

# Vijfde college algoritmiek

10 maart 2011

Exhaustive search en  
Backtracking

**Exhaustive search:** brute force benadering voor problemen die te maken hebben met het vinden van een element met een speciale eigenschap binnen een verzameling van bijv. permutaties of deelverzamelingen of toestanden of ...

### Methode:

- . construeer op een systematische manier alle kandidaat-oplossingen, bijvoorbeeld alle permutaties van de getallen 1 t/m  $n$
- . evalueer elk van deze mogelijke oplossingen
- . retourneer een/de kandidaatoplossing met de gevraagde eigenschap (als die bestaat) (\*)

(\*) soms, zoals bij optimalisatieproblemen, *moet* je daartoe alle kandidaatoplossingen gezien hebben

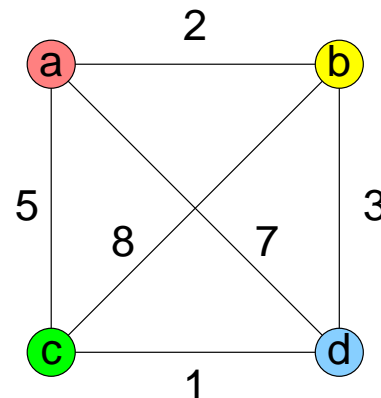
Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

**Gegeven**  $n$  steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn. **Gevraagd:** de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.

**Ofwel:** vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (volledige) graaf.

**Voorbeeld:**

minimale route  
 a b d c a  
 (of a c d b a)



Route	Lengte
$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$	$2 + 8 + 1 + 7 = 18$
$a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a$	$2 + 3 + 1 + 5 = 11$
$a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$	$5 + 8 + 3 + 7 = 23$
$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow a$	$5 + 1 + 3 + 2 = 11$
$a \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$	$7 + 3 + 8 + 5 = 23$
$a \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$	$7 + 1 + 8 + 2 = 18$

**Complexiteit:** minstens  $\Theta((n-1)!)$ , immers alle  $(n-1)!$  mogelijke Hamiltonkringen worden bekeken.

## Knapzakprobleem

**Gegeven**  $n$  objecten, met gewicht  $w_1, \dots, w_n$  en waarde  $v_1, \dots, v_n$ , en een knapzak met capaciteit  $W$ . **Gevraagd:** de meest waardevolle deelverzameling der objecten die in de knapzak past (dus met totaalgewicht  $\leq W$ ).

**Voorbeeld:**

object	gewicht	waarde
1	8	42
2	3	14
3	4	40
4	5	27

knapzakcapaciteit 12

deelverzameling	gewicht	waarde
$\emptyset$	0	0
{1}	8	42
{2}	3	14
{3}	4	40
{4}	5	27
{1, 2}	11	56
{1, 3}	12	82
{1, 4}	13	te zwaar
{2, 3}	7	54
{2, 4}	8	41
{3, 4}	9	67
{1, 2, 3}	15	te zwaar
{1, 2, 4}	16	te zwaar
{1, 3, 4}	17	te zwaar
{2, 3, 4}	12	81
{1, 2, 3, 4}	20	te zwaar

**Complexiteit:** minstens  $\Theta(2^n)$ , immers alle  $2^n$  deelverzamelingen van  $n$  objecten worden bekeken.

**Assignmentproblem** (toewijzingsprobleem)

**Gegeven**  $n$  personen en  $n$  taken (jobs). Persoon  $i$  kan taak  $j$  doen voor  $\text{kosten}[i][j]$  euro. **Gevraagd**: de/een toewijzing van de personen aan de jobs (één persoon per job en één job per persoon) met minimale kosten.

**Voorbeeld:**

	job 1	job 2	job 3	job 4
Anna	9	2	7	8
Bob	6	4	3	7
Carla	5	8	1	8
David	7	6	9	4

$$n = 4$$

	job 1	job 2	job 3	job 4
Anna	9	2	7	8
Bob	6	4	3	7
Carla	5	8	1	8
David	7	6	9	4

1,2,3,4 -> 9+4+1+4 = 18	2,3,1,4 -> ..	3,4,1,2 -> ..
1,2,4,3 -> 9+4+8+9 = 30	2,3,4,1 -> ..	3,4,2,1 -> ..
1,3,2,4 -> 9+3+8+4 = 24	2,4,1,3 -> ..	4,1,2,3 -> ..
1,3,4,2 -> 9+3+8+6 = 26	2,4,3,1 -> ..	4,1,3,2 -> ..
1,4,2,3 -> 9+7+8+9 = 33	3,1,2,4 -> ..	4,2,1,3 -> ..
1,4,3,2 -> 9+7+1+6 = 23	3,1,4,2 -> ..	4,2,3,1 -> ..
2,1,3,4 -> 2+6+1+4 = 13	3,2,1,4 -> ..	4,3,1,2 -> ..
2,1,4,3 -> 2+6+8+9 = 25	3,2,4,1 -> ..	4,3,2,1 -> ..

De goedkoopste toewijzing is hier 2,1,3,4, met kosten 13.

**Complexiteit:** minstens  $\Theta(n!)$ , immers alle  $n!$  mogelijke toewijzingen worden bekeken.



- \* Exhaustive search algoritmen werken **alleen voor kleine probleeminstanties** in acceptabele tijd
- \* Voor veel problemen zijn er veel efficiëntere algoritmen bekend (Eulerkring, kortste paden, toewijzingsprobleem)
- \* Voor andere problemen is exhaustive search (of varianten daarop) in essentie de enig bekende oplossing (handelsreizigersprobleem, knapzakprobleem)

Bij veel problemen gaat het erom een element met een speciale eigenschap te vinden binnen een ruimte die exponentieel groeit als functie van de invoergrootte. Dan wordt meestal backtracking gebruikt als goed alternatief voor ES.

**Exhaustive search** genereert alle kandidaatoplossingen en haalt daar het speciale element tussenuit.

### Backtracking

- bouwt kandidaatoplossingen component voor component op,
- kijkt al tijdens de constructie of de deeloplossing nog tot een oplossing kan leiden en
- zo niet, breidt dan de deeloplossing niet verder uit

Op deze manier spaar je soms veel werk uit en kun je dus grotere probleeminstanties oplossen.

**Backtracking** versus **exhaustive search**

Exhaustive search bekijkt *alle* volledige kandidaatoplossingen.

Backtracking controleert telkens van deeloplossingen of ze nog aan de eisen/restricties voldoen; zo niet, dan weet je zeker dat alle uitbreidingen van deze oplossing ook niet voldoen, dus die hoef je dan niet meer expliciet te bekijken.

**Voorbeeld**

Gegeven de rij  $A = 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 7$ .

Gevraagd: de/een langste *stijgende* deelrij (met volgorde der elementen als in  $A$  zelf).

**Exhaustive search.** Genereer alle  $2^{10}$  deelrijtjes van  $A$  en controleer van elk daarvan of hij stijgend is en bepaal wat de langste deelrij is.

**Backtracking.** Bouw de deelrijtjes stap voor stap op (hoe?) en controleer na elke stap of het deelrijtje nog wel stijgend is. Zo niet, dan hoeft het rijtje niet meer uitgebreid te worden (het kan toch niets worden). Houd de lengte van het deelrijtje bij en vergelijk die met de lengte van de tot dusver gevonden langste deelrij.

Deze methode kan erg veel werk uitsparen. Bijvoorbeeld het deelrijtje 3, 1 is al niet stijgend, dus alle  $2^8$  deelrijtjes van  $A$  die met 3, 1 beginnen zeker ook niet. Deze hoeven bij backtracking dus niet allemaal te worden gegenereerd.

## Basisidee **backtracking**

- bouw een oplossing stap voor stap op en controleer steeds of de deeloplossing in conflict komt met de restricties (en nog wel tot een oplossing kan leiden)
- op elk moment kun je kiezen uit een aantal mogelijke vervolgstappen; maak een keuze en ga langs die weg verder met het opbouwen van de oplossing
- als een keuze op niets uitloopt, herzie je deze keuze en probeer je een andere mogelijkheid

## Vergelijk

- het vinden van de uitgang in een doolhof: loop steeds verder en als je bij het zoeken vastloopt, ga terug op je pad om het laatste open alternatief te proberen

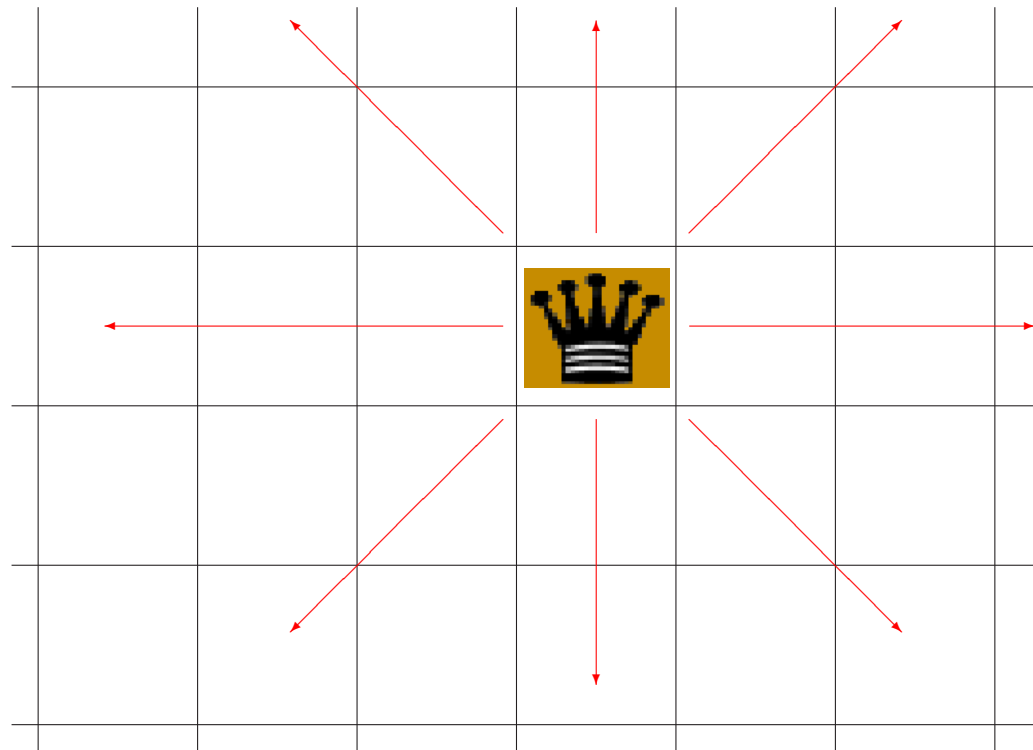
Het **acht koninginnenprobleem** luidt als volgt:

1. Kun je 8 dames (koninginnen) op een 8 bij 8 schaakbord zetten zonder dat zij elkaar aanvallen (= in één keer kunnen slaan)?
2. Zo ja, op hoeveel verschillende manieren kan dat?

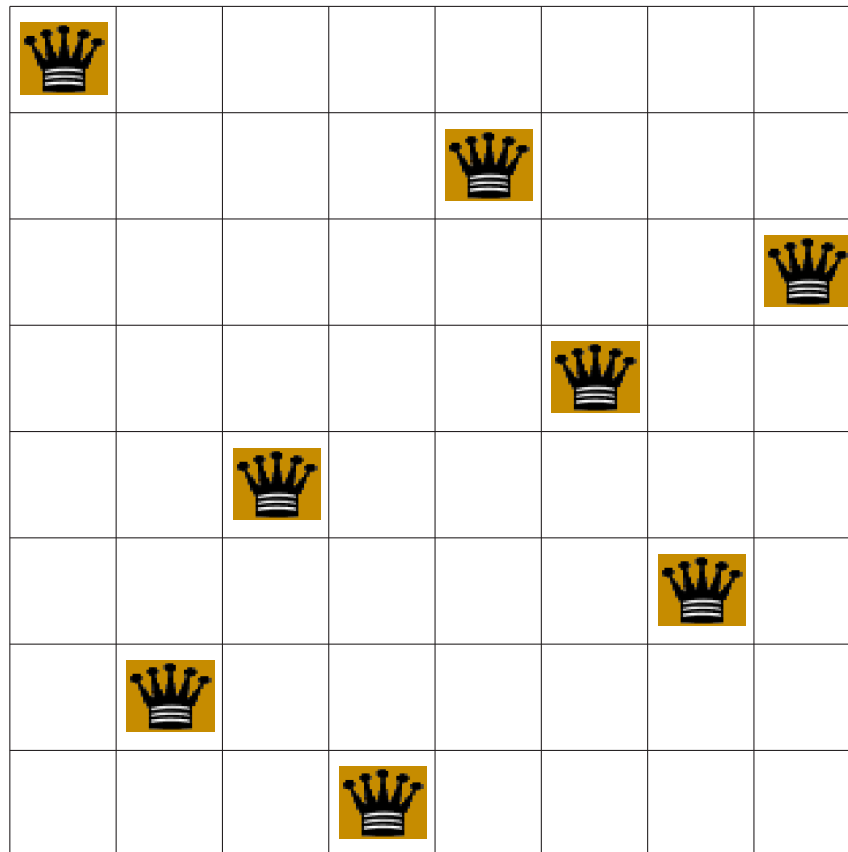
En nu **algemeen**:

Op hoeveel manieren kun je  $n$  dames op een  $n$  bij  $n$  bord plaatsen zonder dat zij elkaar aanvallen?

Een dame kan in één zet een willekeurig aantal vakjes naar links, rechts, onder, boven of diagonaal schuiven.



Een oplossing is onderstaande configuratie:

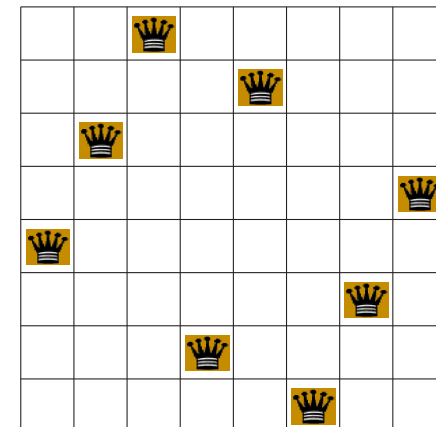
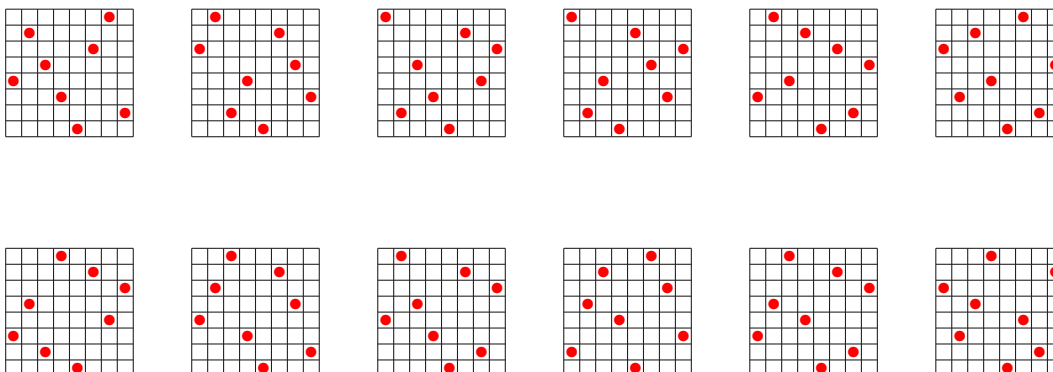


dit correspondeert met  
de volgende permutatie:

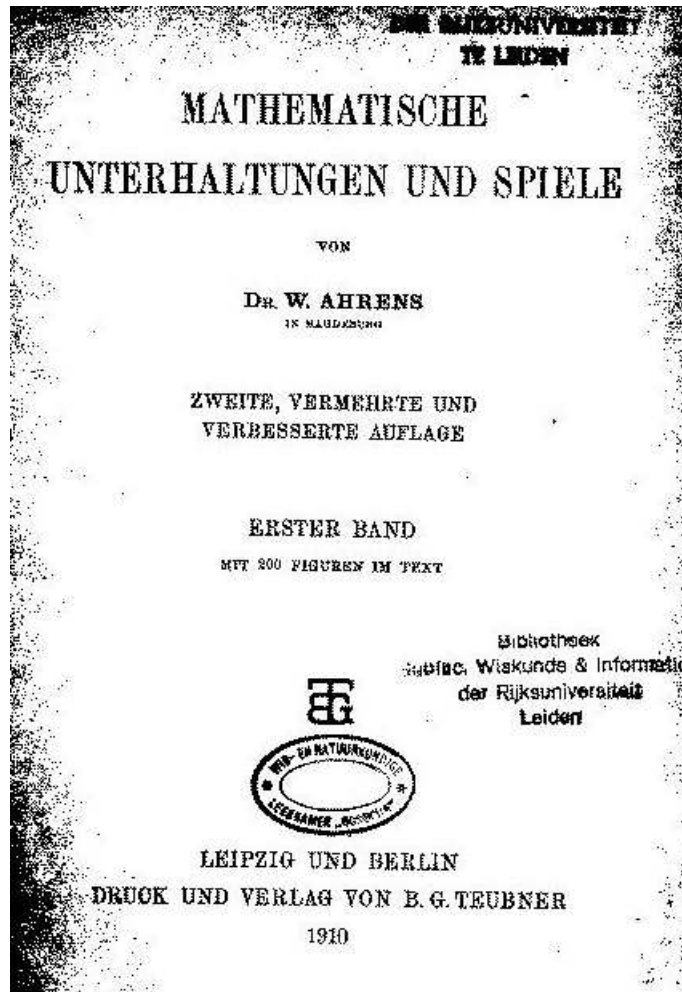
1 5 8 6 3 7 2 4



Op het  $8 \times 8$  schaakbord zijn er 92 oplossingen. In essentie zijn er 12 verschillende oplossingen, waaruit je door draaien en spiegelen (8 mogelijkheden) ze allemaal kunt maken. Er is één wat meer symmetrische oplossing.



$n$	aantal	echt aantal	$n!$
1	1	1	1
2	0	0	2
3	0	0	6
4	2	1	24
5	10	2	120
6	4	1	720
7	40	6	5040
8	92	12	40.320
9	352	46	362.880
10	724	92	3.628.800
11	2680	341	39.916.800
12	14.200	1787	479.001.600
13	73.712	9233	
14	365.596		



Kapitel IX.

Das Achtköniginnenproblem.

*Ein guter Mathematiker ist ein guter Schachspieler.*  
 JEAN PAUL  
*„Die unsterbliche Lüge“*, Kröner'scher Verlag.  
*Die Schachspieler sind weltliche Leute, die trüben keine*  
 Himmeln.

*Wenn wir dem Schachspiel hingen in Frankreich, werden,*  
*So sind wir die besten Spieler der Welt.*  
 Aus einem Gedicht des Muhammad ibn Scherif.  
 übers. v. Hermann-Pogatzki

§ 1. Historische Einleitung.

In der „Illustrierten Zeitung“ vom 1. Juni 1850 (Nr. 361, 14. Bd., p. 352) findet sich unter der Rubrik „Schach“ „Eine in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe von Herrn Dr. Nauck in Schleusingen“ folgenden Inhalts: „Man kann 8 Schachfiguren, von denen jede den Rang einer Königin hat, auf dem Brett so aufstellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.“<sup>1)</sup> In der Nummer vom 21. September

<sup>1)</sup> „Wesit“ für unser „Königin“. Ich entnehme dies Wort aus A. v. d. Linde, „Geschichte u. Literatur des Schachspiels“, II, p. 257.

<sup>2)</sup> Irrtümlicherweise wird diese Stelle zumeist als das erste Vorkommen unseres Problems zitiert. Die Aufgabe ist jedoch bereits in der Schachzeitung, herausgegeben von der Berliner Schachgesellschaft, Bd. III, 1848, p. 363 von einem sogenannten „Schachfreund“ gestellt worden, und zwar war, wie Max Lange („Handbuch der Schachaufgaben“, Leipzig 1882, p. 30, Anm. 6) nach einer direkten persönlichen Mitteilung<sup>3)</sup> angibt, dieser „Schachfreund“ Max Bessel in Ansbach. — Wenn wir trotzdem oben die Geschichte des Problems an jene Nauck'sche Behandlung anknüpfen, so bestimmt uns hierbei der Umstand, daß die Fragestellung in der „Schachzeitung“ zunächst nur 3 spezielle Lösungen (s. Schachzeitung IV, 1848, p. 40) gewollt und anscheinend überhaupt kein sonderliches Interesse für unser Problem

$n$	Stammlösungen				Gesamt- zahl aller Lösungen
	doppelt- symme- trische	einfach- symme- trische	un- symme- trische	zu- sammen	
2				0	0
3				0	0
4	1			1	2
5	1		1	2	10
6		1		1	4
7		2	4	6	40
8		1	11	12	92
9		4	42	46	352
10		3	89	92	724
11		12	329	341	2680
12	4	18	1744	1766	14032

Een **brute force (exhaustive search)** aanpak:

Genereer alle mogelijke configuraties van  $n$  dames op een  $n$  bij  $n$  bord, en controleer van elk daarvan of de dames elkaar al dan niet aanvallen.

Het aantal te controleren kandidaatoplossingen is hier exponentieel:

- $n^n$  onder de aanname: één dame per rij
- $n!$  onder de aanname: één dame per rij en één per kolom; dit zijn gewoon alle permutaties van 1 t/m  $n$

### **Basisidee** backtracking

- bouw een oplossing stap voor stap op en controleer steeds of de deeloplossing in conflict komt met de restricties (en nog wel tot een oplossing kan leiden)
- op elk moment kun je kiezen uit een aantal mogelijke vervolgstappen; maak een keuze en ga langs die weg verder met het opbouwen van de oplossing
- als een keuze op niets uitloopt, herzie je deze keuze en probeer je een andere mogelijkheid

### **Vergelijk**

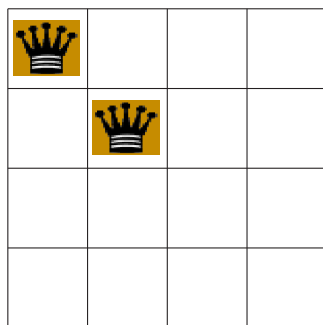
- het vinden van de uitgang in een doolhof: loop steeds verder en als je bij het zoeken vastloopt, ga terug op je pad om het laatste open alternatief te proberen

## Backtracking versus exhaustive search

Exhaustive search kijkt *alle* volledige kandidaatoplossingen. Dat zijn hier alle permutaties van 1 t/m  $n$ .

Backtracking controleert telkens van deeloplossingen of ze nog aan de eisen/restricties voldoen; zo niet, dan weet je zeker dat alle uitbreidingen van deze deeloplossing ook niet voldoen, dus die hoef je dan niet meer expliciet te bekijken. *Soms* spaar je zo heel veel uit.

### Voorbeeld:



Alle  $(n - 2)!$  kandidaatoplossingen met de eerste twee dames op de aangegeven posities behoeven niet verder onderzocht te worden!

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

oplossing 1

	♔		
			♔
♔			
		♔	

oplossing 2

		♔	
♔			
			♔
	♔		



Alle oplossingen voor het  $n$  bij  $n$  bord kunnen we vinden met behulp van **backtracking**.

- plaats de dames een voor een
- probeer de dame in alle kolommen:
  - als ze geplaatst kan worden, ga dan op dezelfde manier verder met de *volgende* dame
  - zo niet: probeer haar in de volgende kolom (keuze herzien)
- als ze nergens geplaatst kan worden, verschuif dan de *vorige* dame: **eerdere keuze herzien!**

Als de rij-de dame in alle  $n$  kolommen is geprobeerd, wordt de dame uit de vorige rij herzien, dus een plek naar rechts gezet, etc, ...

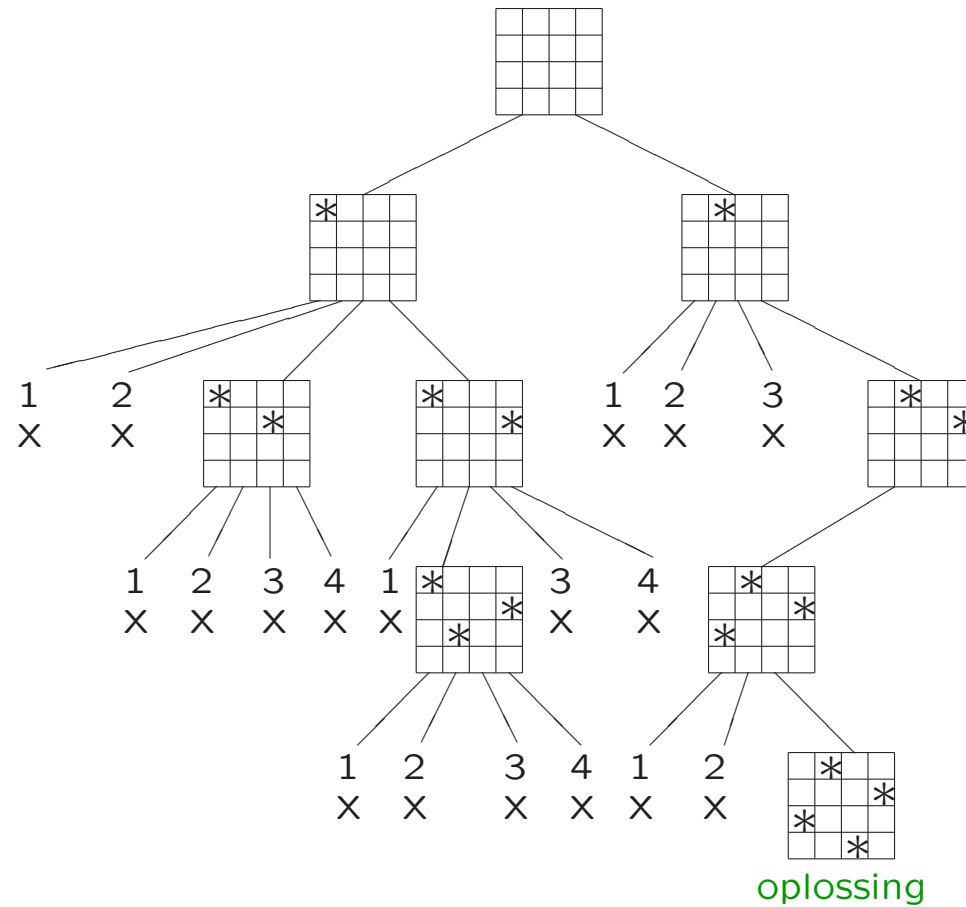
Bij de **recursieve** oplossing wordt automatisch een niveau teruggesprongen, bij de **iteratieve** oplossing moeten we dit zelf expliciet doen.

```
void zetdames (int n, int rij, int stand[], int & aantal) {
    // probeert de rij-de dame neer te zetten; de eerste rij-1
    // dames staan al goed: backtracking met recursie
    int kolom;
    if (rij == n+1) {
        drukaf (n, stand); // druk goede stand af
        aantal++; // en tel het aantal goede standen
    } // if
    else
        for (kolom = 1; kolom <= n; kolom++) {
            stand[rij] = kolom;
            if (geenaanval (rij, stand))
                zetdames (n, rij+1, stand, aantal);
        } // for
    } // zetdames
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int MAX = 20;
bool geenaanval (int rij, int stand[ ]) {
    bool veilig = true; int hulprijs = 1;
    while (veilig && (hulprij < rij)) {
        veilig = ((stand[rij] != stand[hulprij]) && (stand[rij]-stand[hulprij] !=
            rij-hulprij) && (stand[rij]-stand[hulprij] != hulprij-rij));
        hulprij++; }//while
    return veilig; }//geenaanval
void drukaf (int n, int stand[ ]) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) cout << stand[i] << " ";
    cout << endl; }//drukaf
void zetdames (int n, int rij, int stand[ ], int & aantal) {
    int kolom;
    if (rij == n+1) { drukaf (n, stand); aantal++; }//if
    else
        for (kolom = 1; kolom <= n; kolom++) { stand[rij] = kolom;
            if (geenaanval (rij, stand)) zetdames (n, rij+1, stand, aantal); }//for
}//zetdames
int main ( ) {
    int stand[MAX]; int grootte; int teller = 0;
    do {
        cout << "Grootte schaakbord ( < " << MAX << " ) .. "; cin >> grootte;
    } while (grootte < 1 || grootte >= MAX);
    zetdames (grootte, 1, stand, teller);
    cout << endl << "Aantal: " << teller << endl << endl; return 0;
}//main
```

Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

```
void zetdames (int n) { // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0; // zet eerste dame klaar
    while (rij > 0) {
        stand[rij]++; // volgende kolom
        while ((stand[rij] <= n) && (!geenaanval (rij, stand)))
            stand[rij]++; // eerste de beste goede kolom
        if (stand[rij] <= n)
            if (rij == n) // n-de dame gezet
                drukaf (n, stand);
            else { // nog niet alle dames gezet
                rij++;
                stand[rij] = 0;
            }
        else // alle kolommen van een rij geprobeerd
            rij--; // vorige dame herzien
    } // while
} // zetdames
```

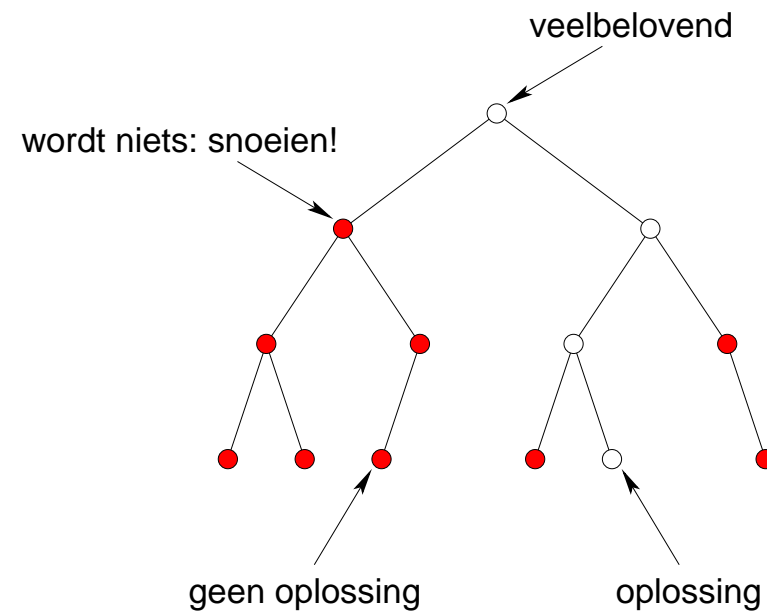
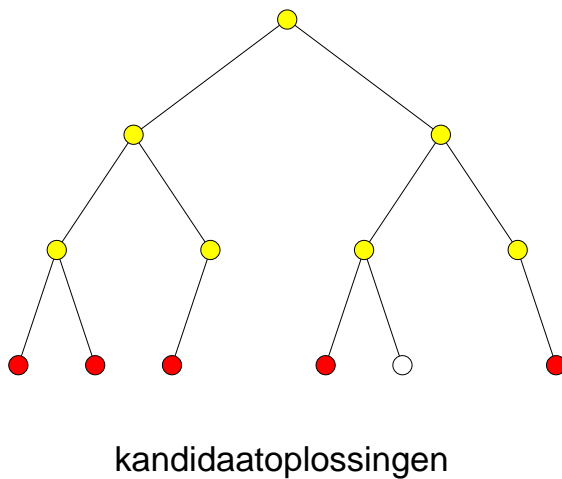


x: deeloplossing niet verder uitbreiden, keuze herzien

Om de werking van backtracking te *beschrijven* kunnen we een **state-space tree (toestand-actie-boom)** gebruiken.

- speciaal soort toestandsruimte
- toestand (=knoop)  $\iff$  deeloplossing;  
actie (=tak)  $\iff$  keuze uitbreiding deeloplossing
- blad  $\iff$  (kandidaat)oplossing
- pad van wortel naar blad  $\iff$  stap-voor-stap-constructie van (kandidaat)oplossing

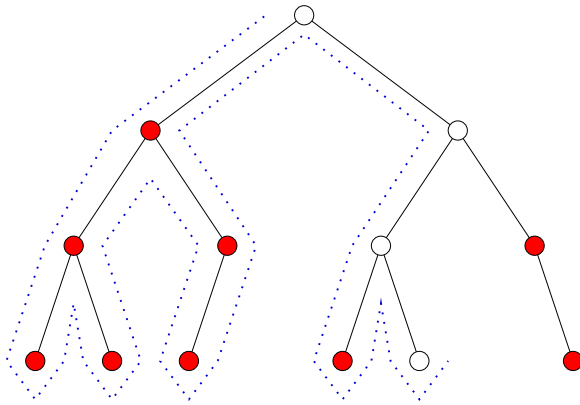
Exhaustive search (met stap-voor-stap-constructie van kandidaatoplossingen) doorloopt de hele boom en evalueert alle bladeren. Backtracking stopt met het doorlopen van een subboom bij een knoop als de betreffende knoop nooit tot een oplossing kan leiden (en backtrackt dan naar de ouder van die knoop om van daaruit verder te zoeken).



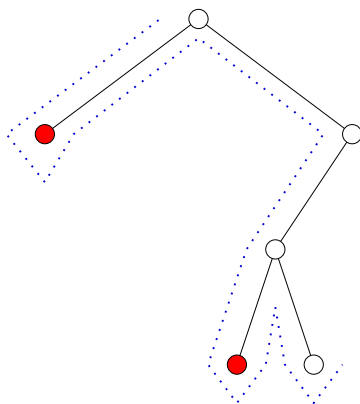
**Exhaustive search:**  
de hele boom wordt bekeken (tot een goede oplossing is gevonden)

**Backtracking:** hele subbomen kunnen soms worden **gesnoeid**





Backtracking doorzoekt de state-space tree via **depth first search**.



Als het meezit wordt er flink gesnoeid.

De volledige toestandsruimte (state space) is **exponentieel**:

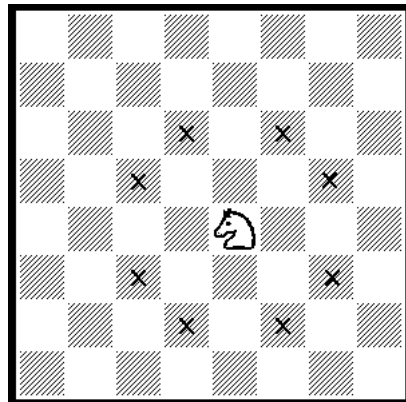
- 1 begintoestand (leeg bord)
- $n!$  eindtoestanden ( $n$  dames geplaatst)(\*)
- $n + n * (n - 1) + n * (n - 1) * (n - 2) + \dots + n * (n - 1) * \dots * 2$  tussen-gelegen toestanden (de eerste 'zoveel' dames geplaatst)(\*)

Backtracking zal voor grote probleeminstanties toch exponentieel zijn.

(\*) We bekijken alleen toestanden met hooguit één dame per rij en hooguit één per kolom.

**Vraag:**

Hoeveel verschillende series van  $m * n - 1$  sprongen van het paard zijn er op een  $m$  bij  $n$  bord, zodat elk veld precies één keer bezocht wordt?



beweging van het paard

1	14	17	20	11	8	5
16	19	12	3	6	21	10
13	2	15	18	9	4	7

een oplossing op het 3 bij 7 bord

- **Werkcollege** brute force en backtracking

donderdag 10 maart 2011, 13:45–15:30, in zaal Archipel

- **Opgaven:**

zie <http://www.liacs.nl/home/rvvliet/algoritmiek/>

- **Volgend college:**

donderdag 17 maart 2011