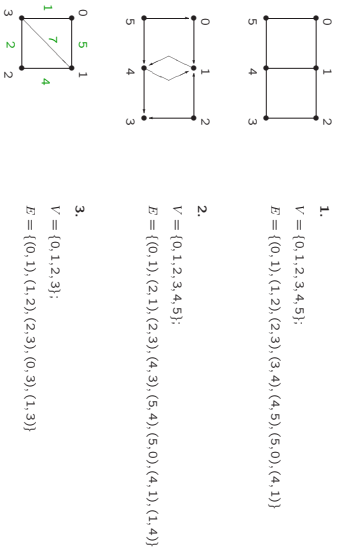


Tweede college algoritmiek

16 februari 2012

Grafen en bomen

1



3

Twee zeer bekende graafproblemen:

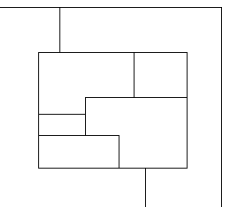
Koningsberger bruggen probleem **Vierkleurenprobleem**



Hoezo graafproblemen?

5

Kleur de landkaart met maximaal vier kleuren onder de restrictie dat buurlanden een verschillende kleur hebben:



7

Een **graaf** G wordt gedefinieerd als een paar (V, E) , waarbij V een eindige verzameling is van **knopen** (vertices) en E een verzameling van paren van knopen: de **takken/pijlen** (edges). Een tak/pijl (u, v) verbindt de knopen u en v met elkaar.

Terminologie:

- ongerichte/gerichte graaf
- gewogen graaf
- paden en cykels/kringen
- samenhangend
- acyclisch

2

Een **pad** van u naar v is een rij knopen waarvoor geldt dat tussen elk tweetal opeenvolgende knopen uit die rij een tak zit (resp. een pijl loopt van de ene naar de volgende knoop; dan: gericht pad).

De lengte van een pad = het aantal takken op dat pad = het aantal knopen - 1.

Als alle knopen verschillend zijn heet het pad **enkelvoudig**.

Een **kring** in een ongerichte graaf is een pad met minstens 3 knopen, dat begint en eindigt in dezelfde knoop en dat geen enkele tak meer dan één keer bevat. Analooz gerichte graaf.

Een ongerichte graaf heet **samenhangend** als er tussen elk tweetal knopen u en v een pad loopt.

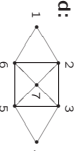
Een graaf die geen kringen bevat heet **acyclisch**.

4

Definitie: een wandeling (pad) in een ongerichte graaf die terugkeert in zijn beginpunt en die alle takken precies één keer doorloopt heet een **Eulerkring***, Analooz: **Eulerpad**.

Probleem. Gegeven een ongerichte graaf G . Heeft G een Eulerkring?

Voorbeeld:

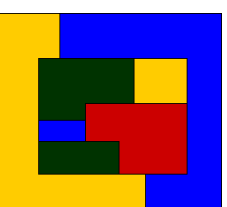
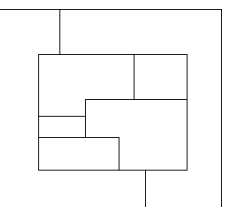


Voor deze graaf is 1 2 3 4 5 3 7 5 6 7 2 6 1 een Eulerkring.

* Een **kring** is een pad met minstens 3 knopen dat begint en eindigt in dezelfde knoop en dat geen enkele tak meer dan één keer doorloopt.

6

Kleurung van de landkaart met maximaal vier kleuren onder de restrictie dat buurlanden een verschillende kleur hebben:



8

Adjacency matrix: de **gerichte graaf** wordt gerepresenteerd door een tweedimensionaal array `int inhoud[n][n]` (n het aantal knopen), waarbij `inhoud[i][j]` aangeeft of er een pijl van i naar j gaat.

Adjacency list: de **gerichte graaf** wordt gerepresenteerd door een eendimensionaal array `buur* inhoud[n]` (n het aantal knopen), waarbij `inhoud[i]` de ingang is tot een lijst van knopen waarvoor er een pijl is van i naar die knoop. De buurlijst bevat dus alle uitgaande pijlen uit i .

```
Adjacency list representatie in C++:
struct buur {
    int knooppunt;
    buur* volgende;
}
buur* inhoud[n];
```

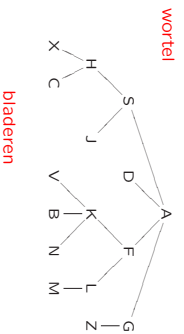
9

Geef een algoritme dat de pijl (i, j) in een gegeven gericht graaf omdraait.

```
// het array graaf (buur* graaf[n]) bevat de gerichte graaf
buur* hulp = graaf[i]; buur* vorige = NULL;
while ( hulp->knooppunt != j ) { // knoop j zoeken
    vorige = hulp; hulp = hulp->volgende;
}
if ( vorige != NULL ) { // verwijder j
    vorige->volgende = hulp->volgende;
}
else { // j is eerste buur van i; verwijder j;
    graaf[i] = hulp->volgende;
}
delete hulp; // gooi buur weg
// voeg nu i vooraan in de buurlijst van j toe
hulp = new buur;
hulp->knooppunt = i; hulp->volgende = graaf[j];
graaf[j] = hulp;
```

11

Terminologie: takken, knopen, nivo, hoogte, wortel, bladeren \leftrightarrow interne knopen



De **wortel** (hier A) is de enige ingang tot de boom.

13

Een **binair boom** is een boom waarin elke knoop ofwel nul, ofwel één ofwel twee kinderen heeft; als een knoop twee kinderen heeft dan is het ene kind het **linkerkind**, het andere het **rechterkind**; als een knoop één kind heeft, dan is dit ofwel een linkerkind, ofwel een rechterkind.

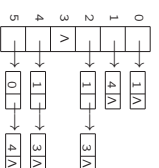


15

Adjacency matrix en adjacency list voor voorbeeldgraaf 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adjacency matrix



adjacency list

10

Definitie: een **boom** is een samenhangende (= uit één stuk bestaande) ongericht graaf zonder cyclis (= kringen).

Wils een speciale knoop aan, de **wortel**. Teken de wortel bovenaan en alle paden vanuit de wortel naar beneden: dit geeft een hiërarchische structuur die lijkt op een stamboom. Dit heet ook wel een **georiënteerde boom**. Meestal spreken we gewoon van een boom.

Stamboomterminologie: kind \leftrightarrow ouder, afstammeling \leftrightarrow voorouder.



In een georiënteerde boom hebben we dus ouder-kind relaties tussen knopen.

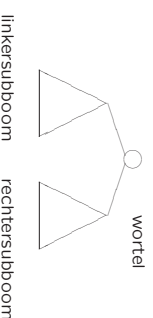
12

- Een acyclische graaf die niet samenhangend is heet een **bos**. Het is namelijk een collectie bomen.
- Voor bomen geldt: aantal takken = aantal knopen - 1.
- Een **geordende boom** is een boom waarin van elke knoop de kinderen geordend zijn: oudste kind, een na oudste kind, ..., jongste kind.
- Onderstaande bomen zijn als georiënteerde bomen wel gelijk, maar als geordende georiënteerde bomen niet:



14

Recursieve definitie: een binair boom is een eindige verzameling knopen die ofwel leeg is, ofwel bestaat uit een speciale knoop (de wortel) en twee disjuncte verzamelingen knopen die samen de rest van alle knopen vormen. Die knoopverzamelingen vormen beide ook weer een binaire boom: de **linkersubboom** en de **rechtsubboom**.



16

```

class knoop { // een struct mag ook
public:
    knoop ( ) { // constructor
        info = 0; links = NULL; rechts = NULL; }
    int info;
    knoop* links;
    knoop* rechts;
}; // knoop

```

De binaire boom wordt gerepresenteerd door middel van een pointer naar de wortel:

knoop* wortel; // de ingang tot de binaire boom

Netter om een klasse te gebruiken: zie [Programmeermethoden](#)

17

```

void preorder (knoop* root) {
    if ( root != NULL ) {
        cout << root->info << endl;
        preorder (root->links);
        preorder (root->rechts);
    } // if
} // preorder

void symmetrisch (knoop* root) {
    if ( root != NULL ) {
        symmetrisch (root->links);
        cout << root->info << endl;
        symmetrisch (root->rechts);
    } // if
} // symmetrisch

```

19

We breken de binaire boom met ingang wortel helemaal af: hiertoe wordt eerst de linkersubboom (recursief) weggegooid, daarna de rechtersubboom en ten slotte de wortel zelf. Aanroep: `breakeaf (wortel);`

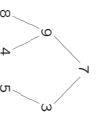
```

void breakeaf (knoop* & root) {
    if ( root != NULL ) {
        breakeaf (root->links); L
        breakeaf (root->rechts); R
        delete root; W
        root = NULL;
    } // if
} // breakeaf

```

21

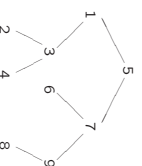
Complete binaire boom:



7 9 3 8 4 5

Binaire zoekboom:

LWR
1 2 3 4 5 6 7 8 9



23

WLR (preorde):

```

bezoek wortel
doorloop linkersubboom WLR
doorloop rechtersubboom WLR

```

LWR (symmetrisch):

```

doorloop linkersubboom LWR
bezoek wortel
doorloop rechtersubboom LWR

```

LRW (postorde): analoog

18

```

We tellen recursief het aantal knopen van een binaire boom met ingang wortel.
Aanroep: int tellen = aantal (wortel);

int aantal (knoop* root) {
    if ( root == NULL ) // lege boom
        return 0;
    else
        return ( 1 + aantal (root->links)
                + aantal (root->rechts) );
} // aantal

```

Merk op dat hier eigenlijk een preorde-wandeling wordt gedaan.

20

- Voor de hoogte h van een binaire boom met n knopen geldt: $\lfloor \log_2 n \rfloor = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1 \leq h \leq n - 1$
- Een **complete** binaire boom is een binaire boom waarbij alle niveo's geheel vol zitten, behalve eventueel het onderste. Op het onderste niveau mogen alleen de meest rechter knopen missen.
- Een **binaire zoekboom** is een binaire boom waarbij voor elke knoop geldt dat de waarde in die knoop groter is dan alle waarden in zijn linkersubboom, en kleiner dan alle waarden in zijn rechtersubboom.

22

- **Lezen/leren bij dit college:**
Paragraaf 1.4 (vanaf/na graafrepresentaties)
- **Werkcollege:**
donderdag 16 februari 2012, 13.45–15.30,
[in computerzaal Paleistuin](#)
- **Opgaven:**
zie <http://www.jlacs.nl/home/rvvlief/algoritmiek/>
- **Volgend college:**
donderdag 23 februari 2012, 11.15–13.00, zaal Plein

24