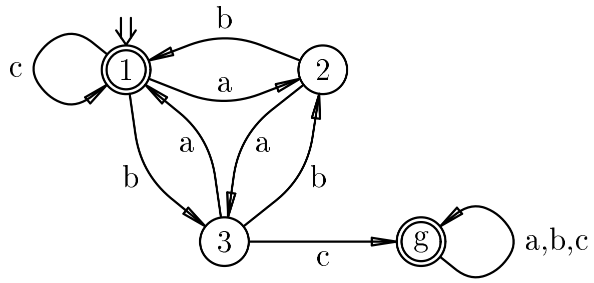
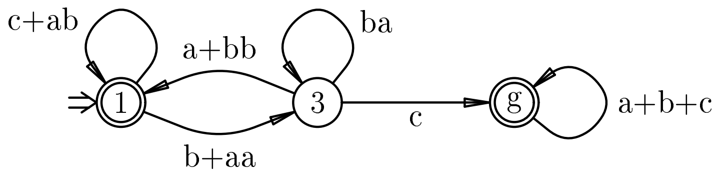
1. **a)** Let op: de gegeven automaat is niet *totaal*, wel deterministisch. Voeg een nieuwe toestand 'g' toe om dit euvel te verhelpen; verander de eindtoestanden ivm. complement; en verwijder de nutteloze toestand '4'. We vinden zo de volgende automaat.

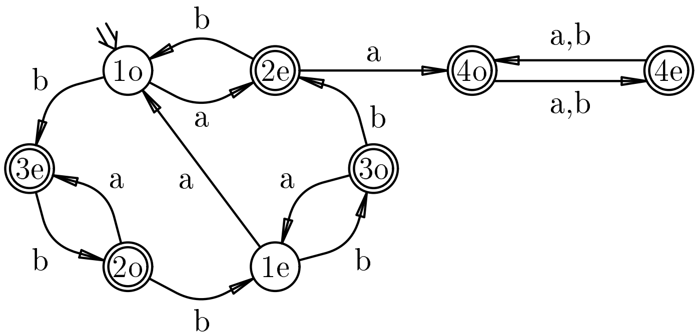


Elimineer toestand '2' volgens de methode van Wood.



De expressie is nu eenvoudig te bepalen:
[c+ab+(b+aa)(ba)*(a+bb)]*(Λ+(b+aa)(ba)*c(a+b+c)*)

b) Bouw een automaat die x accepteert wanneer $\text{bip}(x) \in K$. Deze automaat houdt bij of de volgende letter oneven dan wel even is, en ook de toestand die $\mathcal{A}$ zou hebben na het doorlopen van $\text{bip}(x)$.



c) Formele constructie. Gegeven een eindige automaat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_{in}, F)$, dan krijgen we een automaat $(Q', \{a,b\}, \delta', q'_{in}, F')$ voor $\text{bip}^{-1}(L(\mathcal{A}))$ door te nemen: $Q' = Q \times \{e, o\}$, $q'_{in} = (q_{in}, o)$, $F' = F \times \{e, o\}$, en δ' bestaat uit de overgangen:
$((p, o), \sigma, (q, e))$ voor $(p, \sigma, q) \in \delta$, met $\sigma \in \{a, b\}$,
$((p, e), a, (q, o))$ voor $(p, c, q) \in \delta$, en
$((p, e), b, (q, o))$ voor $(p, b, q) \in \delta$.

Alternatief: $\text{bip}^{-1}(L) = h(L \cap R)$, waarbij R de reguliere taal is waar geen a's op even, en geen c's op oneven posities voorkomen, en $h : \Sigma^* \to \{a, b\}^*$ het homomorfisme dat c in a hernoemt. Reguliere talen zijn gesloten onder doorsnede en homomorfisme.

2. Eerst de makkelijke taal $K_0 = \{\ x\$y\$z \mid x, y \in a^*, z \in b^*, |z| = |x| + |y|\ \}$.
Producties voor K_0, met axioma R:
$R \to aRb, R \to \$T, \quad T \to aTb, T \to \$$.
Nu op de juiste plaatsen de taal $((a + b) * \$)*$ tussenvoegen om de taal uit de opgave te krijgen; producties voor K, met axioma S:

$S \to XR, \quad R \to aRb, R \to \$XT, \quad T \to aTb, T \to \$X,$
$X \to \$X, X \to aY, X \to bY, X \to \Lambda,$
$Y \to \$X, Y \to aY, Y \to bY.$

3. b) Neem aan dat K_1 context-vrij is. Laat n de bijbehorende constante uit het pomplemma zijn. Bekijk $z = a^n b^n a^n b^n \in K_1$. Omdat $|z| = 4n > n$, moet z binnen K_1 gepompt kunnen worden. We moeten dus $z = uvwxy$ kunnen schrijven, zoals in het pomplemma. Verdeel in gedachten z in vier 'segmenten' van steeds n dezelfde letters. Omdat $|vwx| \leq n$, overlappen de pompwoorden v, x ten hoogste met twee naburige segmenten. Vanwege de vorm van de woorden uit de taal liggen v en x elk geheel binnen een segment.

(i) vx bevat tenminste één a uit het eerste segment, en dus geen letters uit het derde segment. Bekijk $uv^0wx^0y = uwy$. In dit woord is het eerste segment korter dan het derde; het zit dus niet in de taal.

(ii) vx bevat tenminste één b uit het tweede segment. Bekijk uv^2wx^2y. In dit woord is het tweede segment langer dan het vierde; het zit dus niet in de taal.

Nog twee gevallen (iii) en (iv) zijn symmetrisch aan respectievelijk (ii) en (i).

c) $K_2 = a^*La^*b^* \cup a^*b^*Lb^*$; afsluitingseigenschappen: vereniging en concatenatie. We gebruiken ook dat a^* en b^* context-vrij zijn.

Overigens is ook $K_3 = \{ a^i b^j a^k b^\ell \mid i \geq j \text{ èn } \ell \geq k \}$ context-vrij, want $K_3 = a^*LLb^*$.

4. a) Bepaal eerst de produktieve symbolen. Met de standaard methode vinden we de verzameling: $\{ 0, 1, 2, 3, \ S, A, \ C, E \}$. Niet produktief zijn dus de variabelen B en D. Verwijder ze uit de grammatica.

Bepaal de (terminaal) bereikbare symbolen: $\{ S, \ A, C \}$. Daarmee is E niet bereikbaar.

Een gereduceerde grammatica heeft dan de producties

$S \to ACA, S \to 0, \quad A \to SA, A \to 1, \quad C \to AS.$

b) substitutie in $A \to SA$: $\quad A \to ACAA, A \to 0A, A \to 1.$

recursie verwijderen voor A: $A \to 0A, A \to 1, A \to 0AX, A \to 1X, \quad X \to CAA, X \to CAAX.$

substitutie in $S \to ACA$: $S \to 0ACA, S \to 1CA, S \to 0AXCA, S \to 1XCA, S \to 0.$

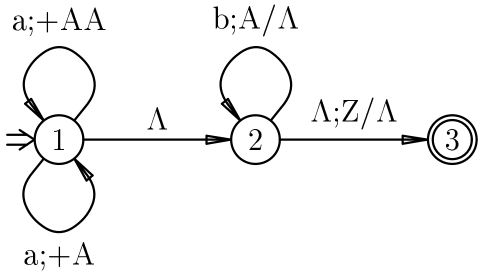
substitutie in $C \to AS$: $C \to 0AS, C \to 1S, C \to 0AXS, C \to 1XS.$

substitutie in producties voor X: $X \to 0ASAA, X \to 1SAA, X \to 0AXSAA, X \to 1XSAA, X \to 0ASAAX, X \to 1SAAX, X \to 0AXSAAX, X \to 1XSAAX.$

Klaar. De laatste vier rijtjes producties vormen de grammatica.

5. ii. *niet* deterministisch, want de taal is niet prefix-vrij: ab en abb zitten in L.

Staplautomaat heeft initieel stapelsymbool Z, acceptatie naar keuze met lege stapel of eindtoestand.



RUL, hjh, 12.6.95