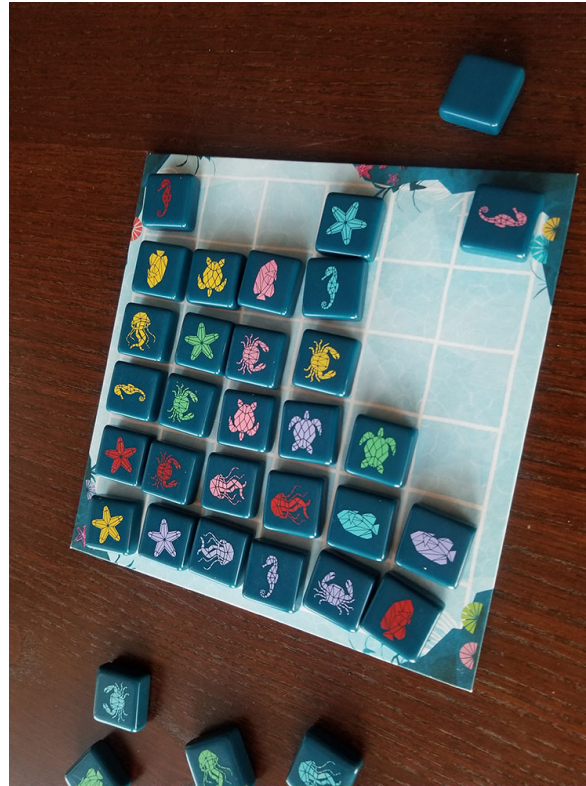


Vierde college algoritmiek

26 februari 2025

Toestand-actie-ruimte

Brute Force



eind deze week (deels)

Bord (met volgorde vakjes):

19	12	11	16	21	23
22	31	9	0	1	13
14	30	4	6	3	34
17	33	7	29	27	26
5	20	28	25	15	18
35	8	10	24	2	32

Pot (met volgorde stenen):

1, 22, 23, 13, 9, 35, 27, 16, 28, 3, 8, 5, 2, 20, 33, 34, 6, 0, 26, 25, 15,
18, 30, 14, 12, 29, 17, 24, 10, 4, 19, 11, 7, 31, 21, 32

(0,1), (3,4), (3,5), (2,1), (1,3), (5,5), (4,3), (2,4), (4,4), (0,3), (1,2),
(0,5), (0,2), (3,2), (5,3), (5,4), (1,0), (0,0), (4,2), (4,1), (2,3), (3,0),
(5,0), (2,2), (2,0), (4,5), (2,5), (4,0), (1,4), (0,4), (3,1), (1,5), (1,1),
(5,1), (3,3), (5,2)

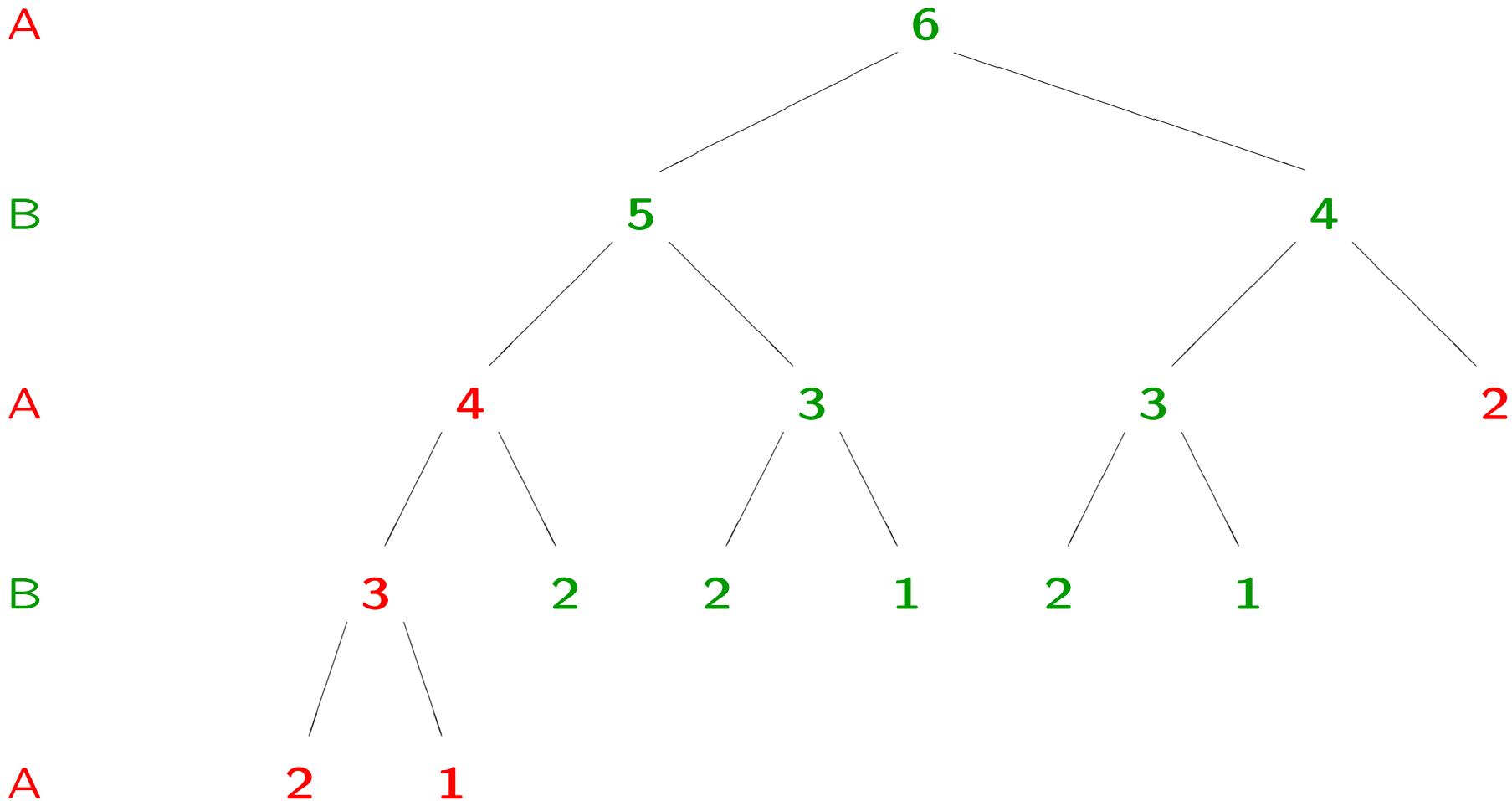
Gevuld bord:

(0,1)	(3,4)	(3,5)	(2,1)	(1,3)	(5,5)
(4,3)	(2,4)	(4,4)	(0,3)	(1,2)	(0,5)
(0,2)	(3,2)	(5,3)	(5,4)	(1,0)	(0,0)
(4,2)	(4,1)	(2,3)	(3,0)	(5,0)	(2,2)
(2,0)	(4,5)	(2,5)	(4,0)	(1,4)	(0,4)
(3,1)	(1,5)	(1,1)	(5,1)	(3,3)	(5,2)

Score: 3 - 5

(0,1)	(3,4)	(3,5)	(2,1)	(1,3)	(5,5)
(4,3)	(2,4)	(4,4)	(0,3)	(1,2)	(0,5)
(0,2)	(3,2)	(5,3)	(5,4)	(1,0)	(0,0)
(4,2)	(4,1)	(2,3)	(3,0)	(5,0)	(2,2)
(2,0)	(4,5)	(2,5)	(4,0)	(1,4)	(0,4)
(3,1)	(1,5)	(1,1)	(5,1)	(3,3)	(5,2)

A kan niet winnen (bij perfect spel van B)



Een stand is **winnend** voor degene die aan de beurt is als een van de directe (= in 1 zet te bereiken) vervolgstanden NIET **winnend** is voor de tegenstander.

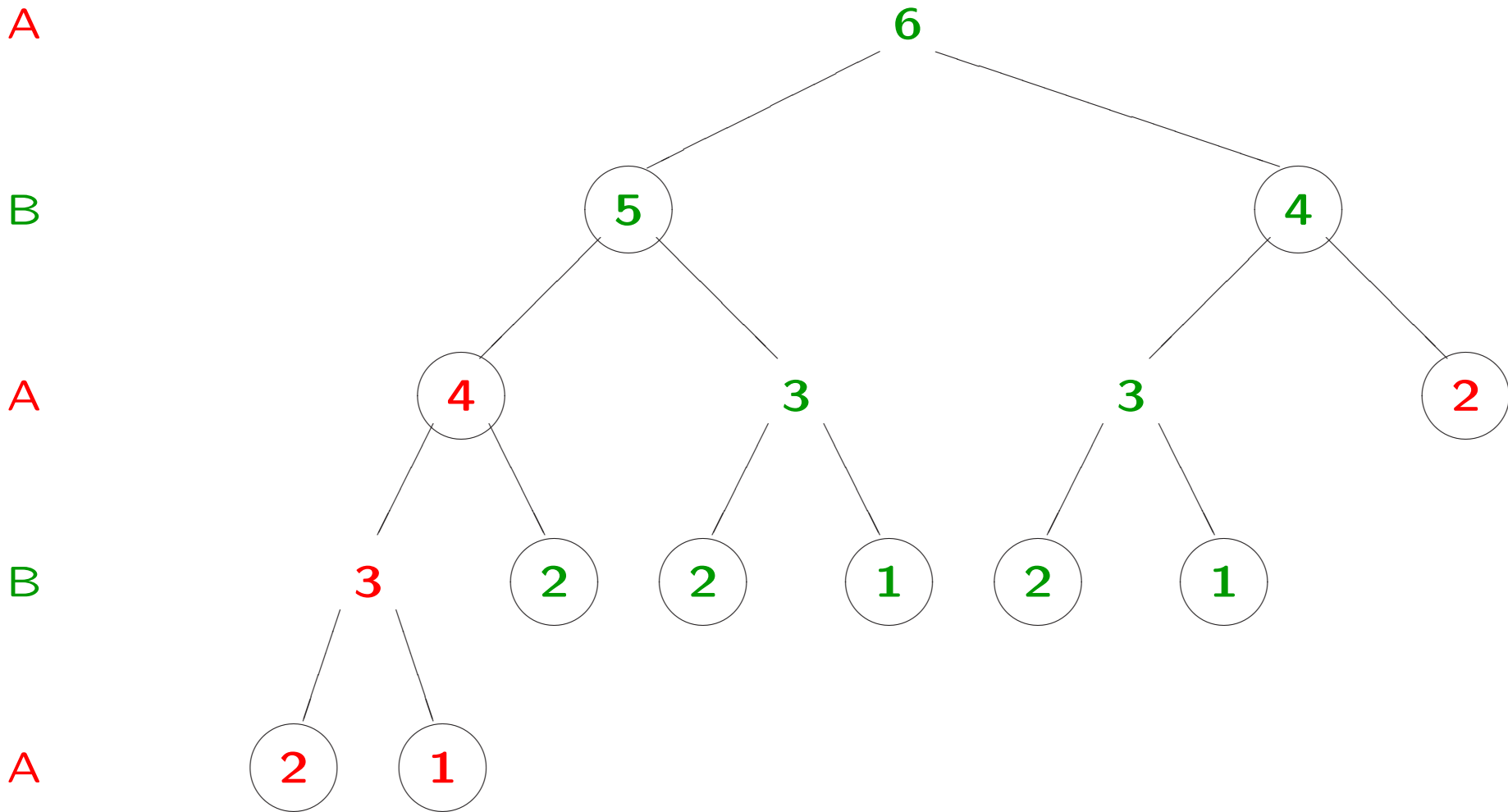
Een algoritme dat bepaalt of een stand winnend is, ziet er dus ruwweg zo uit:

Loop alle mogelijke directe vervolgstanden af:

- kijk of je er een tegenkomt die not winnend is voor de tegenstander: **recursie**
- zo ja, dan is de oorspronkelijke stand winnend (en heb je meteen een winnende zet) en hoef je niet verder te kijken
- zo nee, dan de volgende vervolgstand proberen

Als alle vervolgstanden zijn geweest is de oorspronkelijke stand niet winnend.

A kan niet winnen (bij perfect spel van B)




```
winnend(stand)::  
  
    if eindstand(stand) then  
        // makkelijk; bijv return false;  
    else  
        for alle mogelijke zetten i do  
            kopie := stand;  
            doezet(kopie,i);  
            if not winnend(kopie) then  
                return true;  
            fi  
        od  
        return false;  
    fi
```

Zie ook Programmeermethoden (college over recursie)

Gebruik een kopie en doe daarin de zetten:

```
bool nimwinst (int stand) {
    int lucifer, kopie;
    if ( stand == 0 )        // de tegenstander heeft zojuist
        return false;      // de laatste lucifers gepakt
    else {                  // directe vervolgstanden aflopen
        for ( lucifer = 1; lucifer <= 2; lucifer++ ) {
            kopie = stand; // maak een kopie
            kopie -= lucifer; // doe een zet in de kopie
            if ( !nimwinst (kopie) )
                return true;
        }
        return false;
    } // else
}
```

Met terugzetten:

```
bool nimwinst (int stand) {
    int lucifer;
    if ( stand == 0 )      // de tegenstander heeft zojuist
        return false;    // de laatste lucifers gepakt
    else {                // directe vervolgstanden aflopen
        for ( lucifer = 1; lucifer <= 2; lucifer++ ) {
            stand -= lucifer; // doe een zet
            if ( !nimwinst (stand) ) {
                stand += lucifer; // terugzetten
                return true;
            }
            stand += lucifer; // terugzetten
        }
        return false;
    } // else
}
```

Met terugzetten:

```
winnend(stand)::  
  
    if eindstand(stand) then  
        // makkelijk; bijv return false;  
    else  
        for alle mogelijke zetten i do  
            doezet(stand,i);  
            if not winnend(stand) then  
                undoezet(stand,i);  
                return true;  
            fi  
            undoezet(stand,i);  
        od  
        return false;  
    fi
```

optimale score

Voorbeeld 3: Torens van Hanoi

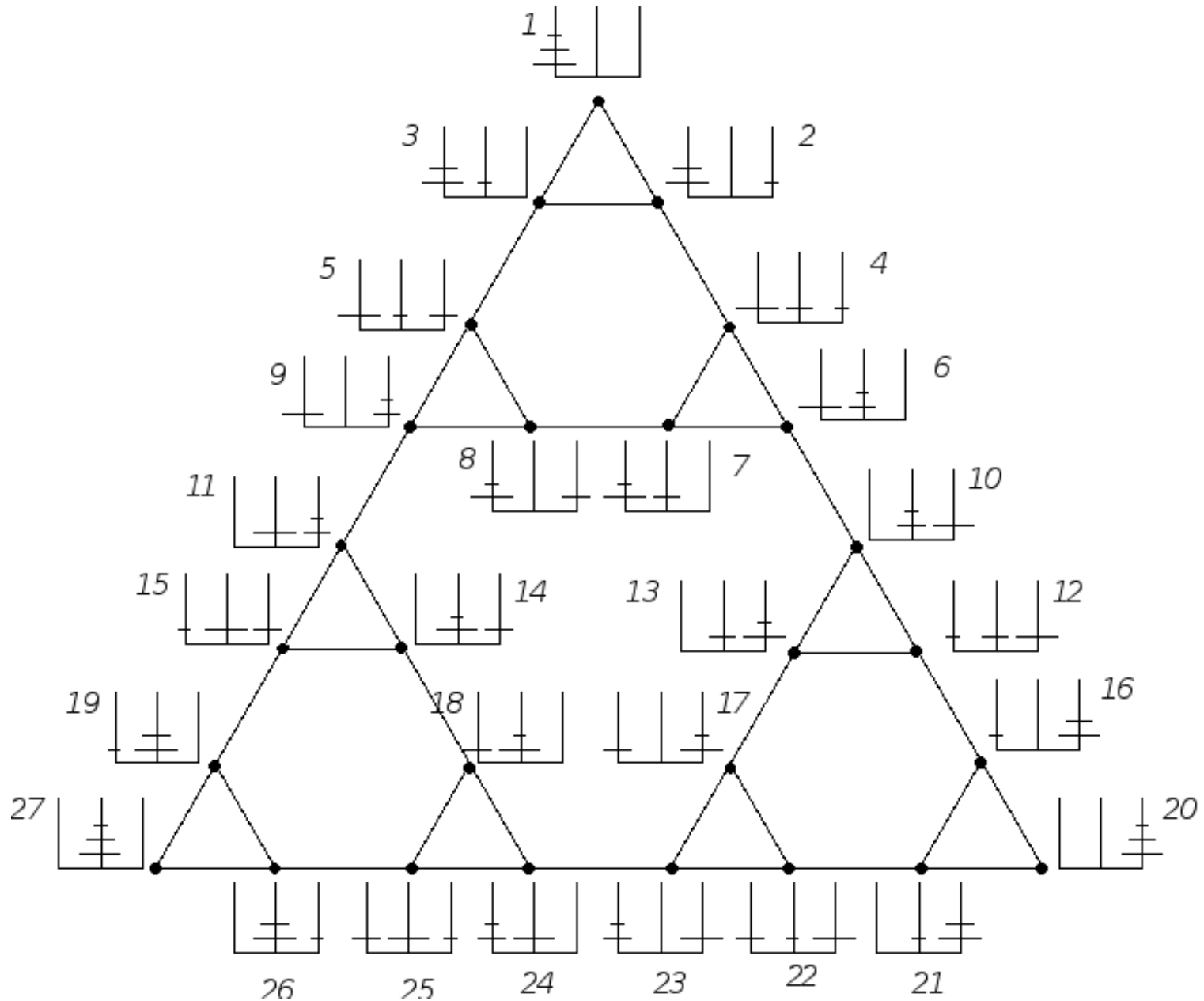
Gegeven n ($n \geq 1$) schijven, alle verschillend in grootte, en 3 palen. In de beginsituatie liggen alle schijven boven op elkaar om één paal, waarbij er geen grotere schijf op een kleinere ligt. De andere 2 palen zijn leeg.

Opdracht: Breng de hele toren (zo snel mogelijk) naar een van de lege palen door het een voor een verplaatsen van schijven van de ene paal naar de andere.

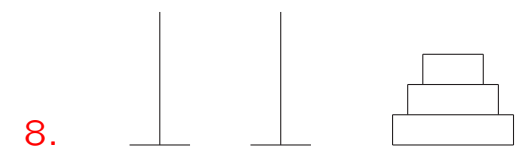
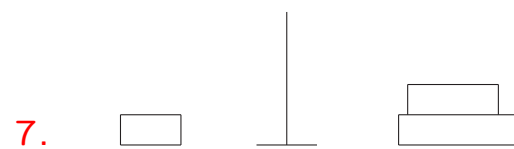
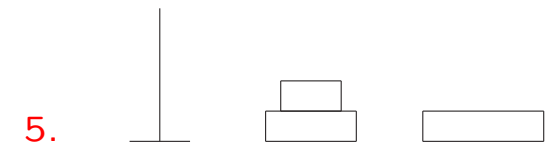
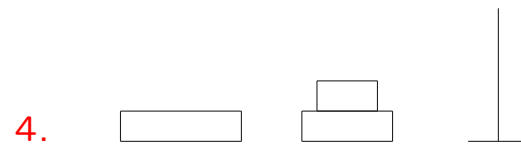
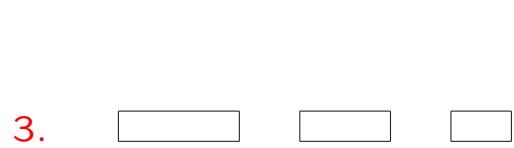
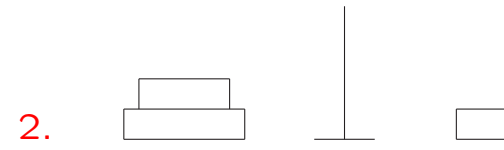
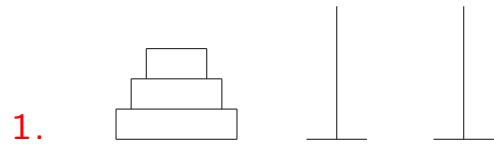
Regels:

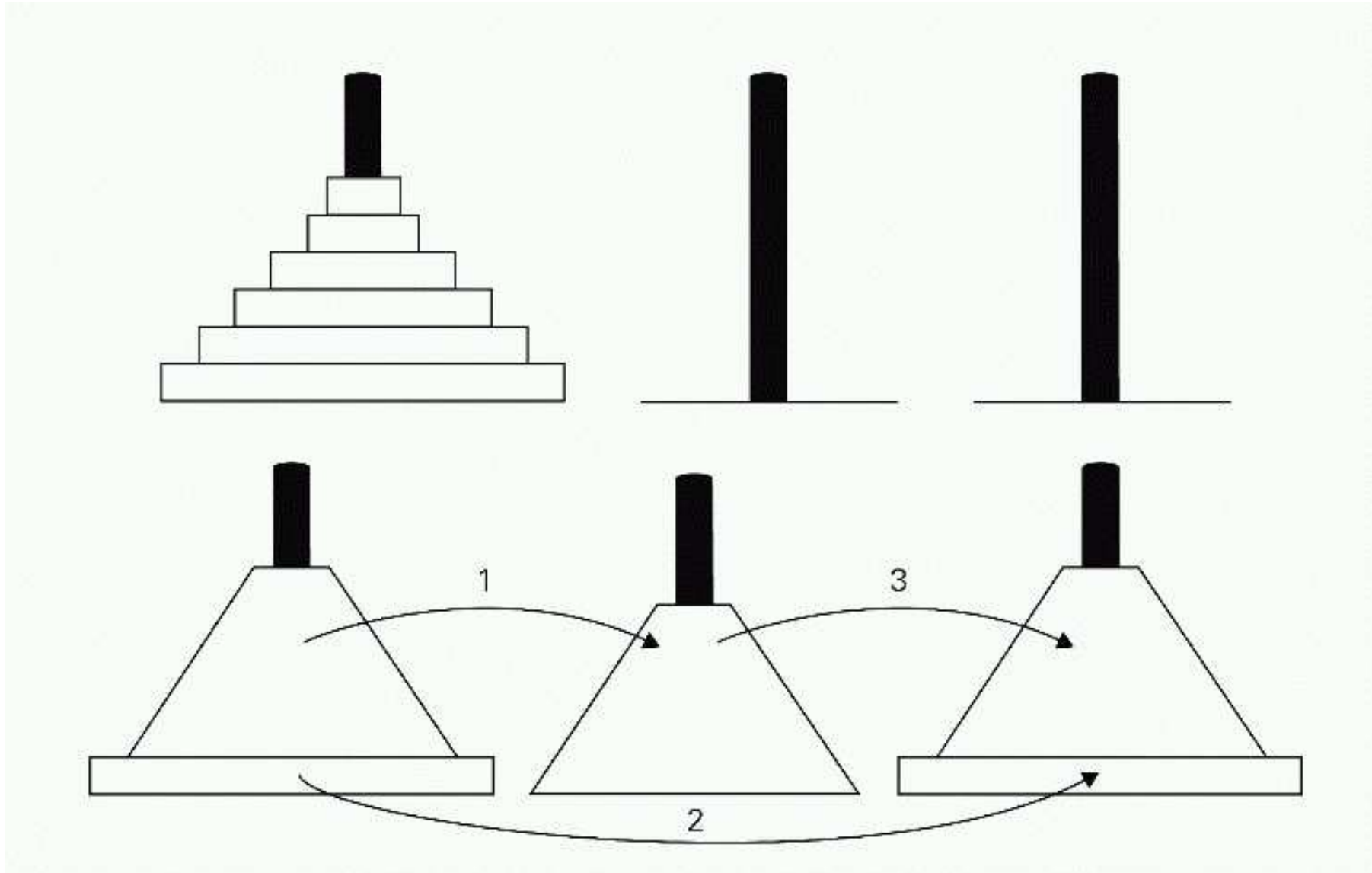
- Alleen de *bovenste* schijf van een stapel kan verzet worden
- deze mag alleen *bovenop* een andere stapel gelegd worden.
- *Restrictie:* er mag nooit een grotere schijf op een kleinere gelegd worden.

Een **toestand** is in dit geval een verdeling van de schijven over de palen, waarbij (als gevolg van de restrictie) geen grotere schijf op een kleinere ligt. Een **actie** is het verplaatsen van een schijf volgens de spelregels.



Optimale oplossing voor $n = 3$.





Recursieve oplossing van de Torens van Hanoi

Voorbeeld 4: Kannenprobleem

We hebben twee kannen: een grote met een inhoud van 8 liter, en een kleine met een inhoud van 5 liter. Op de kannen staat geen maatverdeling. Verder hebben we de beschikking over een waterkraan en een afvoer. Bij aanvang zijn beide kannen leeg.

Vraag: Hoe krijgen we precies 4 liter water in een van de twee kannen? En liefst zo snel mogelijk.



Een Intermezzo

Die Hard

We onderscheiden toestanden en zinvolle (!) acties:

Toestand: Een paar (x, y) met $0 \leq x \leq 8$ en $0 \leq y \leq 5$. Hierin is x de inhoud van de grote kan en y de inhoud van de kleine kan.

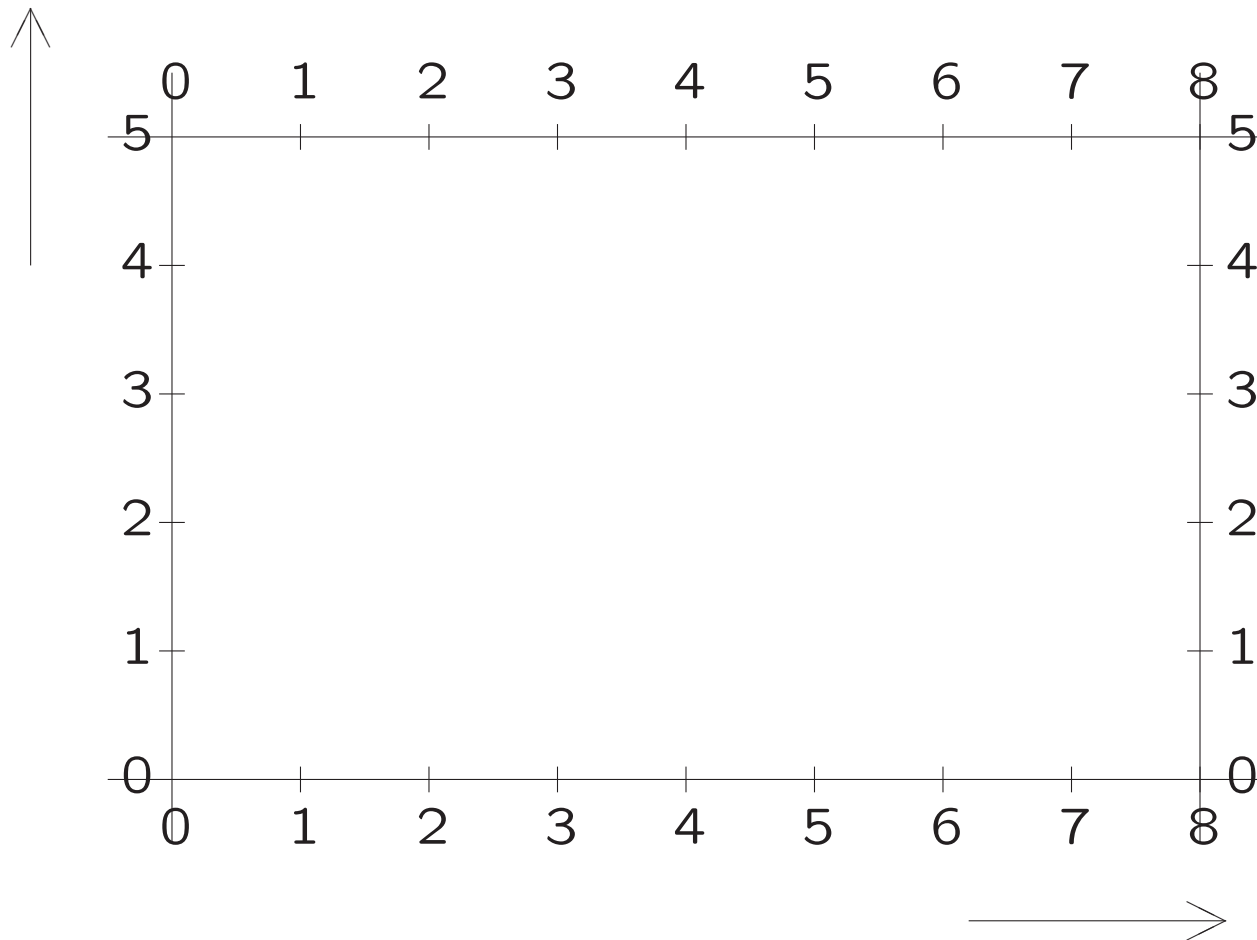
Begintoestand: beide kannen leeg, dus $(0,0)$

Eindtoestanden: alle toestanden met 4 liter in een van beide kannen, dus $(4, y)$ en $(x, 4)$

Acties: vullen, legen en overgieten

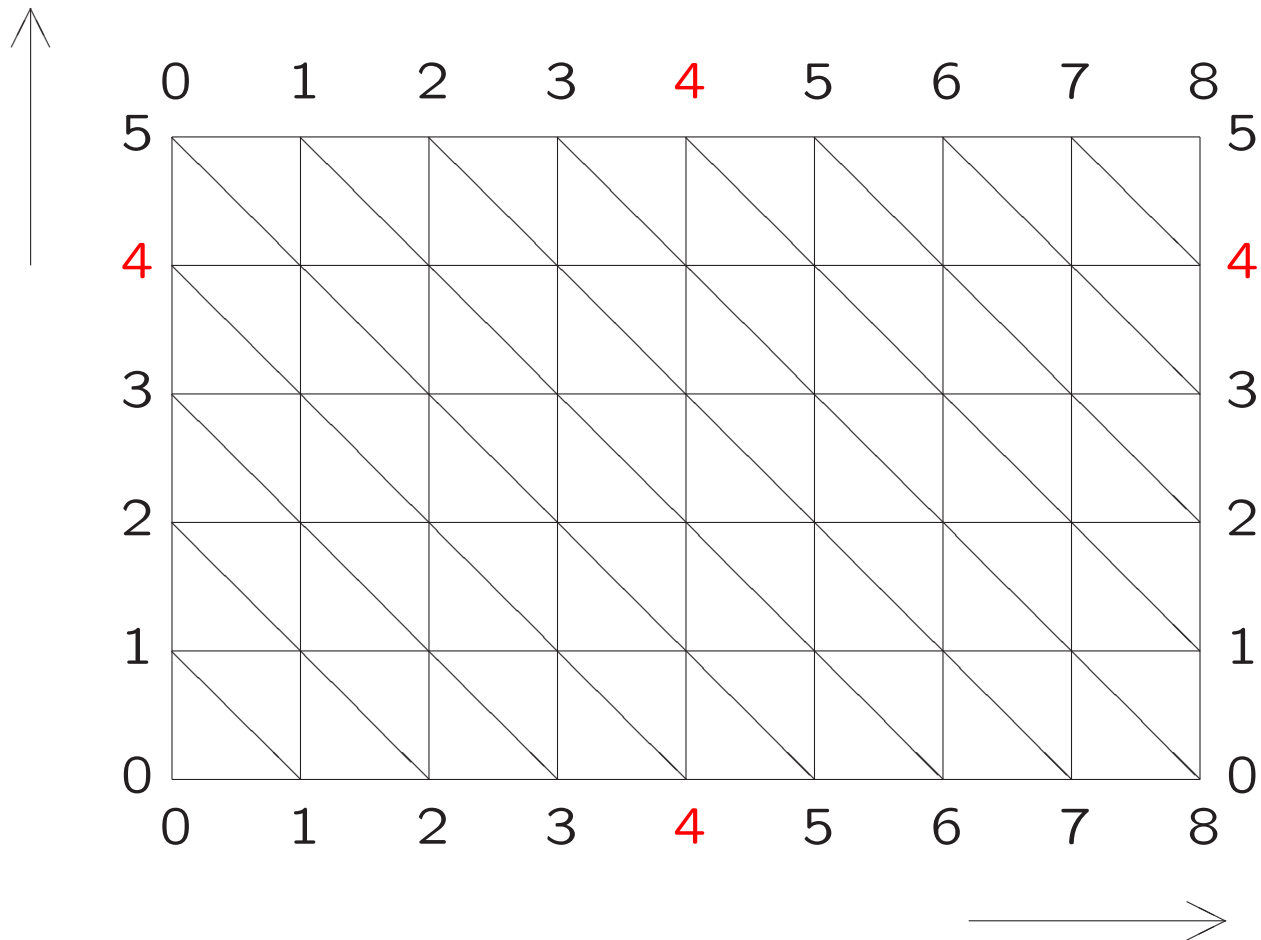
- een kan geheel (aan)vullen
- een kan geheel leeggooien
- de ene kan leeggooien in de andere
- van de ene kan in de andere gieten totdat deze vol is

inhoud kleine kan



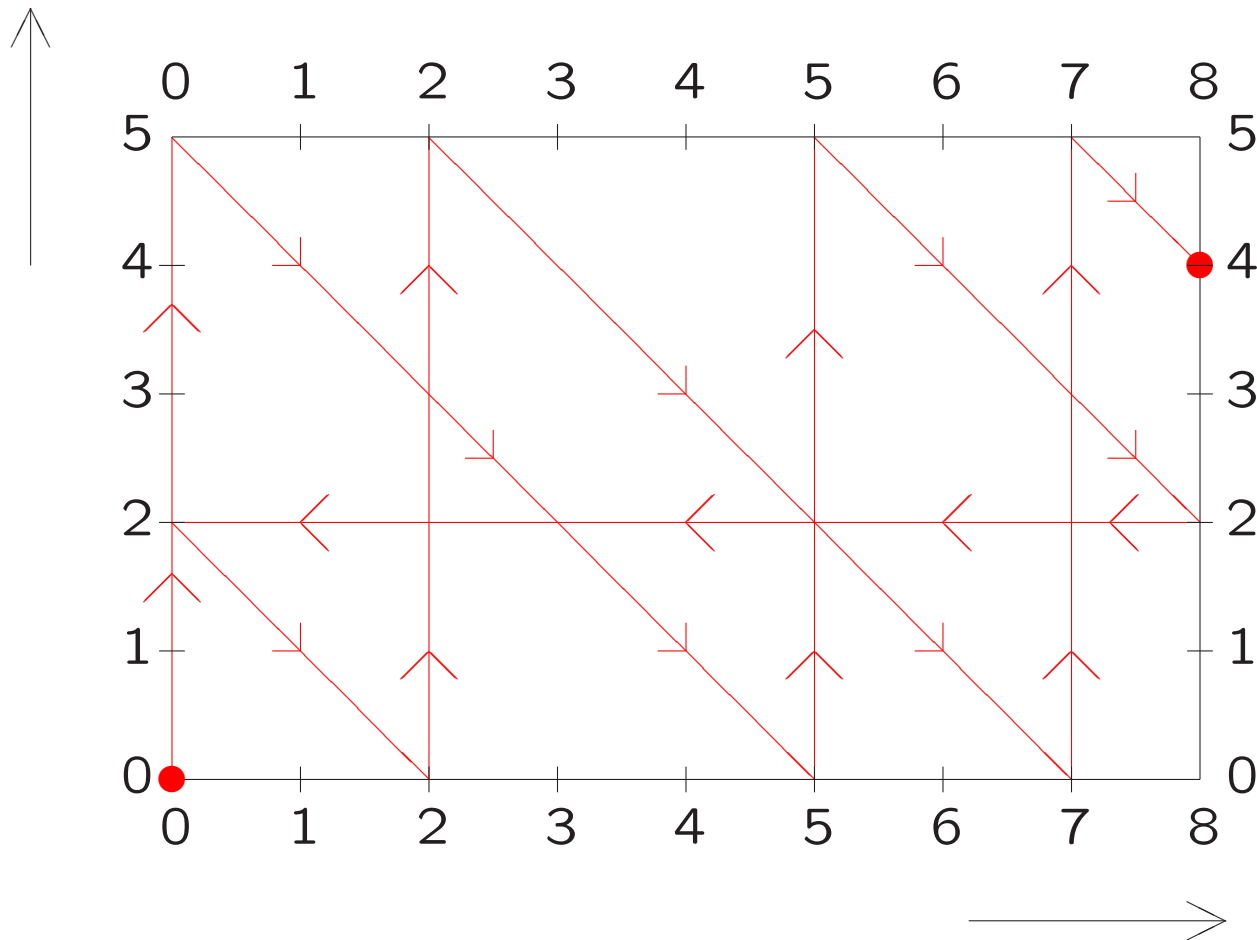
inhoud grote kan

inhoud kleine kan



inhoud grote kan

inhoud kleine kan



inhoud grote kan

De snelste oplossing gebruikt de volgende **strategie** en zorgt voor 4 liter in de kleine kan. Er is overigens ook een (iets) langere oplossing, die 4 liter in de grote kan achterlaat.

Herhaal

Herhaal

Vul de kleine kan;

Giet over in de grote kan;

totdat (de grote kan vol is) of (oplossing gevonden)

Als nog geen oplossing gevonden

Grote kan leeggooien;

Giet uit de kleine kan over in de grote kan;

totdat oplossing gevonden

Wanneer oplossing mogelijk?

Brute Force

Brute force: a straightforward approach, usually directly based on the problem statement and definitions.

Ofwel: los een probleem op via de meest voor de hand liggende (recht-toe-recht-aan) methode, meestal door eenvoudigweg de definitie van een oplossing te gebruiken. Vaak ook: alle mogelijkheden proberen.

Voorbeeld 1: vind de grootste gemene deler van twee getallen m en n door van alle mogelijke integers ≥ 2 (en $\leq \min(m, n)$) te proberen of ze zowel m als n delen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 2: los de DONALD + GERALD = ROBERT puzzel op door alle $9!$ (er was al gegeven dat $D = 5$) mogelijke antwoorden te proberen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 3: zoek een gegeven X in een array van n stuks door er van links naar rechts doorheen te lopen en X met alle n te vergelijken. (Zie college 3.)

Zoek herhaald de kleinste en zet die op de juiste positie in het array.

```
for  $i := 0$  to  $n - 2$  do  
     $\text{min} := i$ ;  
    for  $j := i + 1$  to  $n - 1$  do  
        if  $A[j] < A[\text{min}]$  then  
             $\text{min} := j$ ;  
        fi  
    od  
    wissel( $A[i], A[\text{min}]$ );  
od
```

Aantal vergelijkingen: $\frac{1}{2}n(n - 1)$.

Probleem: bereken de waarde van het polynoom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ in het punt $x = x_0$ (Levitin, opgave 3.1.4)

Brute force algoritme (uit de definitie):

```
p := 0;
for i := n downto 0 do
  macht := 1;
  for j := 1 to i do
    macht := macht * x; // bereken  $x^i$ 
  od
  p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Efficiëntie (aantal $*$ / $+$): $\Theta(n^2)$

Slimmer: we kunnen de efficiëntie eenvoudig flink verbeteren door van rechts naar links te evalueren en de x^i handiger te berekenen:

```
p := a[0];  
macht := 1;  
for i := 1 to n do  
    macht := macht * x;  
    p := p + a[i] * macht;  
od  
return p;
```

Efficiëntie: $\Theta(n)$;

Preciezer: $\#(*) = 2n$; $\#(+)$ = n

Dit kan nog beter (methode van Horner), echter niet in orde van grootte.

Gegeven een patroon (= string van m karakters) en een tekst (= string van $n \geq m$ karakters). **Gevraagd** de index van de beginpositie in de tekst waar het patroon voorkomt.

Brute force algoritme: patroon v.l.n.r. langs de tekst schuiven en steeds de overeenkomstige karakters uit tekst en patroon vergelijken

```
for  $i := 0$  to  $n - m$  do
     $j := 0$ ;
    while  $j < m$  and patroon[ $j$ ] = tekst[ $i + j$ ] do
         $j := j + 1$ ;
    od
    if  $j = m$  then
        return  $i$ ;
    fi
od
return -1; // geen match gevonden
```

De werking van het algoritme geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld:

```

N O B O D Y - N O T I C E D - H I M
N O T
  N O T
    N O T
      N O T
        N O T
          N O T
            N O T

```

Het aantal vergelijkingen dat dit algoritme doet hangt af van de tekst en het patroon. In de **worst case** worden $m * (n - m + 1)$ vergelijkingen gedaan. Dit komt voor wanneer in elke i -stap het patroon helemaal (dus m vergelijkingen) vergeleken wordt met de tekst. De **complexiteit** van het algoritme is dus $O(n * m)$.

Opgave: geef een tekst en een patroon waarvoor het algoritme $m * (n - m + 1)$ vergelijkingen doet.

Opmerking: het kan beter (Boyer-Moore, Knuth-Morris-Pratt), maar voor “gewone-taal” teksten is het algoritme zo slecht nog niet.

Opmerking 2: `string::find (...)` gebruikt brute force

Opmerking 3: BAPC2006

Gegeven n punten $p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_n = (x_n, y_n)$.

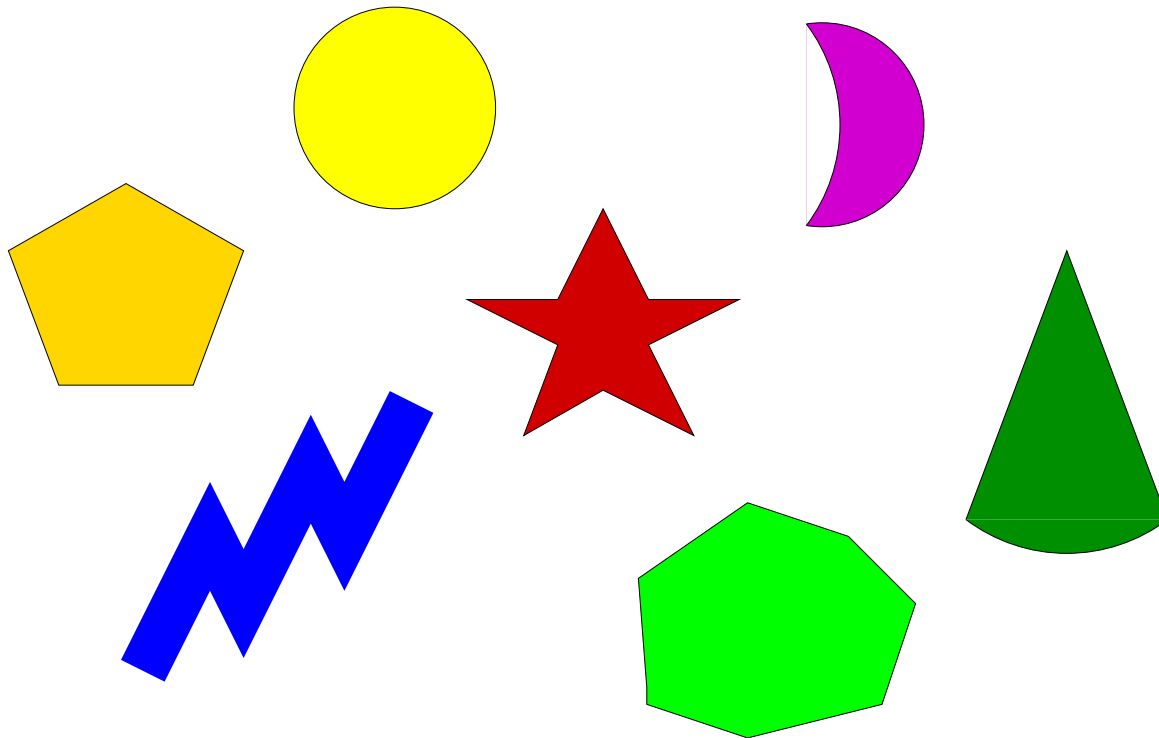
Gevraagd het/een tweetal punten dat het dichtst bij elkaar ligt. Afstandsmaat: $d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Brute force algoritme: alle paren (p_i, p_j) (met $i < j$) aflopen en hun onderlinge afstanden $d(p_i, p_j)$ vergelijken.

```
dmin := ∞;
for i := 1 to n - 1 do
  for j := i + 1 to n do
    d := (x_i - x_j)2 + (y_i - y_j)2;
    if d < dmin
      dmin := d; k := i; l := j;
    fi // (p_k, p_l) voorlopig closest pair
  od
od
```

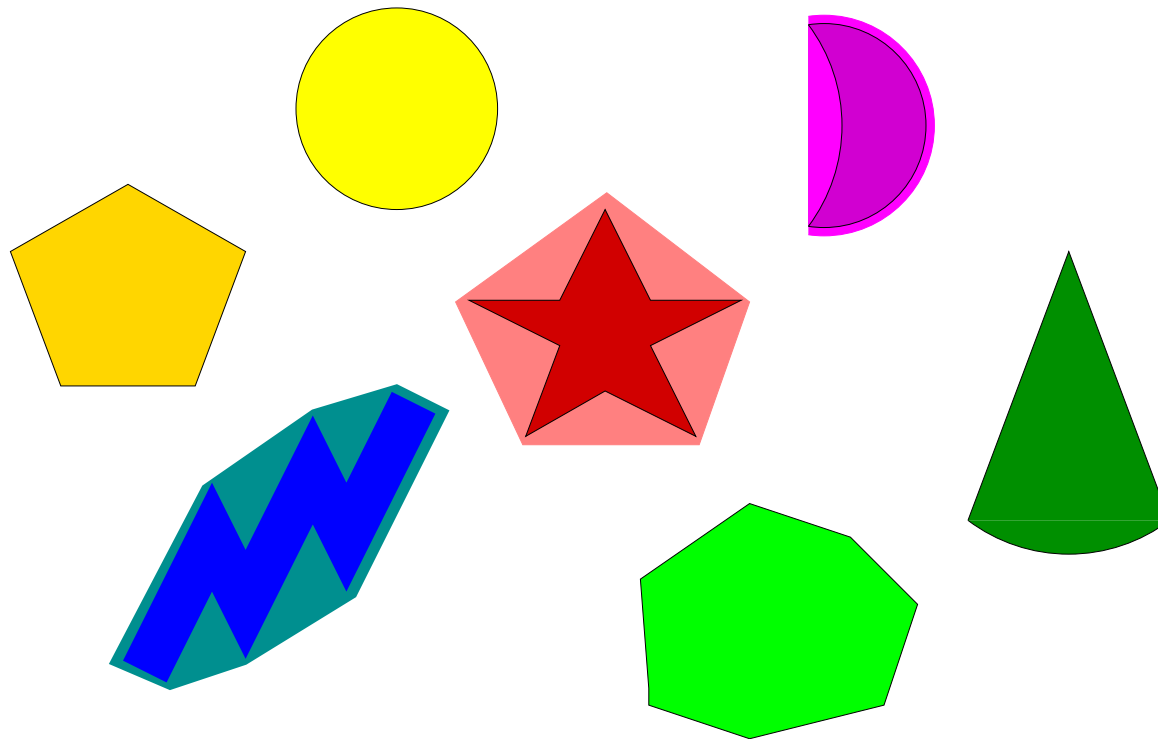
Complexiteit: $\frac{1}{2}n(n - 1) = \Theta(n^2)$

Een verzameling punten in het platte vlak heet **convex** als voor elk tweetal punten uit die verzameling geldt dat het verbindend lijnstuk ook weer in die verzameling ligt.



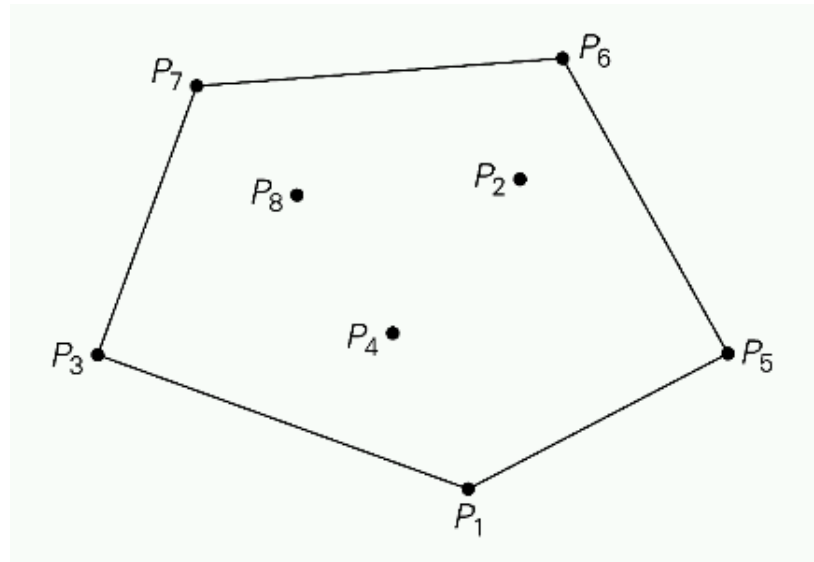
Convexe en niet-convexe vormen

De **convex hull** (convex omhulsel) van een verzameling S van punten in \mathbb{R}^2 is de kleinste convexe verzameling die S bevat.



Convexe omhulsels

Stelling: de convex hull van een verzameling S van $n > 2$ punten in \mathbf{R}^2 (niet alle op één lijn) is een convexe veelhoek (polygoon) met als hoekpunten enkele punten uit S .



De convex hull van de verzameling $\{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ is de convexe veelhoek met hoekpunten P_1, P_5, P_6, P_7 en P_3

We baseren ons brute force algoritme op de volgende observatie: een lijnstuk P_iP_j maakt deel uit van de rand van de convex hull van $\{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ d.e.s.d.a. alle andere punten van de verzameling aan een en dezelfde kant van de lijn door P_i en P_j liggen.

Brute force: Ga voor elk tweetal punten $P_i = (x_i, y_i)$ en $P_j = (x_j, y_j)$ na of alle andere punten aan dezelfde kant van de lijn $(y_j - y_i)x + (x_i - x_j)y = x_iy_j - y_ix_j$ liggen. Zo ja, dan is P_iP_j dus deel van de convex hull.

Complexiteit: $O(n^3)$

Opmerking: het kan veel beter, namelijk $O(n \lg n)$

Opmerking 2: WK 1992

Brute force:

- **Voordelen:**

- algemeen toepasbaar
- eenvoudig
- levert voor een aantal belangrijke problemen (zoeken, patroonherkenning) een zeer behoorlijk algoritme op

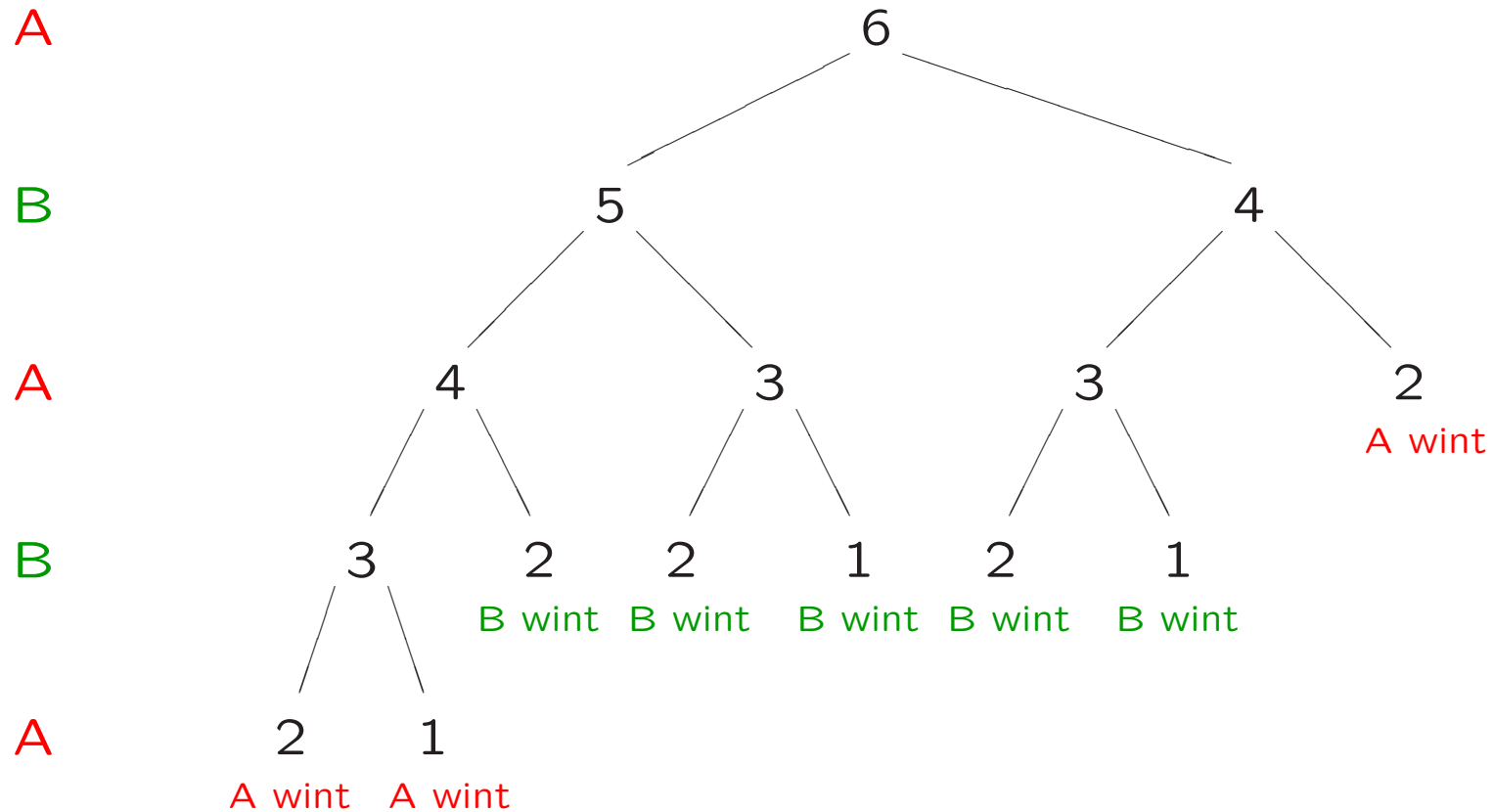
- **Nadelen:**

- levert meestal geen efficiënt algoritme op
- soms onacceptabel langzaam

Exhaustive search: brute force benadering voor problemen die te maken hebben met het vinden van een element met een speciale eigenschap binnen een verzameling van bijv. permutaties of deelverzamelingen of toestanden of ...

Methode:

- . construeer op een systematische manier alle kandidaatoplossingen
- . evalueer elk van deze mogelijke oplossingen
- . retourneer een/de kandidaatoplossing met de gevraagde eigenschap (als die bestaat)



Exhaustive search: doorloop (*als het ware*) de hele spelboom om te bepalen of een stand winnend is. Alle toestanden/alle spelverlopen worden zo bekeken. Je kunt stoppen zodra je een winnende zet gevonden hebt.

Exhaustive search: brute force benadering voor problemen die te maken hebben met het vinden van een element met een speciale eigenschap binnen een verzameling van bijv. permutaties of deelverzamelingen of toestanden of ...

Methode:

- . construeer op een systematische manier alle kandidaatoplossingen, bijvoorbeeld alle permutaties van de getallen 1 t/m n
- . evalueer elk van deze mogelijke oplossingen
- . retourneer een/de kandidaatoplossing met de gevraagde eigenschap (als die bestaat) (*)

(*) soms, zoals bij optimalisatieproblemen, *moet* je daartoe alle kandidaatoplossingen gezien hebben

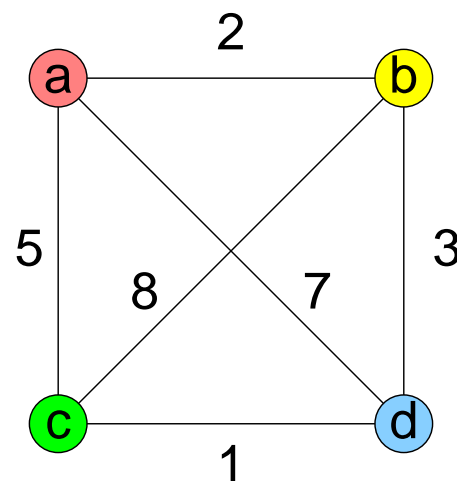
Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

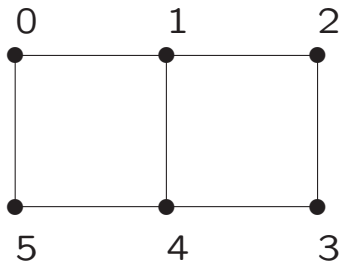
Gegeven n steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn.

Gevraagd: de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.

Ofwel: vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (volledige) graaf.

Voorbeeld:

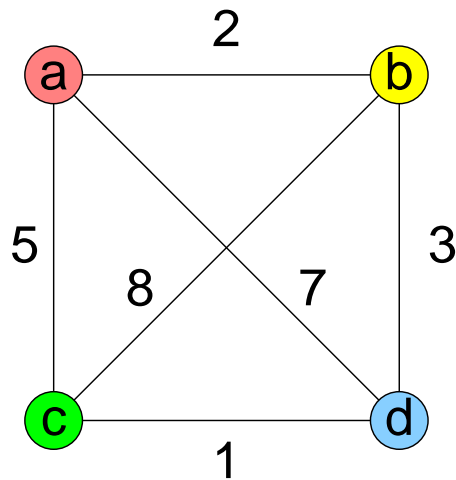




1.

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 0), (4, 1)\}$$



Route

- a → b → c → d → a
- a → b → d → c → a
- a → c → b → d → a
- a → c → d → b → a
- a → d → b → c → a
- a → d → c → b → a

Lengte

- 2 + 8 + 1 + 7 = 18
- 2 + 3 + 1 + 5 = 11
- 5 + 8 + 3 + 7 = 23
- 5 + 1 + 3 + 2 = 11
- 7 + 3 + 8 + 5 = 23
- 7 + 1 + 8 + 2 = 18

Complexiteit: $\Omega((n - 1)!)$,

immers alle $(n - 1)!$ mogelijke Hamiltonkringen worden bekeken.

- **Lezen/leren bij dit college:**
slides
Paragraaf 3 incl., 3.1–3
- Geen werkcollege (opgaven op papier)
- **Practicumbijeenkomst** programmeeropdracht 1:
dinsdag 4 maart, 09.00–10.45,
Gorlaeus, computerzalen DM.0.09, DM.0.13, DM.0.21
- **Volgend college:**
woensdag 5 maart 2025, 15.15–17.00