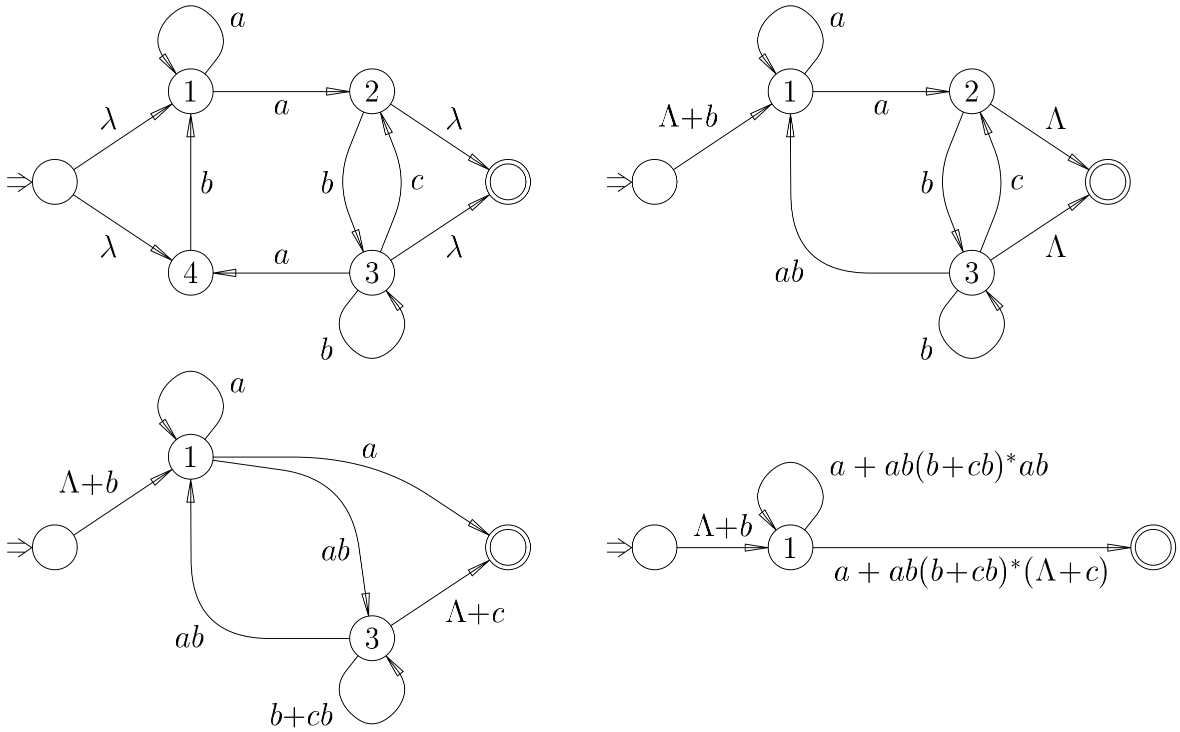
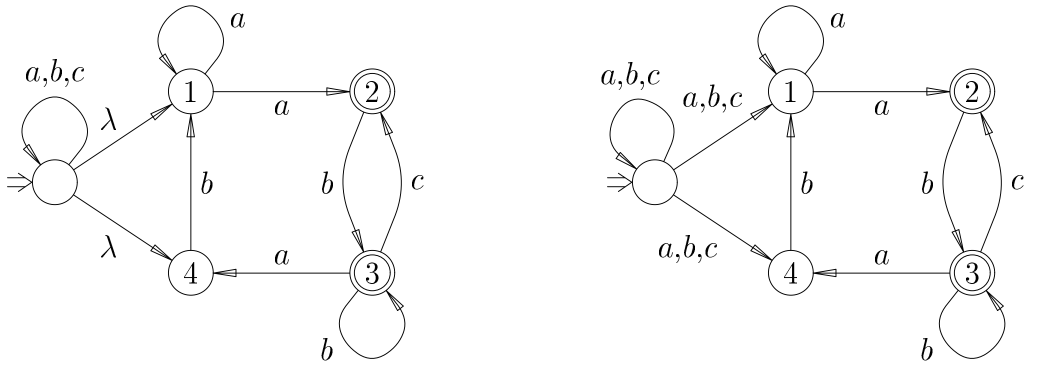
1) **a** Bepaal eerst met de methode van Brzozowski en McCluskey een reguliere expressie E voor $L(\mathcal{A})$. Door bijv. de verwijdervolgorde $\langle 4, 2, 3, 1 \rangle$ te nemen krijg je

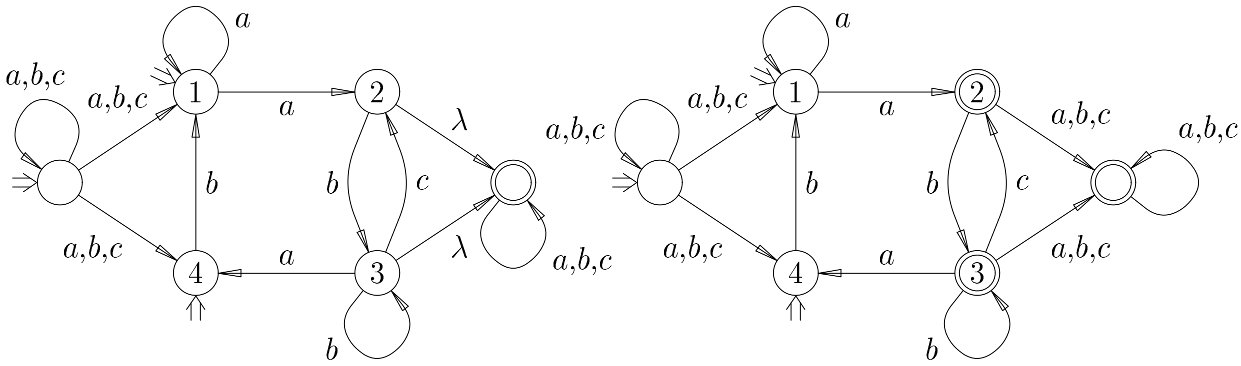


en dus $E = (\Lambda + b)[a + ab(b + cb)^* ab]^*(a + ab(b + cb)^*(\Lambda + c))$. Een reguliere expressie voor K_1 is dan $(a + b + c)^* E (a + b + c)^*$, ofwel
$(a + b + c)^*(\Lambda + b)[a + ab(b + cb)^* ab]^*(a + ab(b + cb)^*(\Lambda + c))(a + b + c)^*$.

b Een eindige automaat voor de concatenatie van Δ^* en $L(\mathcal{A})$ wordt als volgt verkregen, waarbij de λ-takken met de $e\lambda$-methode verwijderd zijn.



Een eindige automaat voor de concatenatie van $\Delta^* \cdot L(\mathcal{A})$ en Δ^*, d.w.z. voor K_1, wordt dan als volgt verkregen, waarbij de λ-takken met de λe-methode verwijderd zijn.



2) **a** $\neg(\exists j)(\ c(j) \wedge (\forall i)(i < j \rightarrow a(i))\ )$

b Analoog aan Voorbeeld 3.48 worden alle oneven posities in een verzameling X gestopt:

$$\begin{array}{ll}\neg(\exists j)(\exists X)[& c(j) \wedge (\forall i)(i < j \rightarrow a(i)) \\ & \wedge\ (\forall i)(\ \mathrm{first}(i) \rightarrow i \in X\ ) \\ & \wedge\ (\forall i)(\forall k)(\ \mathrm{next}(i,k) \rightarrow (i \in X \leftrightarrow k \notin X)\ ) \\ & \wedge\ j \in X\ \ ]\end{array}$$

Een andere manier is via een eindige automaat. De taal van alle woorden die wél een prefix van de vorm $a^{2n}c$ bevatten wordt geaccepteerd door een automaat met drie toestanden $1, 2, 3$, begintoestand 1, eindtoestand 3, en overgangen $(1, a, 2)$, $(2, a, 1)$, $(1, c, 3)$, en $(3, \sigma, 3)$ voor $\sigma = a, b, c$. De taal van deze automaat $\mathcal{A}$ laat zich als volgt specificeren: $L(\mathcal{A}) = L(\phi_{\mathcal{A}})$, waarbij

$$\begin{array}{lll}\phi_{\mathcal{A}} = & (\exists X_1)(\exists X_2)(\exists X_3) & \\ & [\ \ (\forall i)(\ i \in X_1 \vee i \in X_2 \vee i \in X_3\ ) & \text{partitie} \\ & \wedge\ (\forall i)(\ (i \notin X_1 \vee i \notin X_2) \wedge (i \notin X_2 \vee i \notin X_3) & \\ & \qquad\quad \wedge\ (i \notin X_3 \vee i \notin X_1)\ ) & \\ & \wedge\ (\forall i)(\ \mathrm{first}(i) \rightarrow & \text{eerste stap:} \\ & \qquad\quad (a(i) \wedge i \in X_2) & (1, a, 2) \\ & \qquad\quad \vee\ (c(i) \wedge i \in X_3) & (1, c, 3) \\ & \qquad\quad) & \\ & \wedge\ (\forall i)(\forall j)(\ \mathrm{next}(i,j) \rightarrow & \text{transities:} \\ & \qquad\quad (i \in X_1 \wedge a(j) \wedge j \in X_2) & (1, a, 2) \\ & \qquad\quad \vee\ (i \in X_2 \wedge a(j) \wedge j \in X_1) & (2, a, 1) \\ & \qquad\quad \vee\ (i \in X_1 \wedge c(j) \wedge j \in X_3) & (1, c, 3) \\ & \qquad\quad \vee\ (i \in X_3 \wedge j \in X_3) & (3, \sigma, 3) \\ & \qquad\qquad) & \\ & \wedge\ (\forall i)(\ \mathrm{last}(i) \rightarrow (i \in X_3)\ ) & \text{eindtoestand} \\ & \wedge\ (\exists i)(\ i \in X_1 \vee i \in X_2 \vee i \in X_3\ ) & \lambda \notin L(\mathcal{A}) \\ &] & \end{array}$$

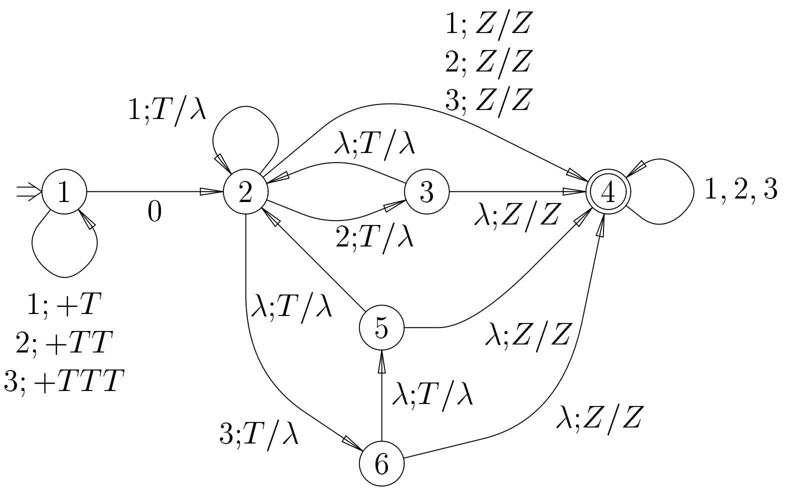
De gevraagde formule is dan de ontkenning $\neg\varphi_{\mathcal{A}}$.

3) **b** Laat n de constante van het pomplemma zijn, en kies $z = a^n\#a^n$. Dan is $|z| = 2n + 1 > n$ en $z \in K_3$ (omdat a^n een deelwoord van a^n is). Dus zijn er woorden u, v, w zodat $z = uvw$, $v \neq \lambda$ en $|uv| \leq n$. Vanwege $|uv| \leq n$, is $v = a^k$ een deelwoord van het eerste segment a^n van z. Bekijk nu uv^2w. Dit woord is gelijk aan $a^{n+k}\#a^n$

en zit dus niet in K_3, omdat a^{n+k} geen deelwoord van a^n is (merk op dat $k \geq 1$ omdat $v \neq \lambda$).

c Een cf grammatica voor K_3 heeft startsymbool S en producties
$S \to DR$, $D \to aDa$, $D \to \#R$,
$R \to aR$, $R \to bR$, $R \to \lambda$. $\quad (R \Rightarrow^* w,\ w \in \{a, b\}^*)$

4) **a** Op de stapel berekenen we $\Sigma(u)$ in unaire notatie ($\Gamma = \{T, Z\}$ met $Z_{in} = Z$):



b Stapel bij het lezen van u het dubbele aantal T's. De lus van de begintoestand is dus gelabeld met $1; +TT$, met $2; +TTTT$ en met $3; +T^6$.

c Nee. De taal K_4 is niet prefix-vrij, omdat bijv. $102 \in K_4$ en $1021 \in K_4$. Dus $K_4 \notin \mathsf{DSA_e}$ volgens Lemma 5.18 (of Stelling 5.21).

5) **a** Construeer een eindige automaat $\mathcal{A}'$ voor de taal $L(\mathcal{A}) \cap \Delta^* \cdot L(\mathcal{B}) \cdot \Delta^*$. Dat kan omdat $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$ en Δ^* in REP zitten, en omdat REP (effectief) gesloten is onder concatenatie en doorsnede. Test vervolgens of $L(\mathcal{A}')$ al dan niet oneindig is. (Merk op dat $L(\mathcal{A}) \cap \Delta^* \cdot L(\mathcal{B}) \cdot \Delta^*$ de verzameling is van alle woorden in $L(\mathcal{A})$ die een deelwoord in $L(\mathcal{B})$ hebben.)

b Laat $\mathcal{A} = (Q, \Delta, \delta, I, F)$ een eindige automaat voor K zijn. Dan is $\mathcal{A}' = (Q, \Delta, \delta, I', F')$ een eindige automaat voor $\mathrm{sub}(K)$, waarbij I' de verzameling van alle toestanden is die vanuit I bereikbaar zijn en F' de verzameling van alle toestanden van waaruit F te bereiken is.
Formeel: $I' = \{q \in Q \mid \exists p \in I :$ er is een pad in $\mathcal{A}$ van p naar $q\}$ en $F' = \{q \in Q \mid \exists r \in F :$ er is een pad in $\mathcal{A}$ van q naar $r\}$.

c Analoog aan **a**. Construeer een eindige automaat $\mathcal{B}'$ voor de taal $L(\mathcal{B}) \cap \mathrm{sub}(L(\mathcal{A}))$, door o.a. gebruik te maken van de constructie onder **b**, en test dan of $L(\mathcal{B}')$ al dan niet oneindig is.