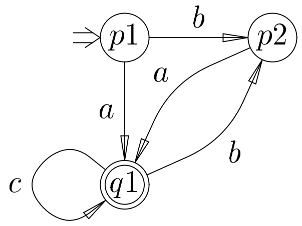
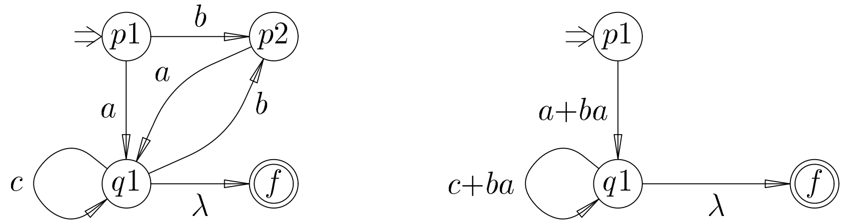
1) **a** Met behulp van de productconstructie wordt de volgende automaat verkregen (de toestand $q2$ is niet bereikbaar vanuit de begintoestand en is dus weggelaten):



b Door de methode van Brzozowski en McCluskey toe te passen op bovenstaande automaat krijg je, met verwijdervolgorde $\langle p2, q1\rangle$:



en de reguliere expressie $(a + ba)(c + ba)^*$.

c Een reguliere expressie voor de taal K is $E_1dE_2(dE_1dE_2)^*$.

2) **b** Stel dat K_1 wél representeerbaar is, en laat n de constante van het pomplemma zijn. Bekijk het woord $z = ab^nc^{n+1}$. Het is duidelijk dat $z \in K_1$ en dat $|z| = 2n + 2 > n$. Volgens het pomplemma zijn er dus woorden u, v, w zodanig dat $z = uvw$, $v \neq \lambda$, $|uv| \leq n$ en $uv^iw \in K_1$ voor alle $i \geq 0$. Omdat $v \neq \lambda$ en $|uv| \leq n$, is ófwel $u = \lambda$ en $v = ab^k$ met $k \geq 0$ ófwel $v = b^m$ met $m \geq 1$. In het eerste geval is $uv^0w = b^{n-k}c^{n+1} \notin K_1$, omdat dit woord geen a's bevat. In het tweede geval is $uv^2w = ab^{n+m}c^{n+1} \notin K_1$, omdat $n + m \geq n + 1$ en het aantal b's in dit woord dus groter gelijk aan het aantal c's is. In beide gevallen is dit in tegenspraak met het pomplemma.

c We moeten laten zien dat iedere $z \in K_2$ met $|z| > 1$ gepompt kan worden binnen K_2. Neem $u = \lambda$, v is de eerste letter van z en w is de rest van z. Dan is dus $z = vw = uvw$, $v \neq \lambda$ en $|uv| \leq n = 1$. We bekijken nu twee gevallen: $z \in \{b, c\}^*$ of $z \in K_1$. Als $z \in \{b, c\}^*$, dan is voor iedere i ook $uv^iw \in \{b, c\}^*$ en dus $uv^iw \in K_2$. Als $z \in K_1$, dan is $z = a^kx$ met $k \geq 1$, $x \in \{b, c\}^*$ en $\#_b(x) < \#_c(x)$. In dat geval is $uv^iw = a^{k-1+i}x$. Als $k - 1 + i = 0$ (d.w.z. $k = 1$ en $i = 0$), dan is $uv^iw = x \in \{b, c\}^* \subseteq K_2$. Als $k - 1 + i > 0$, dan is het duidelijk dat $uv^iw \in K_1 \subseteq K_2$.

d Er geldt: $K_1 = K_2 \cap a\{a, b, c\}^*$. Stel nu dat K_2 representeerbaar is. Omdat REP gesloten is onder doorsnede (en $a\{a, b, c\}^*$ representeerbaar is), is K_1 dan ook representeerbaar, in tegenspraak met onderdeel **b**.

3) **a** Het verwijderen van ketenproducties geeft de cf grammatica met producties
$E \to EEO$, $E \to Ib$, $E \to a$,
$I \to Ib$, $I \to a$, $O \to +$, $O \to *$
Een met G_1 equivalente cf grammatica in Chomsky normaalvorm heeft producties
$E \to EX$, $X \to EO$, $E \to IB$, $E \to a$,
$I \to IB$, $I \to a$, $B \to b$, $O \to +$, $O \to *$

b Als volgorde van de niet-terminalen nemen we E, I, O. Het verwijderen van de linksrecursie van E geeft de grammatica met producties
$E \to I \mid IX$, $X \to EOX \mid EO$, $I \to Ib \mid a$, $O \to + \mid *$
Het verwijderen van de linksrecursie van I geeft dan
$E \to I \mid IX$, $X \to EOX \mid EO$, $I \to a \mid aY$, $Y \to bY \mid b$, $O \to + \mid *$
Substitutie voor de producties van E geeft
$E \to a \mid aY \mid aX \mid aYX$, $X \to EOX \mid EO$,
$I \to a \mid aY$, $Y \to bY \mid b$, $O \to + \mid *$
en substitutie voor de producties van X geeft tenslotte de volgende cf grammatica in Greibach normaalvorm:
$E \to a \mid aY \mid aX \mid aYX$,
$X \to aOX \mid aYOX \mid aXOX \mid aYXOX \mid aO \mid aYO \mid aXO \mid aYXO$,
$I \to a \mid aY$, $Y \to bY \mid b$, $O \to + \mid *$
Merk op dat de producties $I \to a \mid aY$ overbodig zijn.

c Een cf grammatica voor L heeft startsymbool S, producties
$S \to I\#aT$, $T \to bTb$, $T \to \#E\#a$, en alle producties van G_1.

4) **a** G_1 bevat de links-recursieve productie $E \to EEO$. Omdat G_1 gereduceerd is, kan G_1 dus niet sterk LL(1) zijn (volgens Lemma 5.37 in het dictaat). In concreto volgt uit de links-preferente afleiding $E \Rightarrow EEO \Rightarrow IEO \Rightarrow aEO \Rightarrow aIO \Rightarrow aaO \Rightarrow aa+$ dat $a \in \mathrm{LA}_1(E \to EEO) \cap \mathrm{LA}_1(E \to I)$.

b Berekening van first_1 geeft:

F	E	I	O
0	a	b, λ	$+, *$
1	$a, +, *$	b, λ	$+, *$
2	$a, +, *$	b, λ	$+, *$

Dus $\mathrm{first}_1(E) = \{a, +, *\}$, $\mathrm{first}_1(I) = \{b, \lambda\}$, en $\mathrm{first}_1(O) = \{+, *\}$.

Berekening van follow_1 geeft:

FL	E	I	O
0	$\lambda, a, +, *$	$\emptyset$	$a, +, *$
1	$\lambda, a, +, *$	$\lambda, a, +, *$	$a, +, *$
2	$\lambda, a, +, *$	$\lambda, a, +, *$	$a, +, *$

Dus $\mathrm{follow}_1(E) = \{\lambda, a, +, *\}$, $\mathrm{follow}_1(I) = \{\lambda, a, +, *\}$, en $\mathrm{follow}_1(O) = \{a, +, *\}$.

Berekening van LA_1 geeft:

$U \to w$	$\text{first}_1(w)$	$\text{follow}_1(U)$	$LA_1(U \to w)$
$E \to OEE$	$+, *$	$\lambda, a, +, *$	$+, *$
$E \to aI$	a	$\lambda, a, +, *$	a
$I \to bI$	b	$\lambda, a, +, *$	b
$I \to \lambda$	λ	$\lambda, a, +, *$	$\lambda, a, +, *$
$O \to +$	$+$	$a, +, *$	$+$
$O \to *$	$*$	$a, +, *$	$*$

Hieruit volgt dat de grammatica LL(1) is, omdat
$LA_1(E \to OEE) \cap LA_1(E \to aI) = \emptyset$,
$LA_1(I \to bI) \cap LA_1(I \to \lambda) = \emptyset$, en
$LA_1(O \to +) \cap LA_1(O \to *) = \emptyset$.

c De inhoud van de stapel is achtereenvolgens: E, OEE, $+EE$, EE, $OEEE$, $*EEE$, EEE, $aIEE$, IEE, $bIEE$, IEE, EE, aIE, IE, E, aI, I, λ.

5) We gebruiken een variant van de product-constructie. We nemen daarbij aan dat $\mathcal{A}_1$ zijn stapel nooit leegt (daar is eenvoudig voor te zorgen).

$\mathcal{A} = (Q, \Delta, \Gamma, \delta, q_{in}, Z_{in}, F)$ met $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{e, o\}$, $q_{in} = (q_{in,1}, q_{in,2}, e)$, $F = F_1 \times F_2 \times \{e\}$, en δ bevat de volgende overgangen:

– alle $((p, q, e), a, A) \mapsto ((p', q, o), w)$ met $(p, a, A) \mapsto (p', w) \in \delta_1$ en $a \in \Delta$,
– alle $((p, q, e), \lambda, A) \mapsto ((p', q, e), w)$ met $(p, \lambda, A) \mapsto (p', w) \in \delta_1$, en
– alle $((p, q, o), b, B) \mapsto ((p, q', e), B)$ met $(q, b, q') \in \delta_2$ en $B \in \Gamma$.