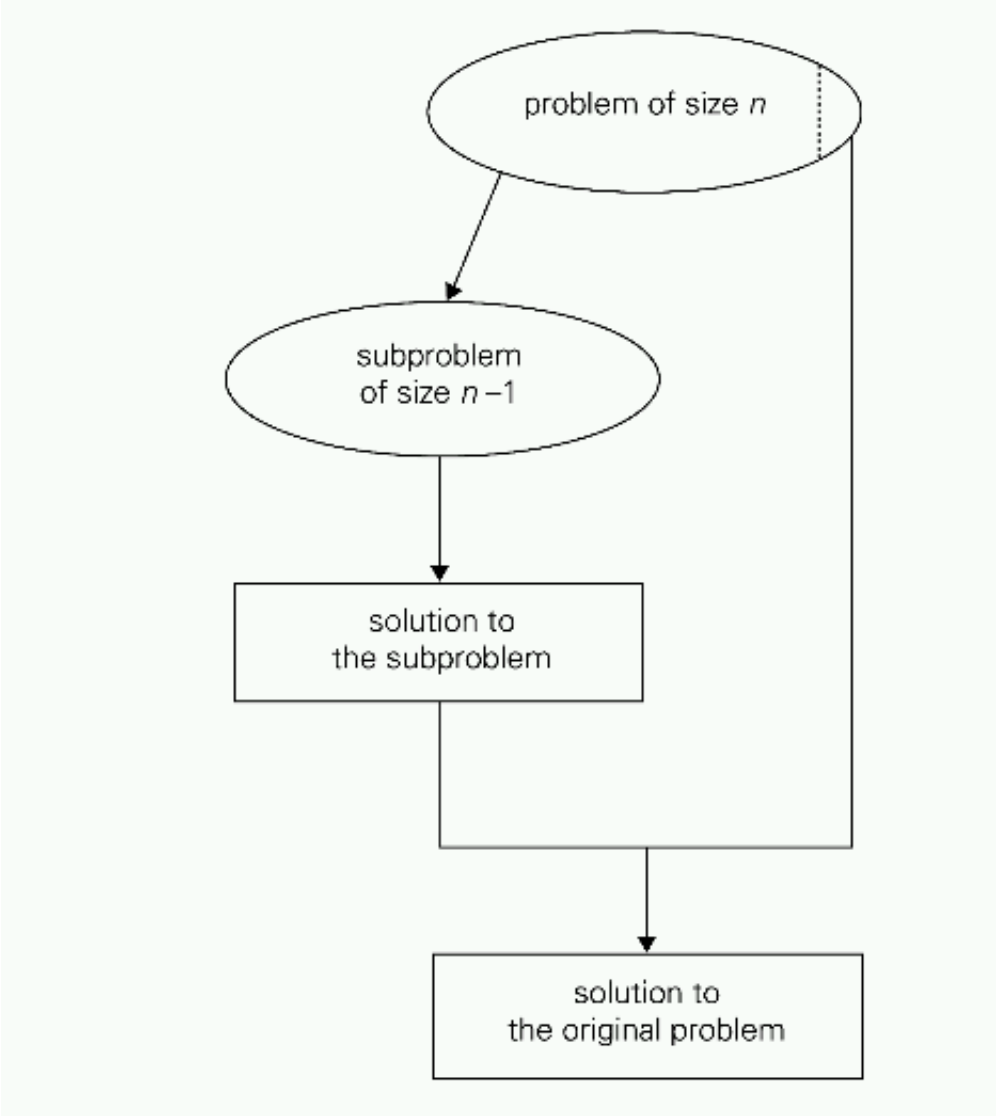
2. Los de kleinere instantie op: vaak recursief

3. Breid de oplossing van de kleinere probleeminstantie uit tot een oplossing van de oorspronkelijke instantie

In het boek wordt onderscheid gemaakt tussen:

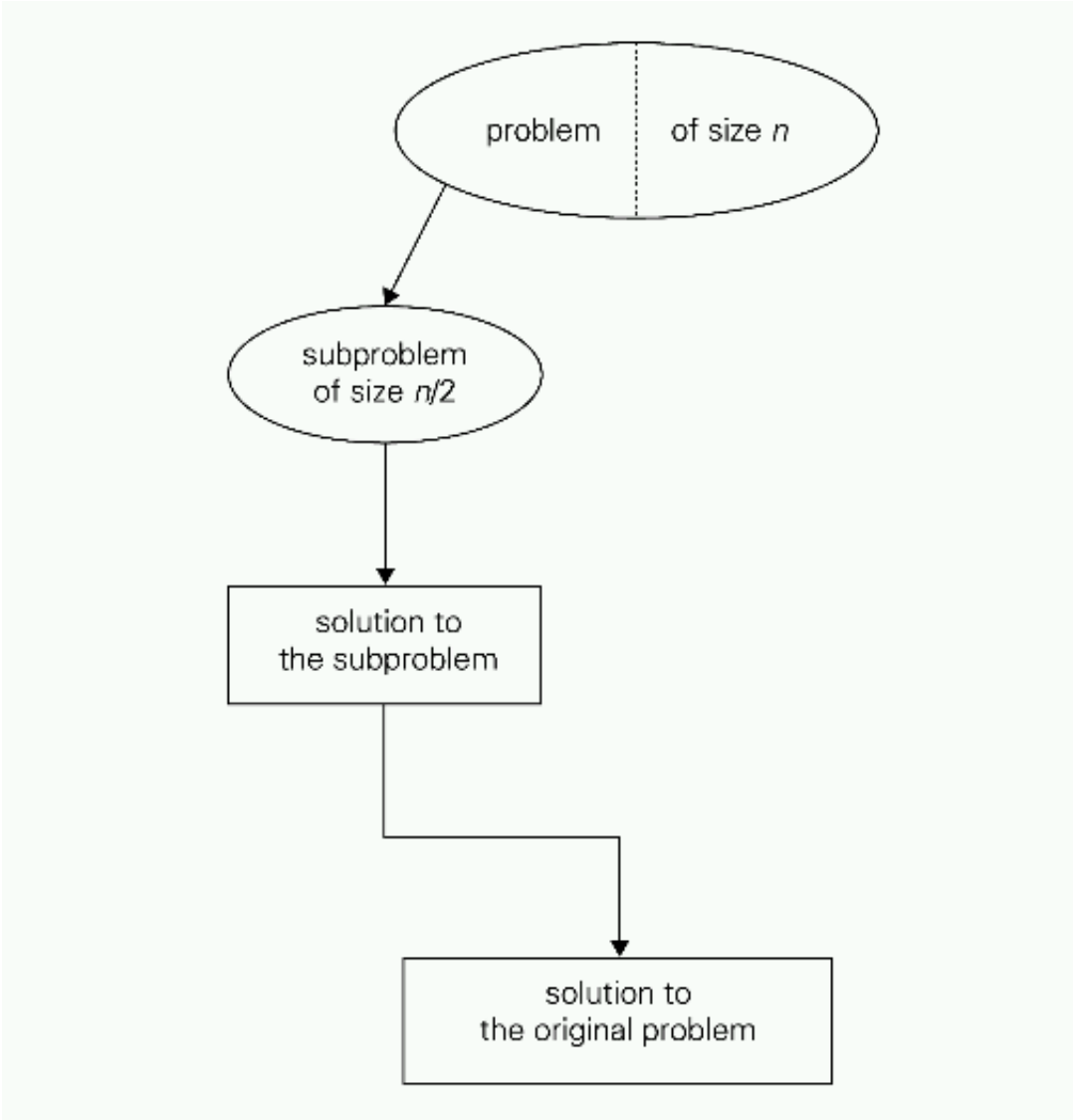
Decrease by one
Decrease by a constant factor
Variable-size decrease

Decrease by one



Decrease by a constant factor

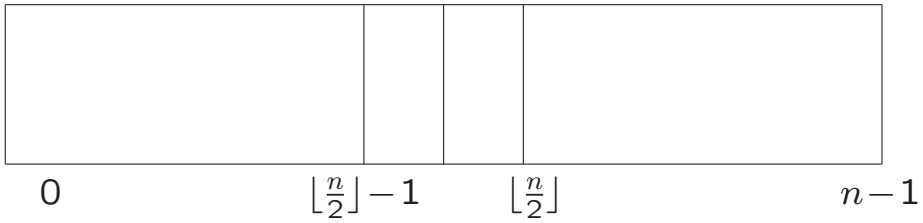
(decrease by half)



Verdeel en heers en sorteren:

```
Sorteer(rij)::
    if ( de rij heeft meer dan één element ) then
        Verdeel de rij in twee stukken: linkerrij en rechterrij;
        Sorteer(linkerrij);
        Sorteer(rechterrij);
        Combineer linkerrij en rechterrij;
    fi .
```

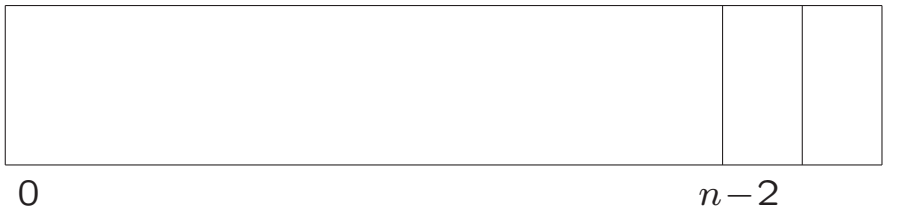
Divide and conquer



Mergesort

Quicksort

Decrease and conquer (decrease by one)



Insertion sort

Mergesort($A[0 \cdots n-1]$)::
// sorteert het array $A[0..n-1]$ recursief
// uitvoer: $A[0..n-1]$ oplopend gesorteerd
if $n > 1$
kopieer($A[0 \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1], B[0 \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1]$);
kopieer($A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdots n-1], C[0 \cdots \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1]$);
Mergesort($B[0 \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1]$);
Mergesort($C[0 \cdots \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1]$);
Merge(B, C, A);
fi .

Voorbeeld: 8 3 2 9 7 1 5 4

Merge($B[0 \cdots p-1], C[0 \cdots q-1], A[0 \cdots p+q-1]$) ::
// voegt 2 gesorteerde arrays B en C samen tot 1 gesorteerd array A
$i, j, k := 0$;
// voeg samen totdat een van de twee op is: ritsen
while $i < p$ **and** $j < q$ **do**
if $B[i] \leq C[j]$ **then**
$A[k] := B[i]; k := k+1; i := i+1;$
else
$A[k] := C[j]; k := k+1; j := j+1;$
od
// en de rest
if $i = p$ **then**
kopieer $C[j \cdots q-1]$ naar $A[k \cdots p+q-1]$;
else
kopieer $B[i \cdots p-1]$ naar $A[k \cdots p+q-1]$;
fi .

Mergesort:

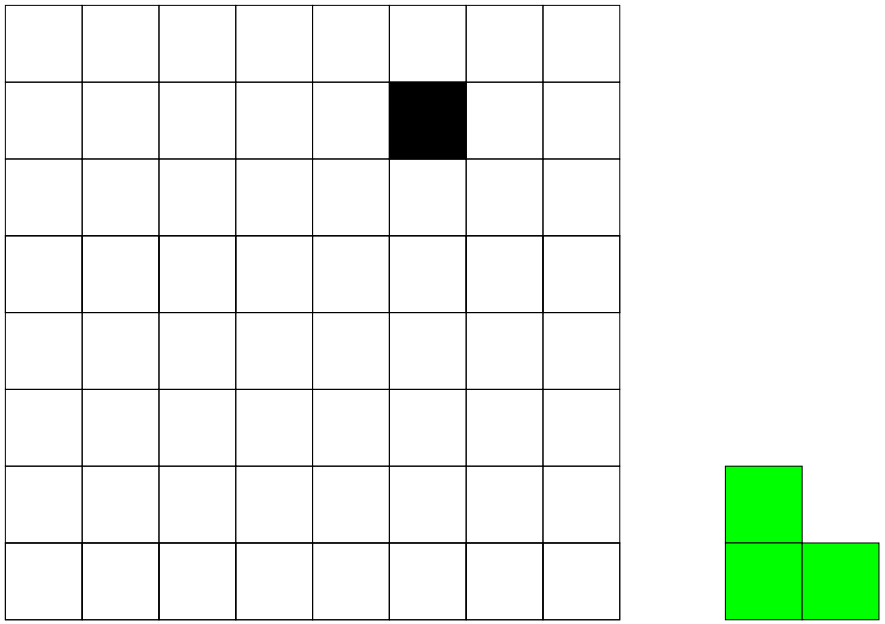
- worst case complexiteit: . . .
- extra geheugen: . . .

Mergesort:

- worst case complexiteit: $\Theta(n \log n)$
- extra geheugen: $O(n)$

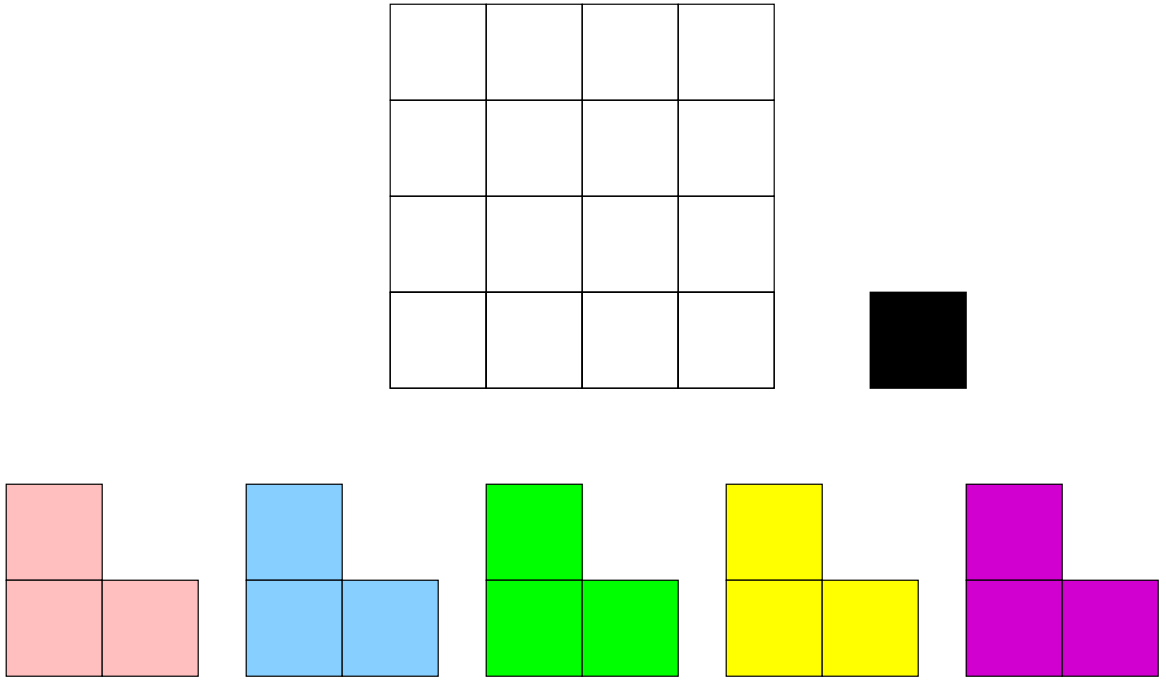
Nog een leuk voorbeeld van de methode Verdeel en heers is de Tromino puzzel, Levitin 5.1.11.

Bedek een 2^nx2^n schaakbord –waaruit één vakje mist– met tromino's.

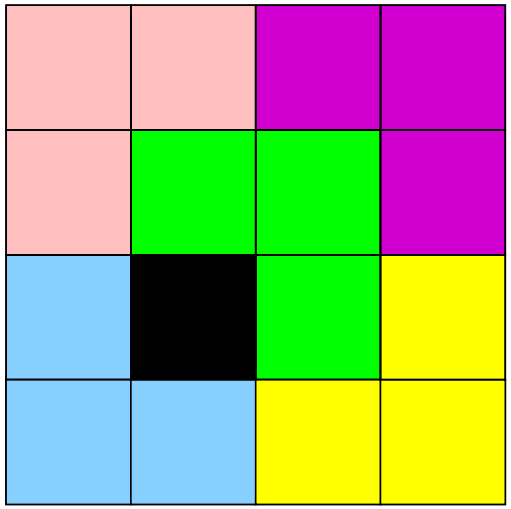


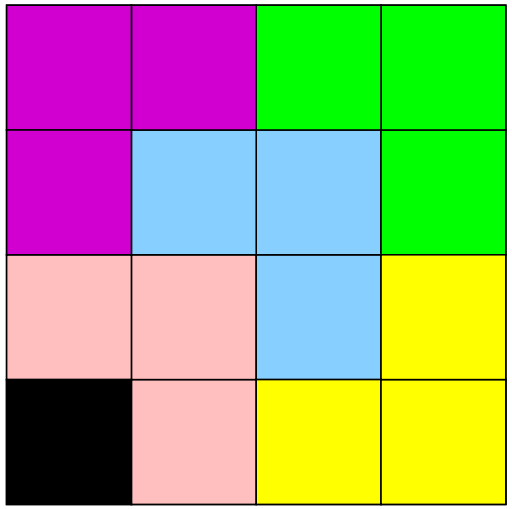
Het 8x8 geval

Het 4x4 geval: gegeven een 4x4 bord waaruit één vakje mist. Bedek het bord volledig (behalve het missende vakje), dus met 5 tromino's.



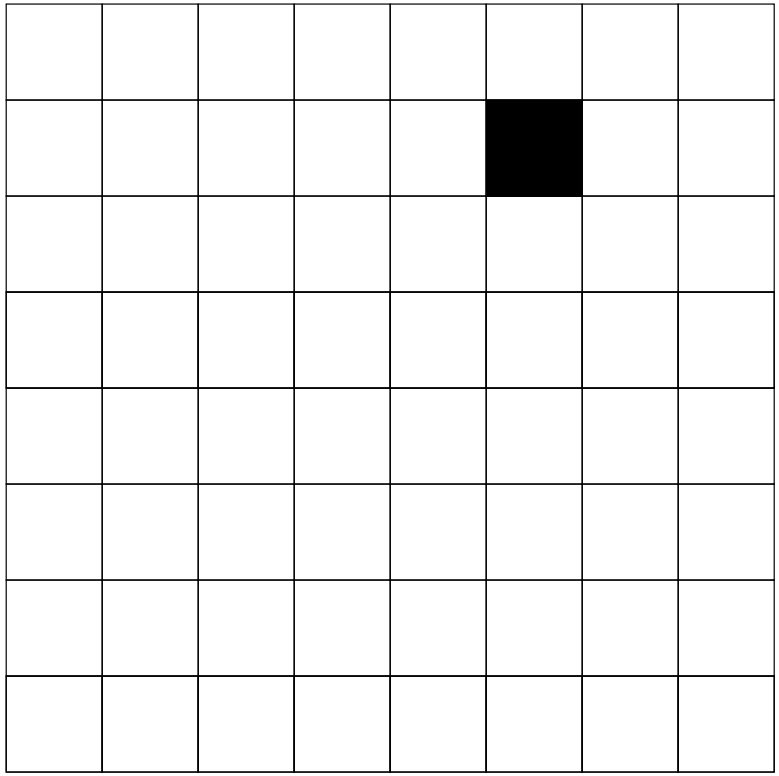
Het 4x4 geval: twee probleeminstanties met oplossing (= bedekking)



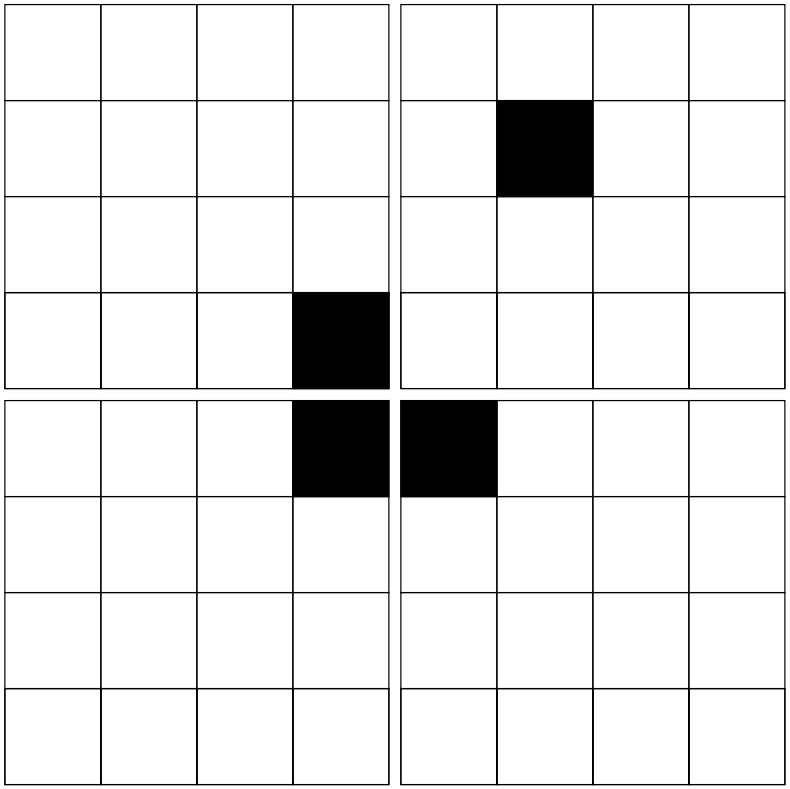


Het 8x8 geval: hoe vinden we een (de?) bedekking met tromino's?

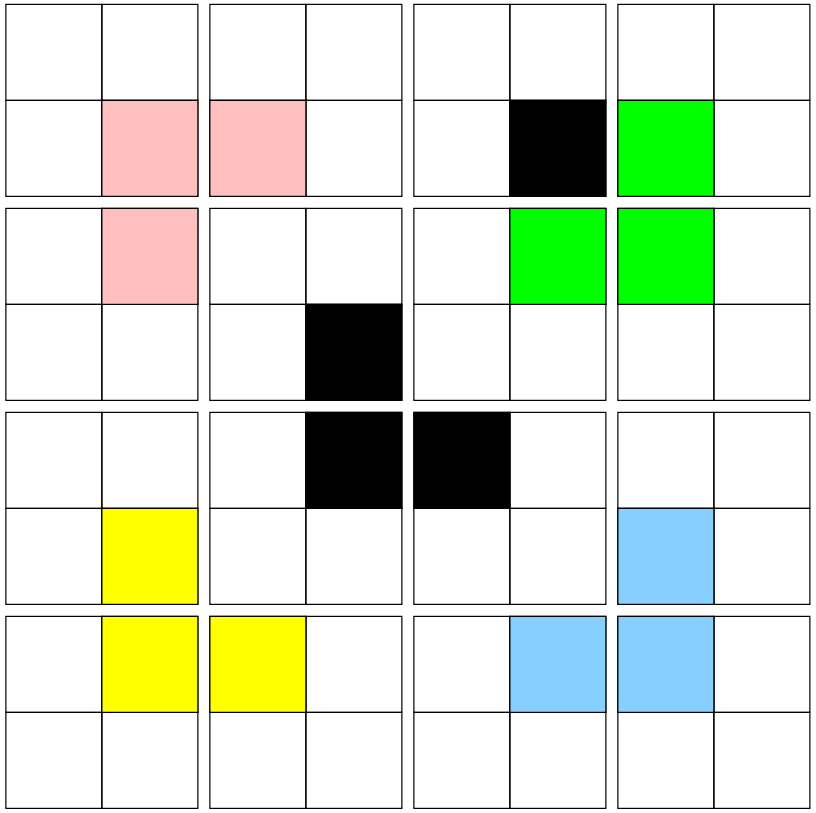
Bijvoorbeeld voor dit bord:



Leg een tromino in het midden, zodat in elk kwart één stuk mist of bedekt is. Het probleem is nu teruggebracht tot vier keer hetzelfde probleem, maar dan voor 4x4 borden.



Doe weer hetzelfde (recursie!) met de 4x4 borden.



Dit divide and conquer algoritme kun je op elk 2^nx2^n bord toepassen.

- Voor welke waarden van m zijn $m \times m$ schaakborden zeker niet te bedekken met tromino's?

- Geef een bedekking van het 5×5 schaakbord met het lege vakje bijvoorbeeld in het midden van de meest linker kolom.

- Geef een bedekking van het 8×8 bord van vorige slide, anders dan die is gevonden met behulp van het divide and conquer algoritme.

Gegeven n punten $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$.
Gevraagd het/een tweetal punten dat het dichtst bij elkaar ligt. Afstandsmaat: $\mathrm{d}(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Brute force algoritme: alle paren (p_i, p_j) (met $i < j$) aflopen en hun onderlinge afstanden $\mathrm{d}(p_i, p_j)$ vergelijken.

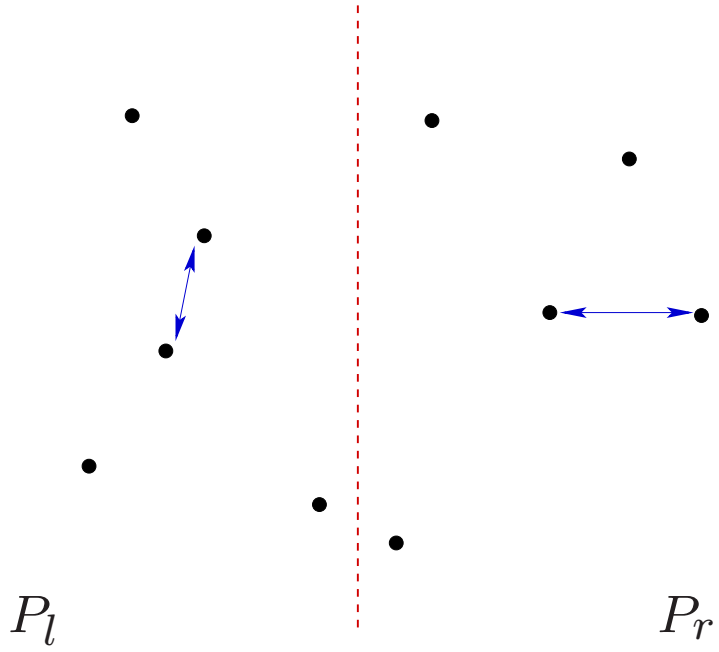
```
dmin := ∞;
for i := 1 to n − 1 do
    for j := i + 1 to n do
        d := (x_i − x_j)^2 + (y_i − y_j)^2;
        if d < dmin
            dmin := d; k := i; l := j;
        fi // (p_k, p_l) voorlopig closest pair
    od
od
```

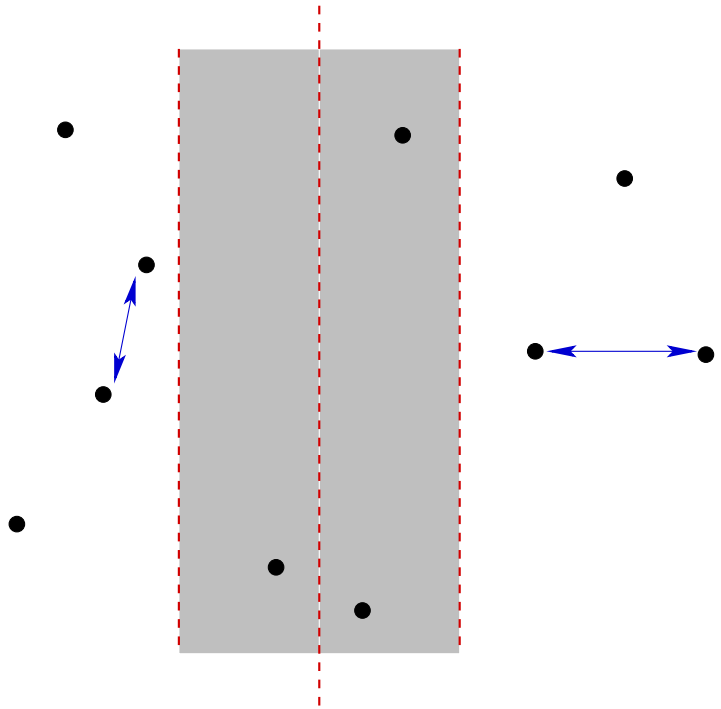
Complexiteit: $\frac{1}{2}n(n-1) = \Theta(n^2)$

Divide and Conquer:

Verdeel de verzameling van n punten in twee verzamelingen P_l en P_r van elk $\frac{n}{2}$ punten door een geschikte lijn te trekken.

Los beide deelproblemen (recursief) op en laat d de kleinst voorkomende afstand zijn tussen punten van P_l resp. P_r.





Controleer of er binnen de strip ter breedte $2d$ rondom de scheidslijn tussen P_l en P_r puntenparen (p, p') zijn met $p \in P_l$ en $p' \in P_r$ en onderlinge afstand kleiner dan d.
Hiervoor blijken slechts $O(n)$ puntenparen bekeken te moeten worden.
Dit levert een $O(n \lg n)$ algoritme op.

- **Lezen/leren bij dit college:**
  Paragraaf 12.1, slides
  Paragraaf 5 inl., 5.1

- **Werkcollege** backtracking
  dinsdag 17 maart 2026, 11.00-12.45, zaal Gorlaeus BE.0.17

- **Opgaven:**

  zie `https://liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/algoritmiek/`

- **Practicumbijeenkomst programmeeropdracht 1:**
  woensdag 18 maart 2026, 15.15-17.00,
  computerzalen Gorlaeus DM.0.09, DM.0.13, DM.0.17

- **Volgend college:**
  maandag 30 maart 2026, 11.00-12.45