

Derde college algoritmiek

19 februari 2025

Complexiteit

Toestand-actie-ruimte

Niet de bedoeling: gebruik (member-)variabele `knoop::niveau`:

```
int binaireboom::hoogte_p(knoop *ingang) {  
  
    if (ingang != nullptr){  
        if ((ingang->links == nullptr) && (ingang->rechts == nullptr))  
            // een blad  
            return ingang->niveau;  
        else if (ingang->links == nullptr) // alleen een rechter kind  
            return hoogte_p(ingang->rechts);  
        else if (ingang->rechts == nullptr) // alleen een linker kind  
            return hoogte_p(ingang->links);  
        else // twee kinderen  
            return max(hoogte_p(ingang->links), hoogte_p(ingang->rechts));  
    }  
    else  
        return 0;  
  
} //binaireboom::hoogte_p
```

Wel de bedoeling: bereken hoogte van subboom zelf:

```
int binaireboom::hoogte_p(knoop *ingang) {  
  
    if (ingang==nullptr) // een boom bestaande uit 1 knoop heeft hoogte 0.  
        return -1;      // dus een lege boom heeft hoogte -1  
    return max(hoogte_p(ingang->links), hoogte_p(ingang->rechts)) + 1;  
  
} // binaireboom::hoogte_p
```

Tijdcomplexiteit ('complexiteit') van een algoritme:

- = hoeveelheid werk verricht door het algoritme
- hangt meestal af van de grootte van de invoer: hoe groter de invoer, hoe groter de complexiteit
- wordt bepaald door het aantal keer dat de **basisoperatie** wordt uitgevoerd
- het belangrijkste is de (asymptotische) groei
- wordt vaak uitgedrukt in **O-notatie** (orde van grootte)
- hangt vaak ook af van het soort invoer: **worst case, best case, average case**

Groei

algoritme	$C(n)$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 1000$
algo1	$10n$	100	1000	10.000
algo2	$100n$	1000	10.000	100.000
algo3	$5n^2$	500	50.000	5.000.000

Voorbeeld 1:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals  
// uitvoer: de grootste waarde
```

```
max := a[0];  
for  $i := 1$  to  $n - 1$  do  
    if (  $a[i] > \text{max}$  ) then  $\leftarrow$  basisoperatie  
        max :=  $a[i]$ ;  
    fi  
od  
return max;
```

Complexiteit: $C(n) = n - 1 \in \Theta(n)$

Voorbeeld 2:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals
// uitvoer: true als alle  $n$  waarden verschillen

  for  $i := 0$  to  $n - 2$  do
    for  $j := i + 1$  to  $n - 1$  do
      if (  $a[i] = a[j]$  ) then  $\leftarrow$  basisoperatie
        return false; fi
    od
  od
return true;
```

Best case complexiteit: ...

Worst case complexiteit: ...

Voorbeeld 2:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals
// uitvoer: true als alle  $n$  waarden verschillen

for  $i := 0$  to  $n - 2$  do
    for  $j := i + 1$  to  $n - 1$  do
        if (  $a[i] = a[j]$  ) then  $\leftarrow$  basisoperatie
            return false; fi
    od
od
return true;
```

Best case complexiteit: $B(n) = 1 \in \Theta(1)$

Worst case complexiteit:

$$W(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n - 1 - i) = \frac{1}{2}n(n - 1) \in \Theta(n^2)$$

(laat constante factoren en kleinere termen weg)

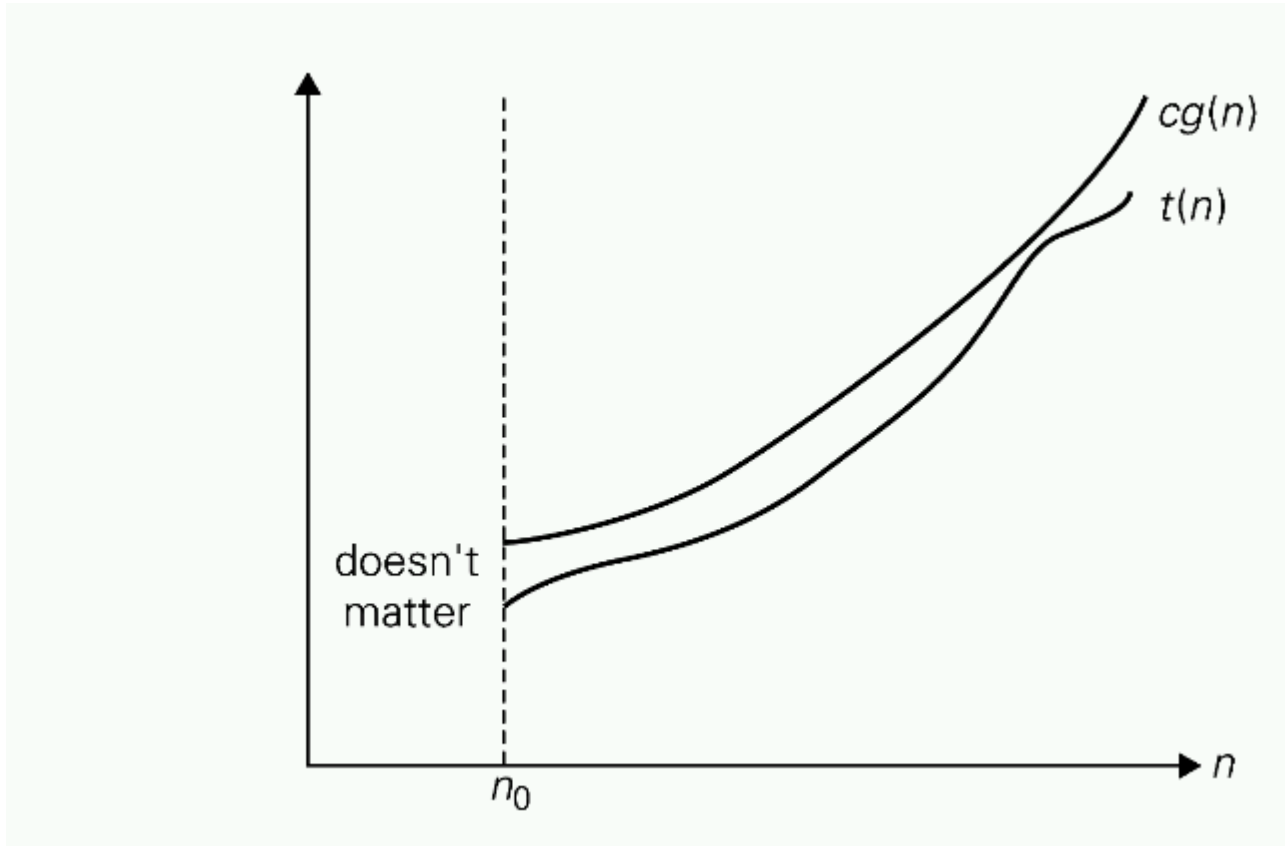
O-notatie beschrijft het asymptotisch gedrag:

$$f \in O(g) \iff \exists c > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0: \\ f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$f \in \Omega(g) \iff \exists c' > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0: \\ f(n) \geq c' \cdot g(n)$$

$$f \in \Theta(g) \iff \exists c_1, c_2 > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0: \\ c_1 \cdot g(n) \geq f(n) \geq c_2 \cdot g(n)$$

Aangezien zowel f als g in onze toepassingen de complexiteit van een algoritme voorstelt is hier steeds $f > 0$ en $g > 0$.



$t \in O(g) \iff \exists c > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0:$

$$t(n) \leq c \cdot g(n)$$

$t(n)$ groeit niet sneller dan $g(n)$

$t \in O(g) \iff \exists c > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0:$

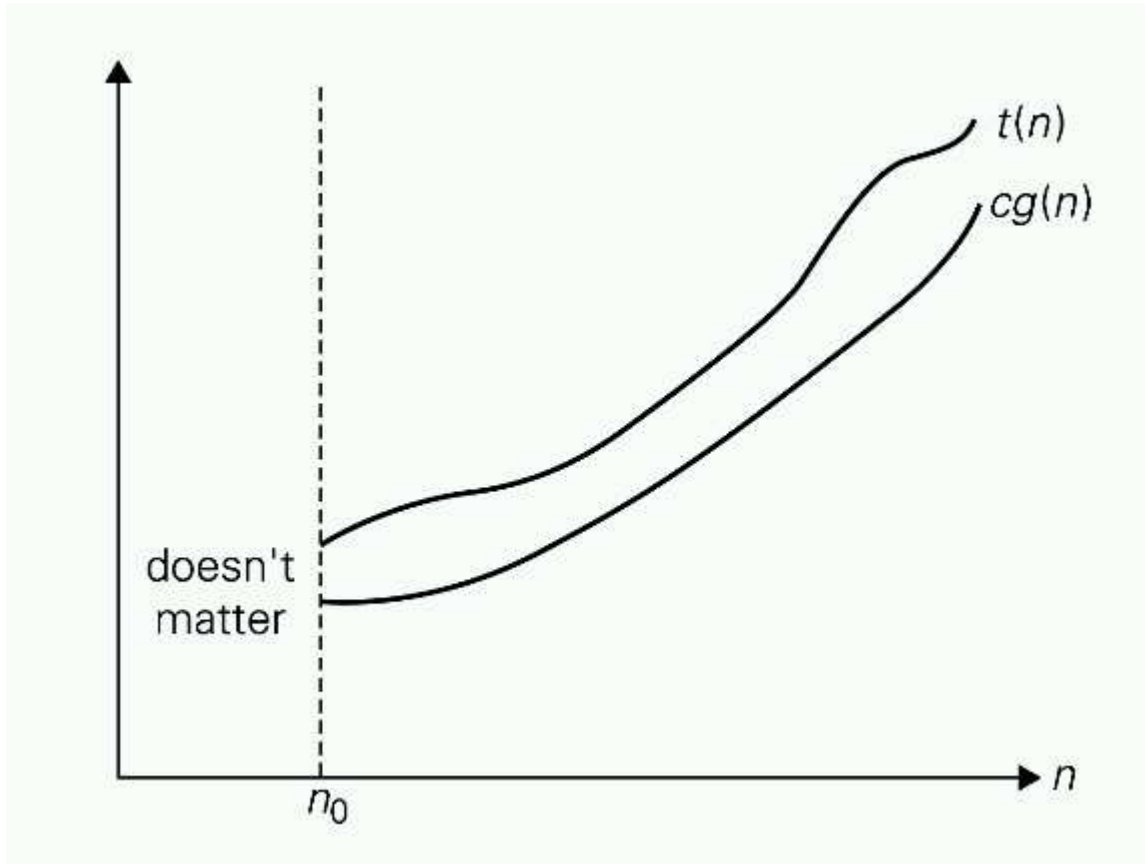
$$t(n) \leq c \cdot g(n)$$

$t(n)$ groeit niet sneller dan $g(n)$

Bijvoorbeeld: $n^2 + 100n \in O(n^2)$

Neem maar $c = 1,1$:

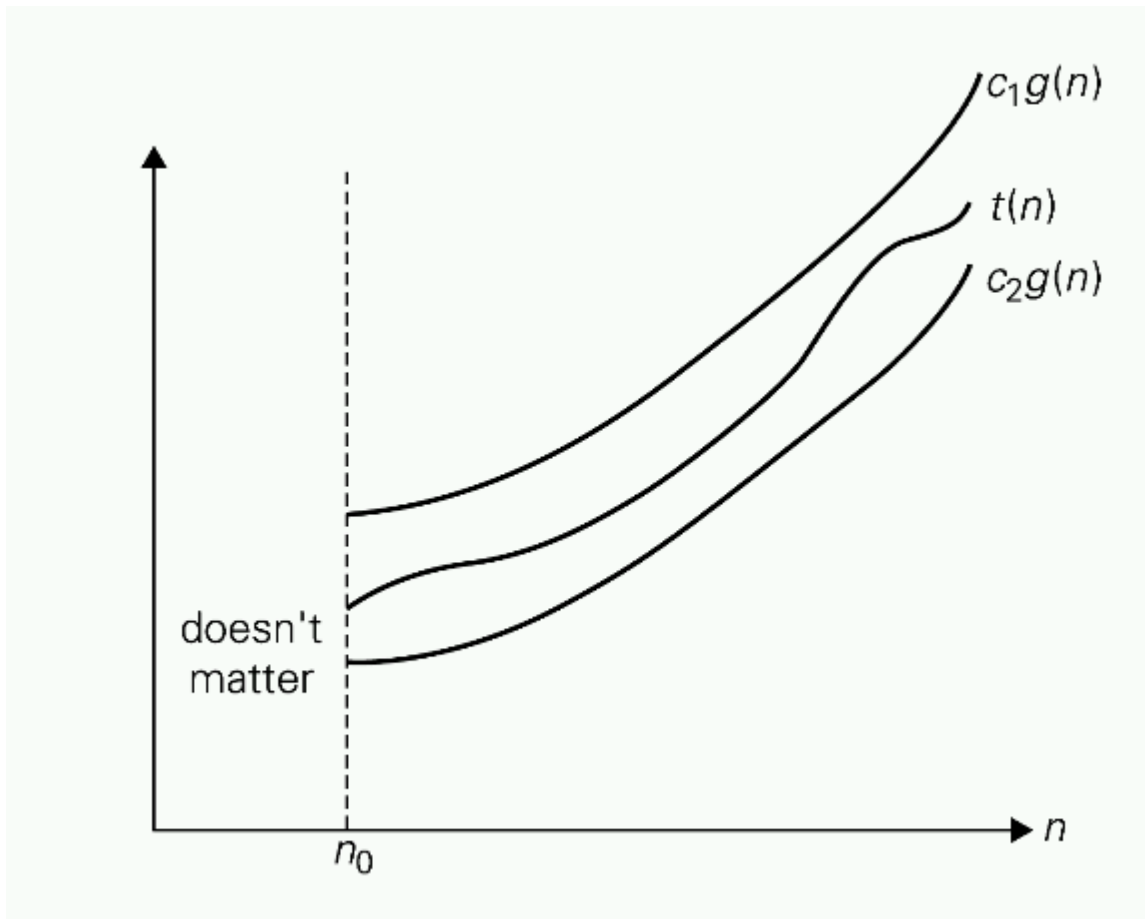
n	$n^2 + 100n$	$c \cdot n^2$
1	101	1,1
10	1100	110
100	20.000	11.000
1000	1.100.000	1.100.000



$t \in \Omega(g) \iff \exists c > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0:$

$$t(n) \geq c \cdot g(n)$$

$t(n)$ groeit minstens zo snel als $g(n)$



$t \in \Theta(g) \iff \exists c_1, c_2 > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0:$

$$c_1 \cdot g(n) \geq t(n) \geq c_2 \cdot g(n)$$

$t(n)$ groeit even snel als $g(n)$ (dus $O + \Omega$)

Stelling:

$$(1) \quad 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \iff f \in \Theta(g)$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f \in O(g), \text{ maar } f \notin \Theta(g)$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff g \in O(f) \text{ maar } g \notin \Theta(f)$$

N	10	50	100	300	1000
$\log_2 N$	3	5	6	8	9
$5N$	50	250	500	1500	5000
$N \cdot \log_2 N$	33	282	665	2469	9966
N^2	100	2500	10.000	90.000	7 cijfers
N^3	1000	125.000	7 cijfers	8 cijfers	10 cijfers
2^N	1024	16 cijfers	31 cijfers	91 cijfers	302 cijfers
$N!$	7 cijfers	65 cijfers	161 cijfers	623 cijfers	onvoorstelbaar
N^N	11 cijfers	85 cijfers	201 cijfers	744 cijfers	onvoorstelbaar

Ter vergelijking:

het aantal protonen in het heelal is een getal met 79 cijfers

het aantal microseconden sinds de Big Bang heeft 24 cijfers

$$(1) n(n-2) \in O(n^3); n(n-2) \in O(n^2); n(n-2) \in \Omega(n^2)$$

$$(2) n \in O(n^2), \text{ maar NIET } n \in \Theta(n^2)$$

$$(3) 2^n \in O(3^n), \text{ maar NIET } 2^n \in \Theta(3^n)$$

$$(4) (n^2 + 1)^{10} \in \Theta(n^{20})$$

$$(5) \sqrt{10n^2 + 7n + 3} \in \Theta(n)$$

$$(6) 2n \log_2(n+2)^2 + (n+2)^2 \log_2(n/2) \in \Theta(n^2 \log_2 n)$$

$$(7) 2^{n+1} + 3^{n-1} \in \Theta(3^n)$$

$$(8) \lfloor \log_2 n \rfloor \in \Theta(\log_2 n); \log_{10} n \in \Theta(\log_2 n)$$

$$(9) 2^n \in O(n!), \text{ maar NIET } 2^n \in \Theta(n!)$$

n	\sqrt{n}	$^{10} \log n$	$^2 \log n$
10	3,16	1	3,32
100	10,00	2	6,64
1.000	31,62	3	9,97
1.000.000	1.000,00	6	19,93
1.000.000.000	31.622,78	9	29,90

De volgende naamgeving wordt meestal gehanteerd:

1	constant
$\log n$	logaritmisch
n	lineair
$n \log n$	n -log- n
n^2	kwadratisch
n^α ($\alpha > 1$)	polynomiaal
2^n	exponentieel
$n!$, n^n , ...	superexponentieel

Voorbeeld 3:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals en  
//          een reeel getal  $k$   
// uitvoer: index  $i$  waarvoor  $a[i] = k$ ;  $-1$  als deze niet  
//          bestaat
```

```
 $i := 0$  ┌──→ basisoperatie  
while (  $i < n$  and  $a[i] \neq k$  ) do  
     $i := i + 1$ ; od  
if (  $i < n$  )  
    return  $i$ ; fi  
return  $-1$ ;
```

best case/worst case/average case: ...

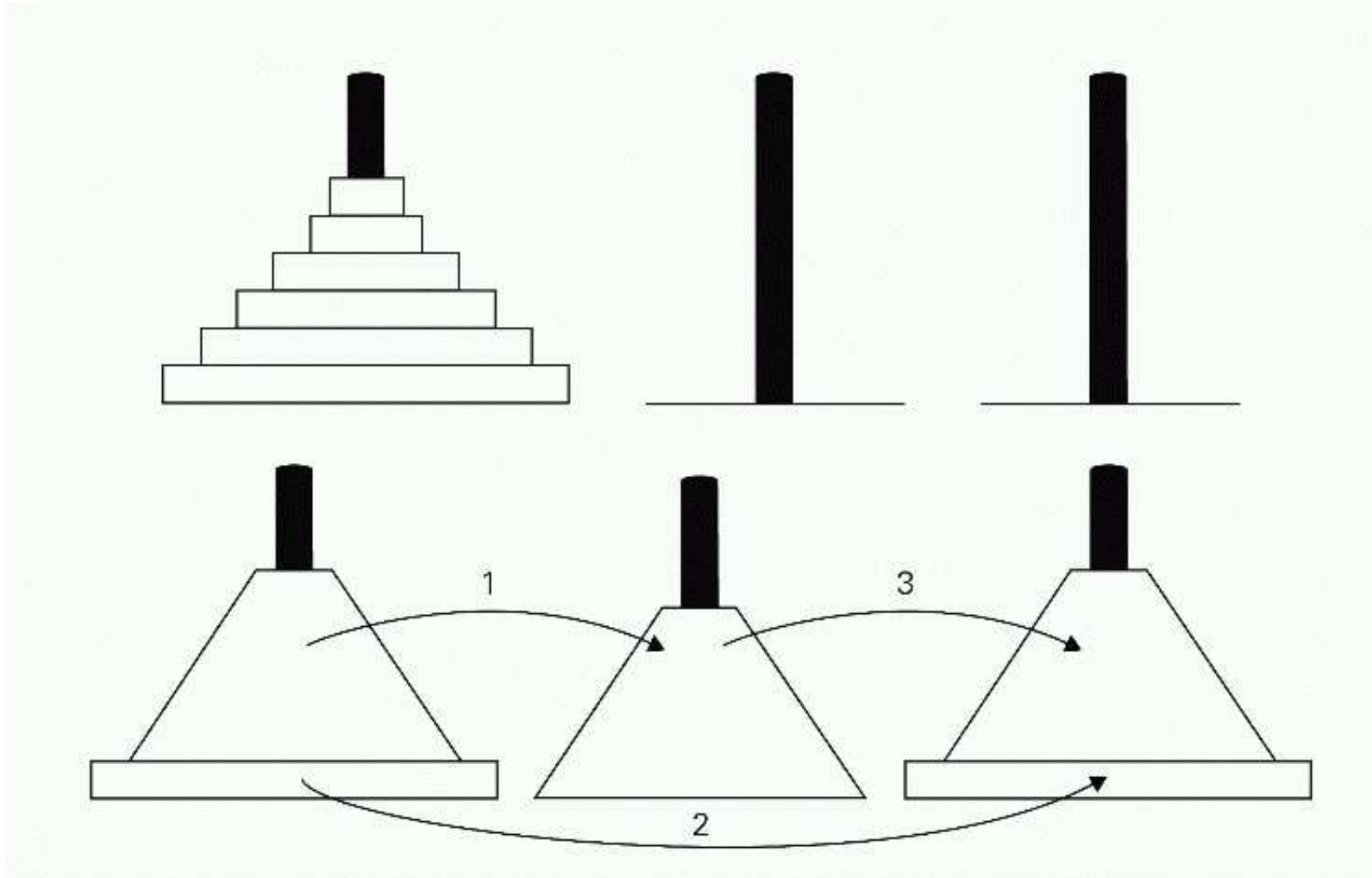
Recursief algoritme voor de berekening van $n!$:

```
int faculteit ( int n ) { // gebruikt:  $n! = n \cdot (n - 1)!$ 
    if ( n == 0 )
        return 1;
    else
        ↴————— basisoperatie
        return n*faculteit(n-1);
} // faculteit
```

$M(n)$ = aantal vermenigvuldigingen (= aantal recursieve aanroepen - 1)
voldoet aan de **recurrente betrekking**:

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(n) = M(n - 1) + 1 \quad \text{voor } n > 0 \end{cases}$$

Oplossing: $M(n) = n \rightarrow$ complexiteit faculteit is $\Theta(n)$.



Recursieve oplossing van de Torens van Hanoi

Een recursief algoritme voor het probleem van de Torens van Hanoi (zie [Programmeermethoden](#)):

```
// zet toren van n stuks (optimaal) van a naar b via c
// print de zetten
void zet (int n, int a, int b, int c) {
    if ( n > 0 ) {
        zet (n-1, a, c, b);
        cout << "zet van " << a << "naar " << b << endl;
        zet (n-1, c, b, a);
    } // if
} // zet
```

- n (het aantal schijven) is een maat voor de grootte van de invoer
- het verzetten van een schijf is de basisoperatie

Laat $M(n)$ = aantal zetten, dan voldoet $M(n)$ aan de **recurrente betrekking**:

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(n) = 2M(n-1) + 1 \quad \text{voor } n > 0 \end{cases}$$

Oplossing (zie college):

$$M(n) = 2^n - 1 \longrightarrow \text{complexiteit zet is } \Theta(2^n).$$

Probleem → **Toestand-actie-ruimte**

Een **toestand-actie-ruimte** (toestand-actie-diagram, state transition diagram, toestandsruimte, state space)

- *Bestaat uit* alle mogelijke **toestanden en acties**
- Begintoestand, eindtoestand(en)
- Een actie veroorzaakt een overgang van de ene (toegelaten) toestand naar een andere
- *Oplossing* van het probleem: een opeenvolging van acties die van de begintoestand naar een eindtoestand leiden

Voorbeeld 1: Old world puzzle (Ex. 1.2.1.)

We hebben een kool, een geit, een wolf en een boer. Deze moeten met een bootje van de ene kant van de rivier naar de andere. In het bootje kan alleen de boer met één ander iets. Als de boer er niet bij is zal de wolf de geit opeten en de geit de kool. De boer is de enige die de boot kan “besturen”.

Vraag: Hoe kan alles naar de andere oever verplaatst worden?





Merk op: de boot ligt altijd aan de oever waar de boer zich bevindt.

De oplossing is een **kortste pad** van de begintoestand naar de eindtoestand: hier zijn er twee, bij beide moet de boer 7 keer de rivier oversteken.



Merk op: de boot ligt altijd aan de oever waar de boer zich bevindt.

De oplossing is een **kortste pad** van de begintoestand naar de eindtoestand: hier zijn er twee, bij beide moet de boer 7 keer de rivier oversteken.

Een leuke variant op dit probleem is het volgende:

We hebben drie professoren en drie studenten. Deze moeten allemaal met een bootje van de ene kant van de rivier naar de andere. In het bootje kunnen hooguit twee personen. Op beide oevers mogen de professoren niet in de meerderheid zijn, anders worden de studenten nerveus.

Vraag: Hoe kan iedereen naar de andere oever verplaatst worden?

Merk op dat in tegenstelling tot het boer-wolf-geit-kool-probleem hier iedereen de boot kan “besturen”. Er moet nu dus in een toestand worden aangegeven waar de boot ligt.

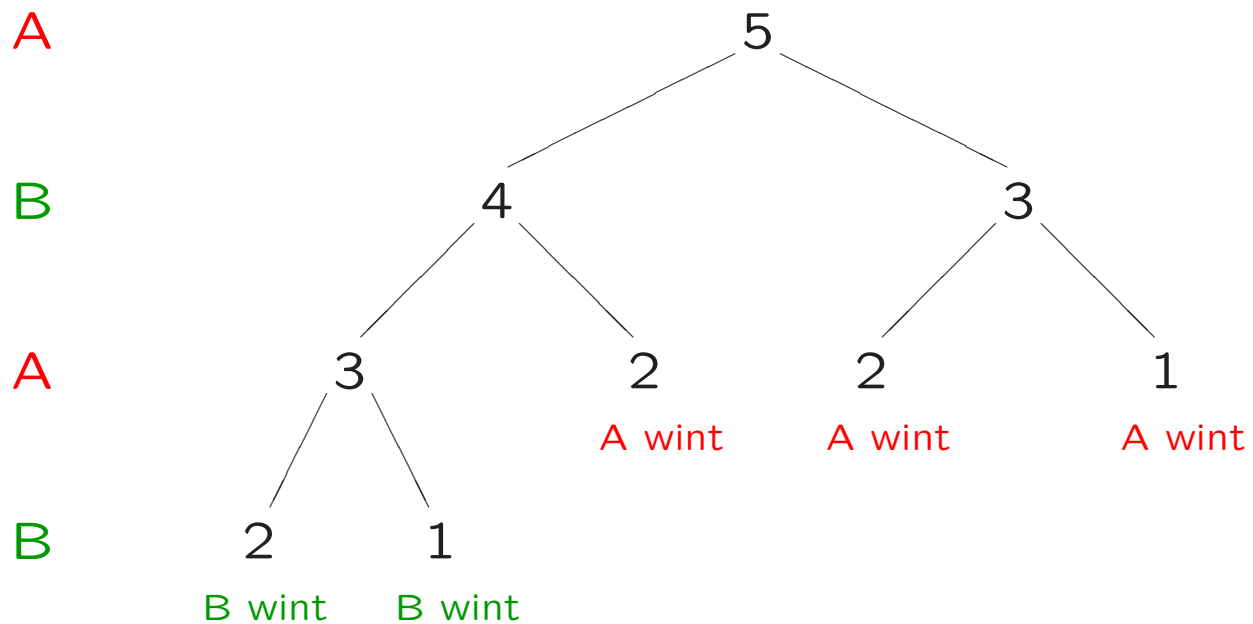
Er zijn 4 verschillende oplossingen, elk met 11 keer overvaren.

Voorbeeld 2: NIM

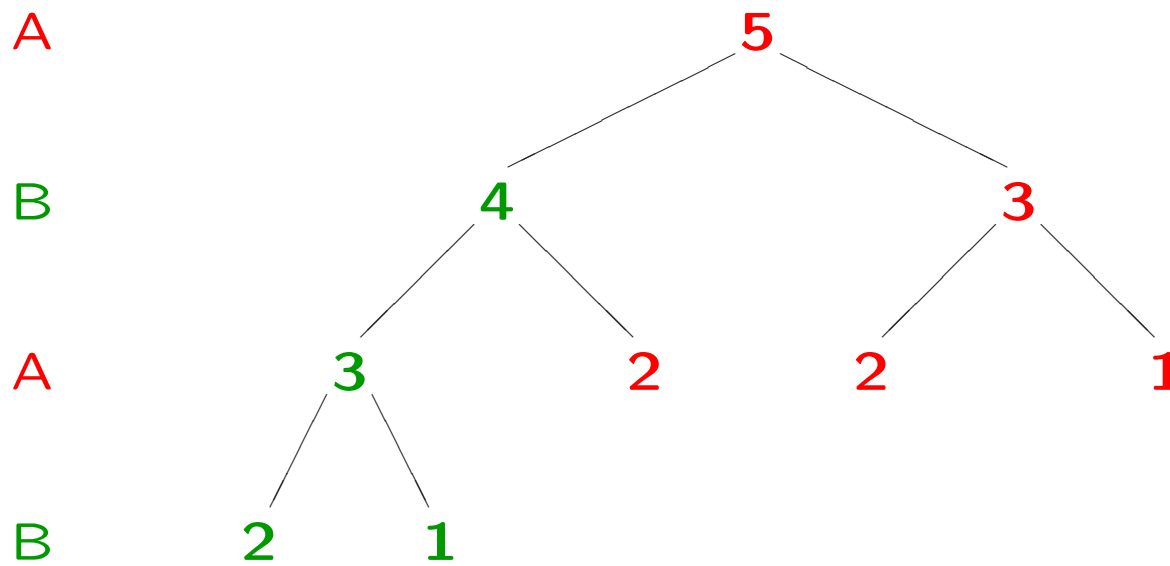
- We beginnen met één stapel van n lucifers (begintoestand)
- Er zijn twee spelers: **A** en **B**
- De spelers pakken om de beurt 1 of 2 lucifers (acties)
- Het spel is afgelopen als er geen lucifers meer op de stapel liggen (eindtoestand)
- De speler die de laatste lucifer(s) pakt heeft gewonnen

Gevraagd: is het spel winnend voor degene die begint?

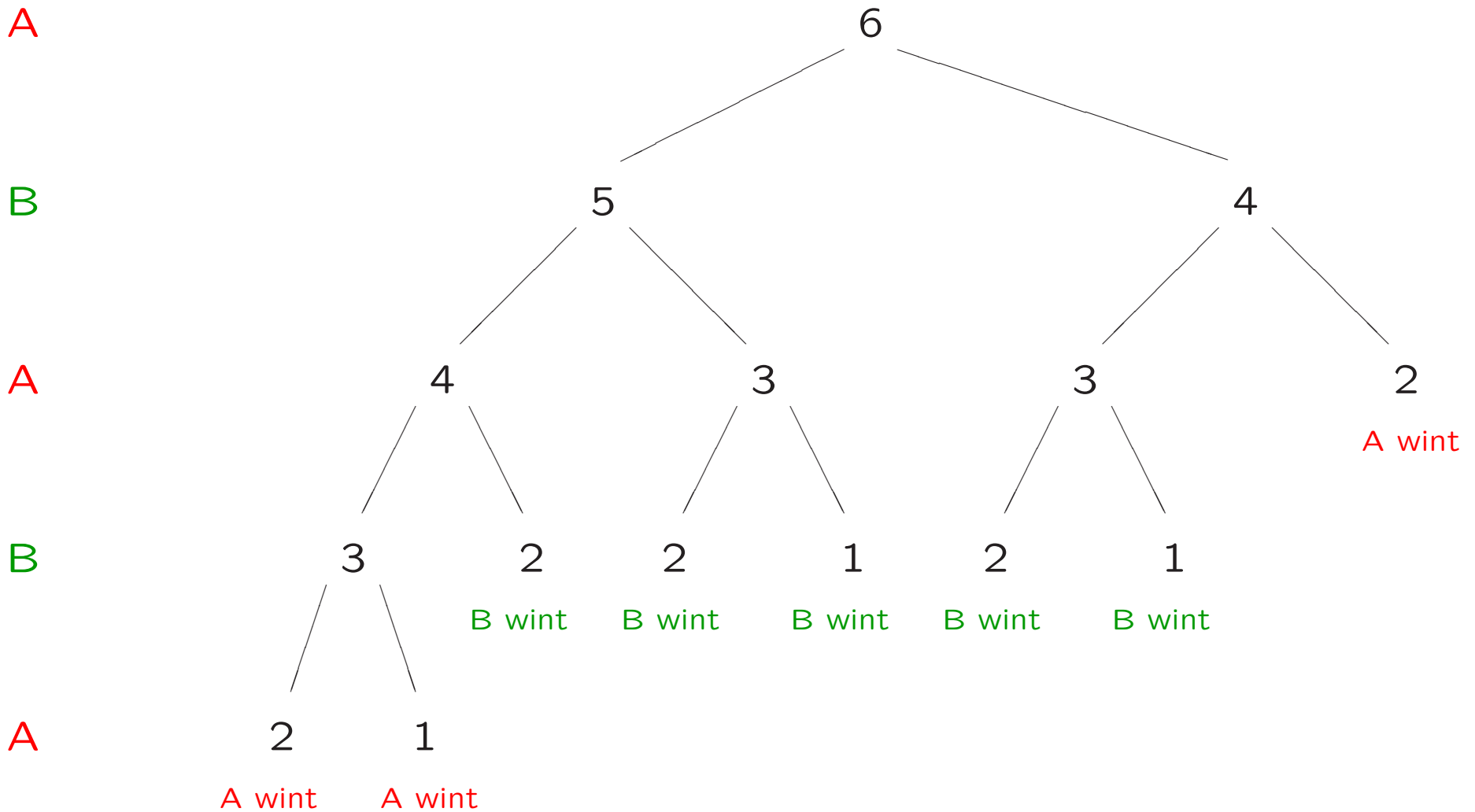
toestand-actie-ruimte (**spelboom**) $n = 5$
 (niet helemaal compleet)



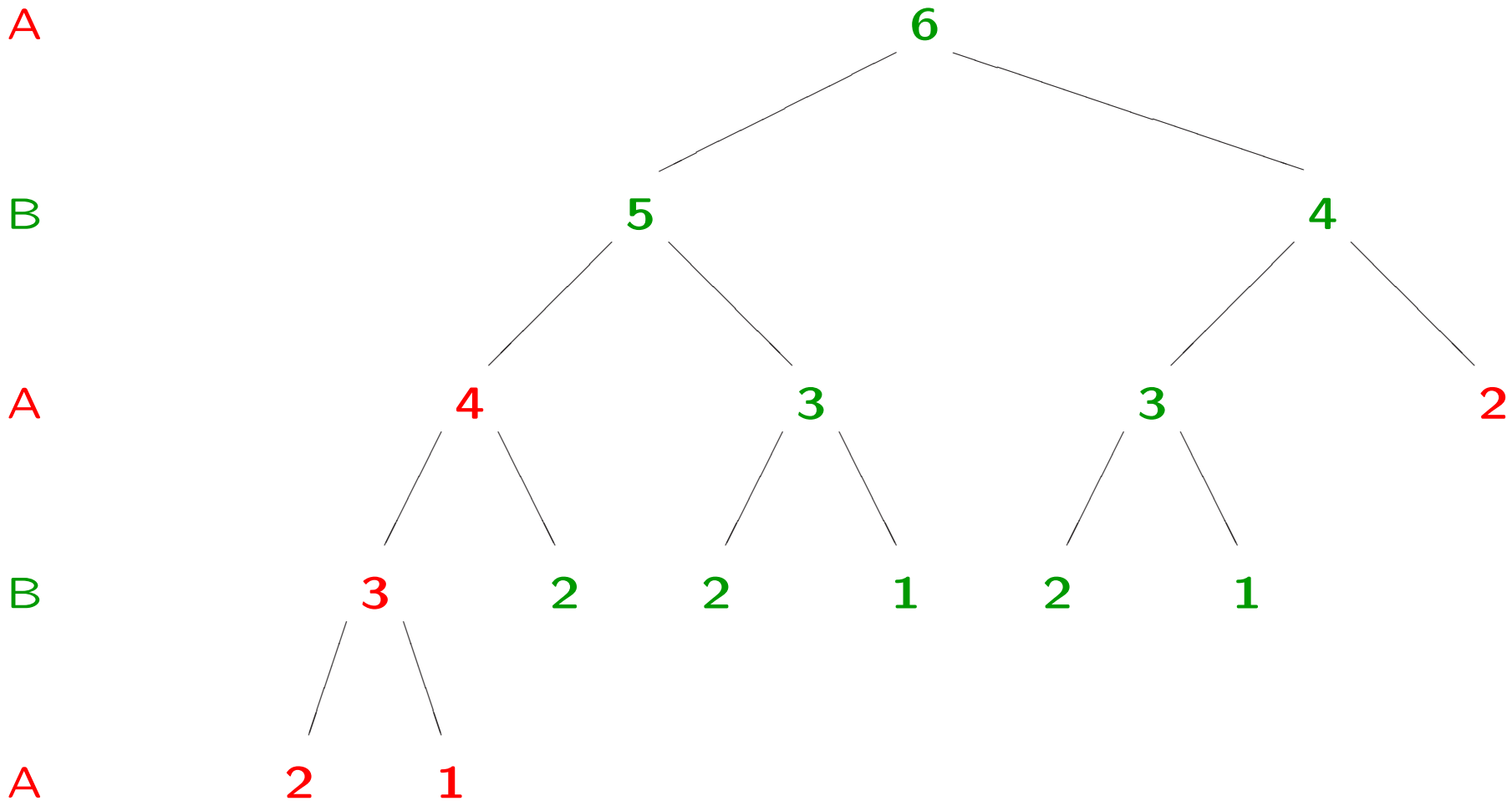
Winnend voor A.
 Winnende zet: 2 lucifers wegnemen



toestand-actie-ruimte (spelboom) $n = 6$



A kan niet winnen (bij perfect spel van B)



- **Lezen/leren bij dit college:**

- Paragraaf 4.5 (subparagraaf 'Searching and Insertion in a Binary Search Tree')

- Paragraaf 2.1–3

- Paragraaf 6.6 (subparagraaf 'Reduction to Graph Problems')

- Paragraaf 4.5 (subparagraaf 'The Game of Nim')

- **Werkcollege:**

- vrijdag 21 februari 2025, 11.00–12.45 (Gorlaeus **BW.0.06**, **BW.0.07**, **BW.0.08**)

- **Opgaven:**

- zie <https://liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/algoritmiek/>

- **Geen Practicumbijeenkomst op dinsdag 25 februari 2025**

- **Volgend college:**

- woensdag 26 februari 2025, 15.15–17.00

- Programmeeropdracht 1...