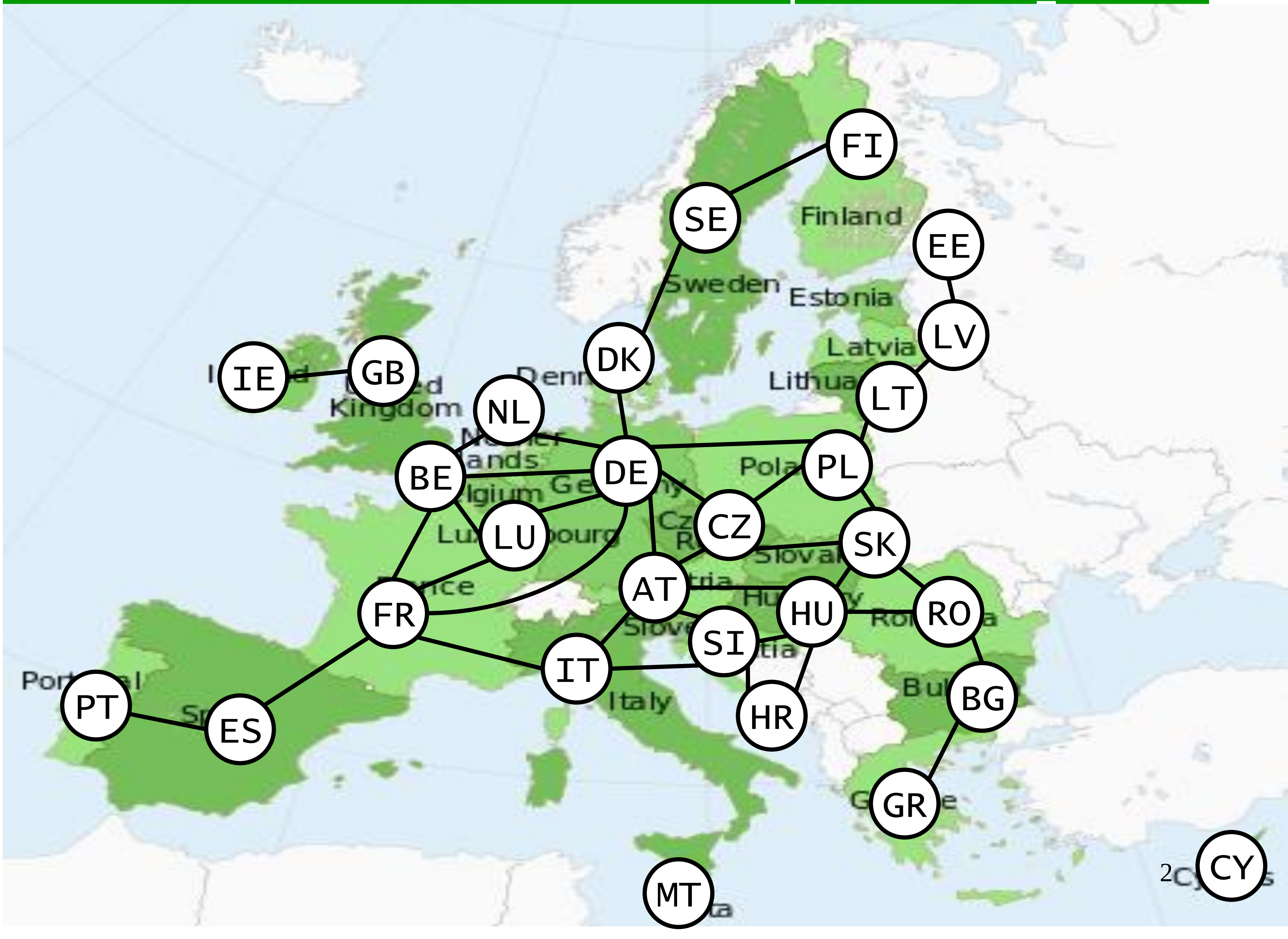
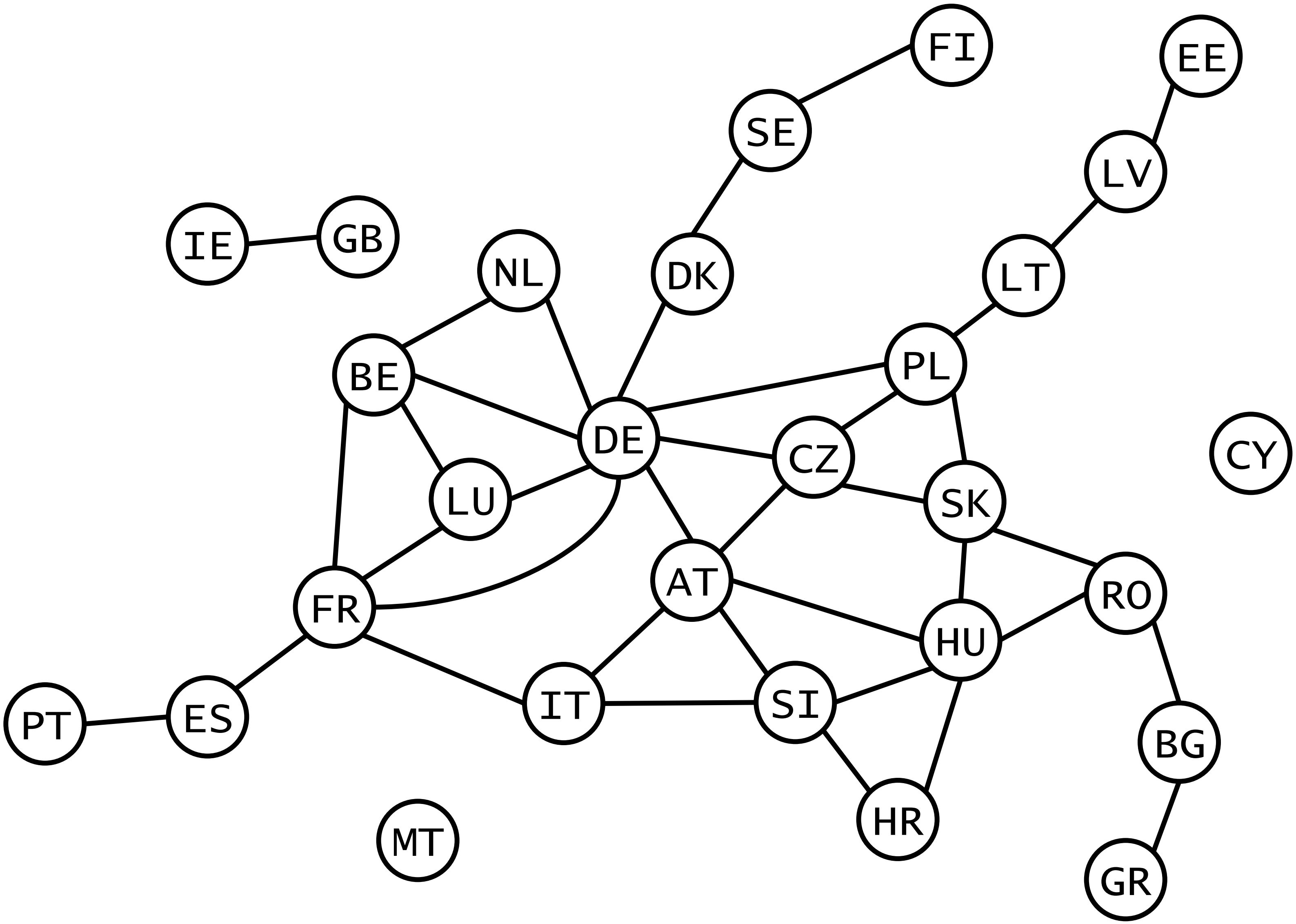
buren in Europa

ttp://commons.wikimedia.org/wiki/File:Member_States_of_the_European_Union_(polar_stereographic_projection)_EN.svg



FI
SE
Finland
EE
Sweden
Estonia
LV
Latvia
DK
IE
GB
LT
NL
Kingdom
DE
PL
BE
CZ
LU
SK
AT
FR
HU
RO
SI
IT
Italy
PT
ES
HR
BG
GR
MT
CY

buren in Europa

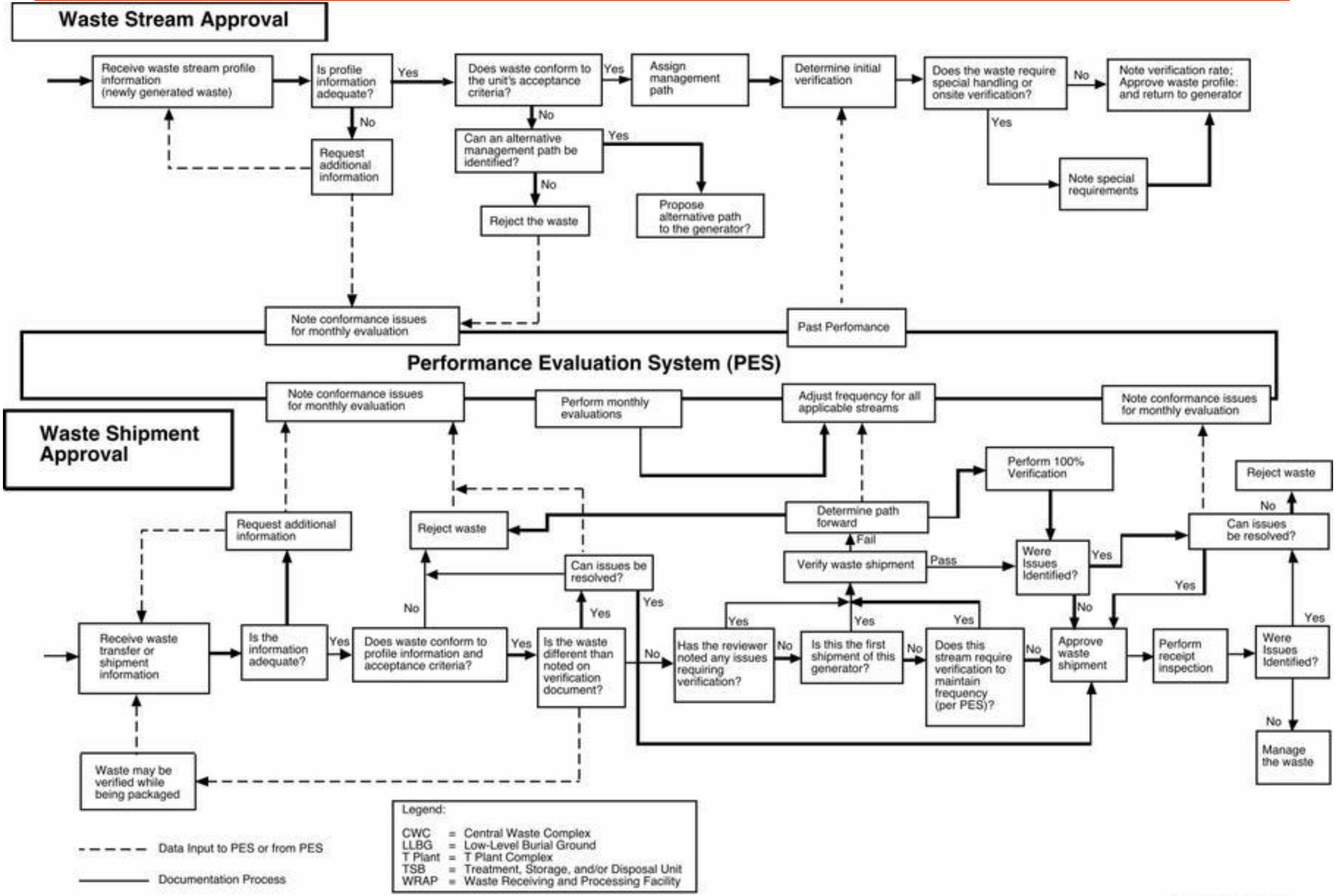


Buren binnen de Europese Unie. Beetje creatief, want de brug tussen Denemarken en Zweden heb ik wel, maar de tunnel tussen Frankrijk en Groot-Brittannië niet?

De abstractie van dit schema heet een graaf, grootte, ligging en afstanden doen niet meer ter zake.

De verbindingen in dit voorbeeld hebben geen richting, en ook geen informatie.
Dat is anders in de volgende voorbeelden, waar er *verschillende soorten* verbindingen zijn (al dan niet gestippeld, of voorzien van 0/1) die bovendien een *richting* hebben.

flowchart

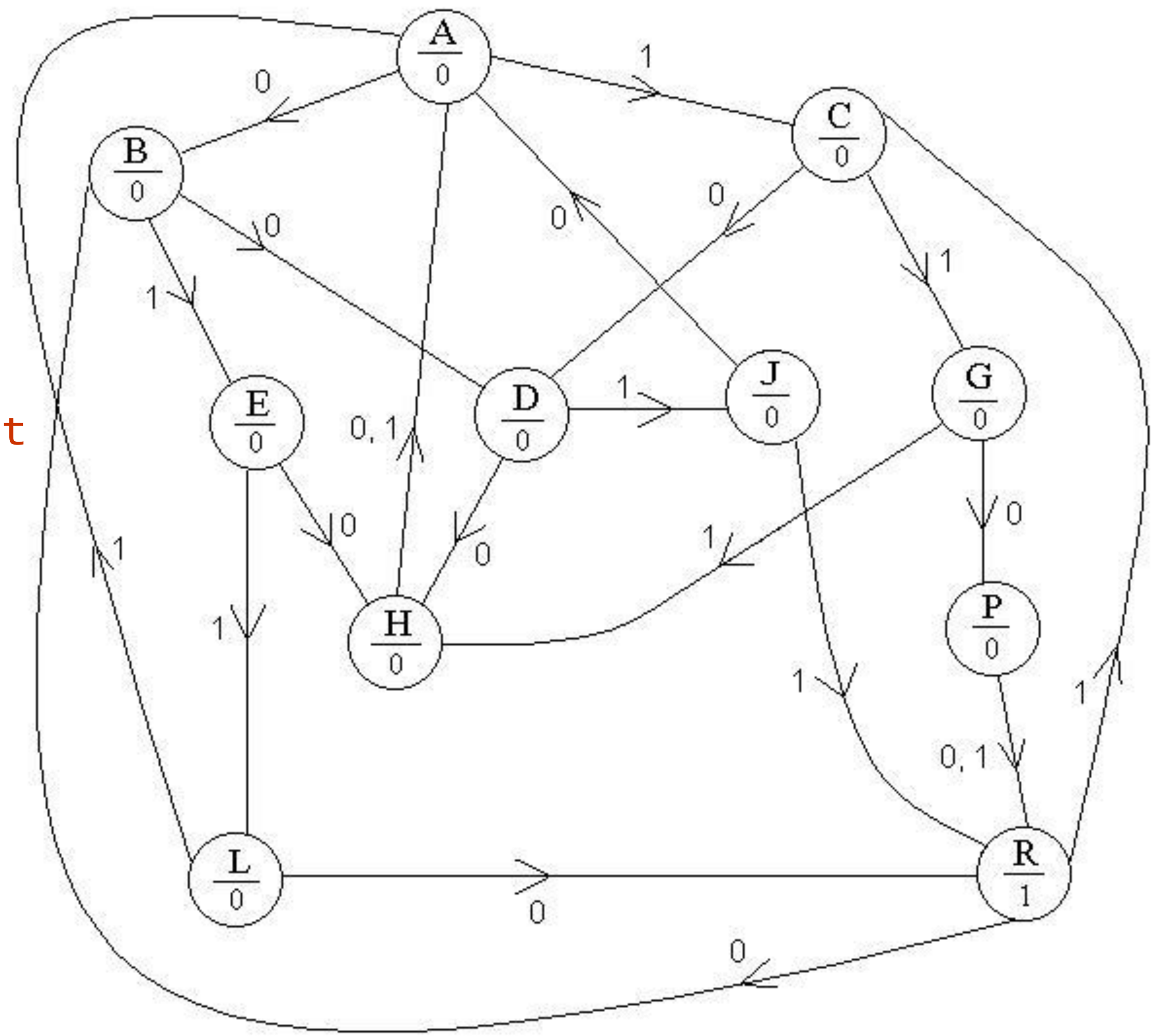


GS990201.1

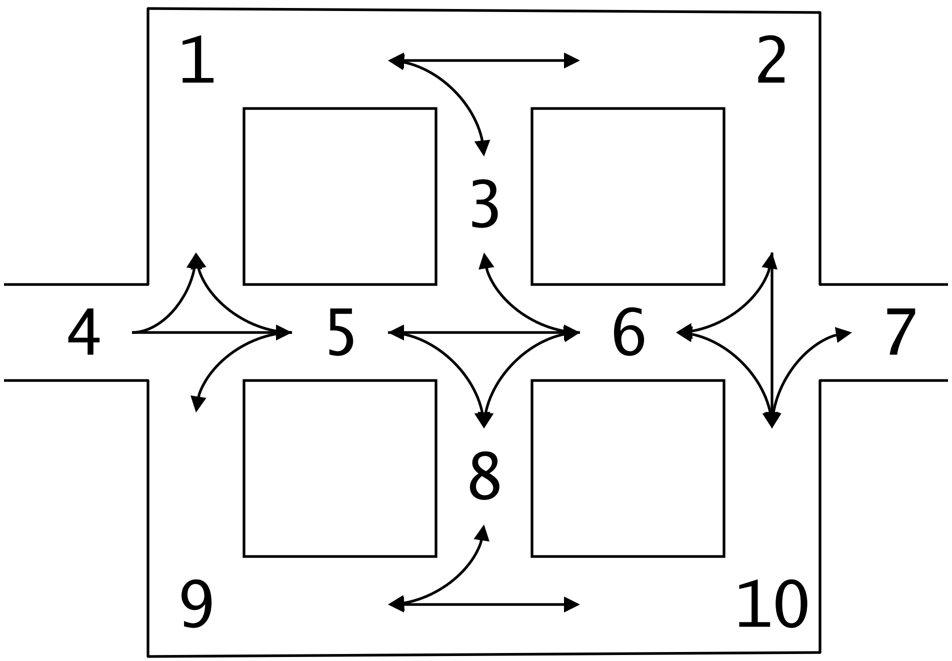
'Digital Systems I' state chart

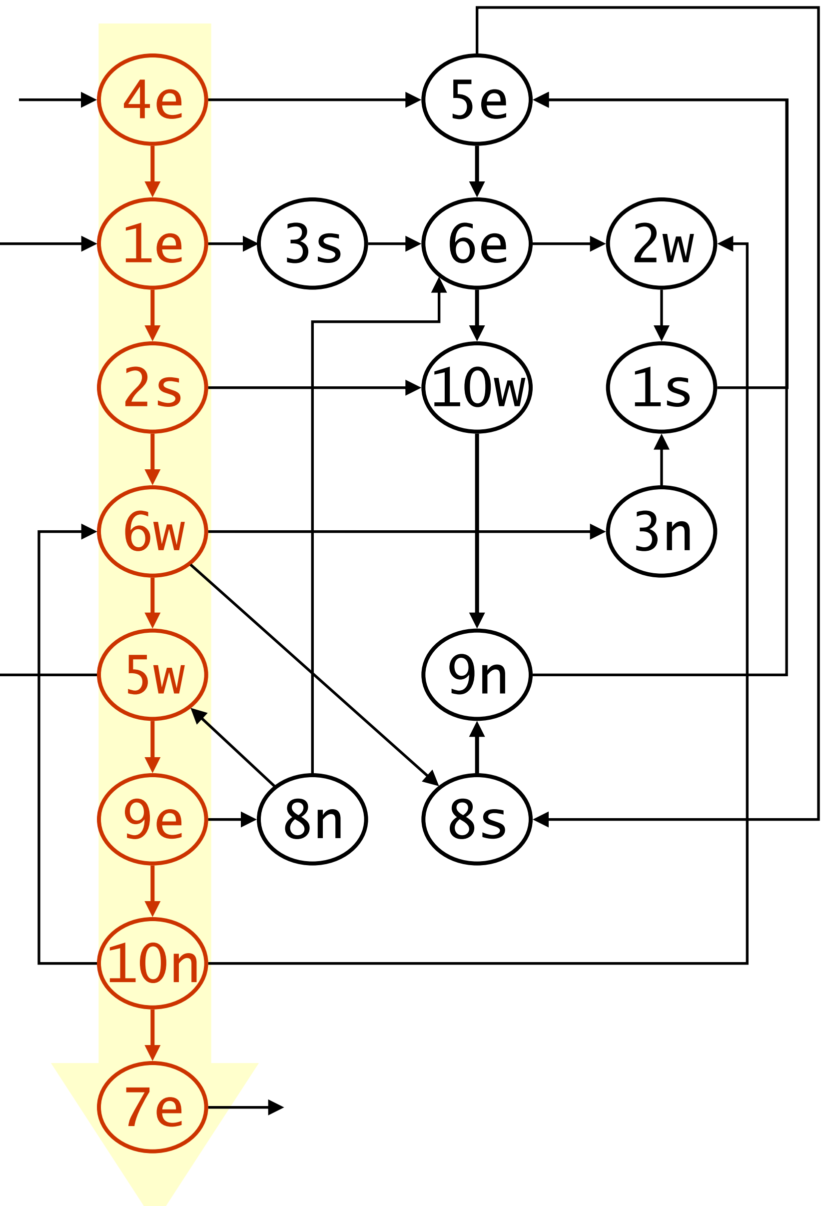
http://venus.ece.ndsu.nodak.edu/ece/academics/courses/ece275/f2001/assign/

Present State	Next		Output
Z	X=0	X=1	
A	B	C	0
B	D	E	0
C	D	G	0
D	H	J	0
E	H	L	0
G	P	H	0
H	A	A	0
J	A	R	0
L	R	A	0
P	R	R	0
R	B	C	1



‘algoritmiek’ state chart





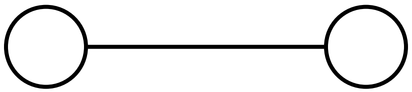
Farmer Goes to Market maze. By Robert Abbott. http://www.maa.org

‘algoritmiek’ state chart

Probleem: hoe komt de boer met zijn kar met lading naar de markt, zonder te keren, en alleen via de aangewezen afslagen?

De “state chart” geeft de toestanden van een probleem en de overgangen daartussen. Begrip bij het college Algoritmiek.

Grappig is dat hier het oorspronkelijke probleem eigenlijk al een graaf is, maar dat de state chart nog extra de twee richtingen moet onderscheiden die de kar kan hebben op elk punt.

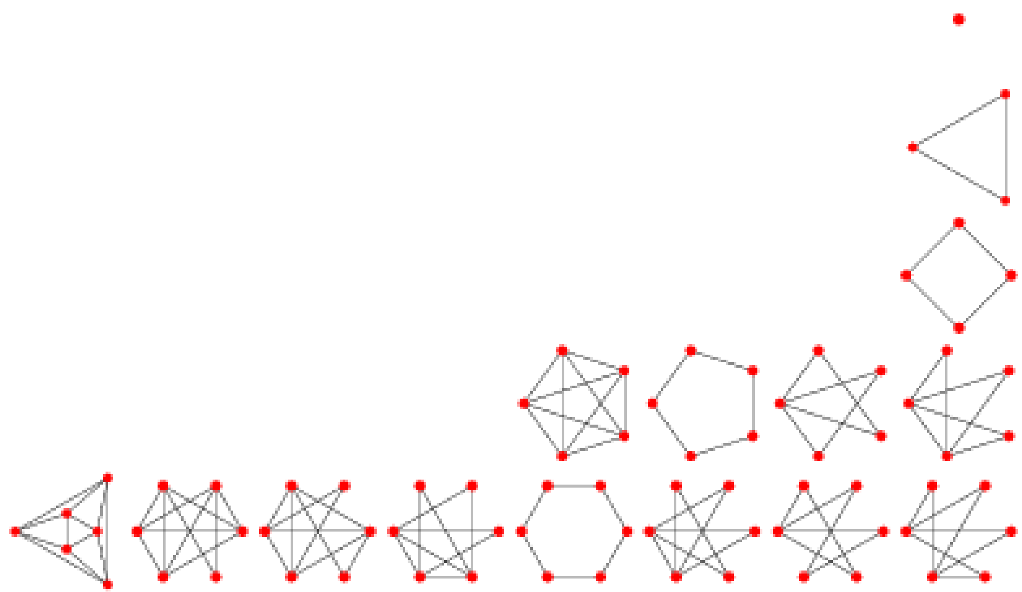


ongericht
Ch.8 Graph Theory

gericht
Ch.9 Directed Graphs

Ch.10 Binary Trees

8 Grafen

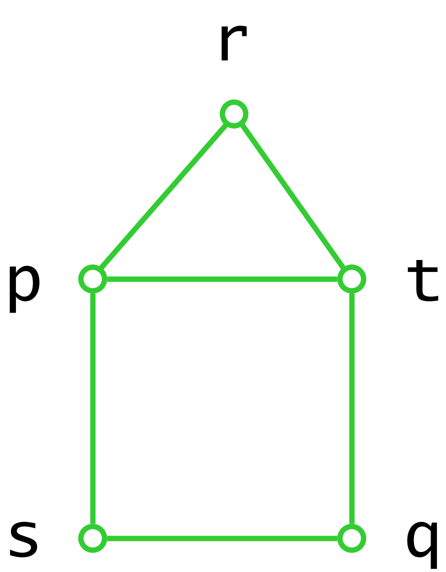


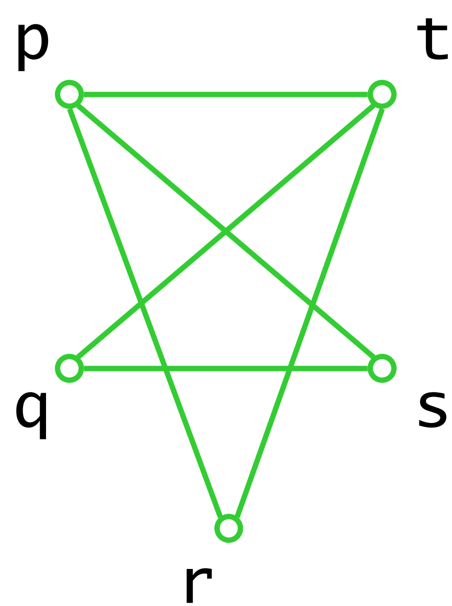
§8.2 grafen en multigrafen

graaf G bestaat uit twee (eindige) verzamelingen
- V = V(G) knopen (punten; vertices, nodes, points)
- E = E(G) lijnen (takken, zijden, kanten, bogen; edges)

lijn ~ ongeordend tweetal (verschillende) knopen

$e = \{u,v\}$





G(V,E)

$V = \{p,q,r,s,t\}$

$E = \{ \{p,r\}, \{p,t\}, \{p,s\}, \{q,s\}, \{q,t\}, \{r,t\} \}$

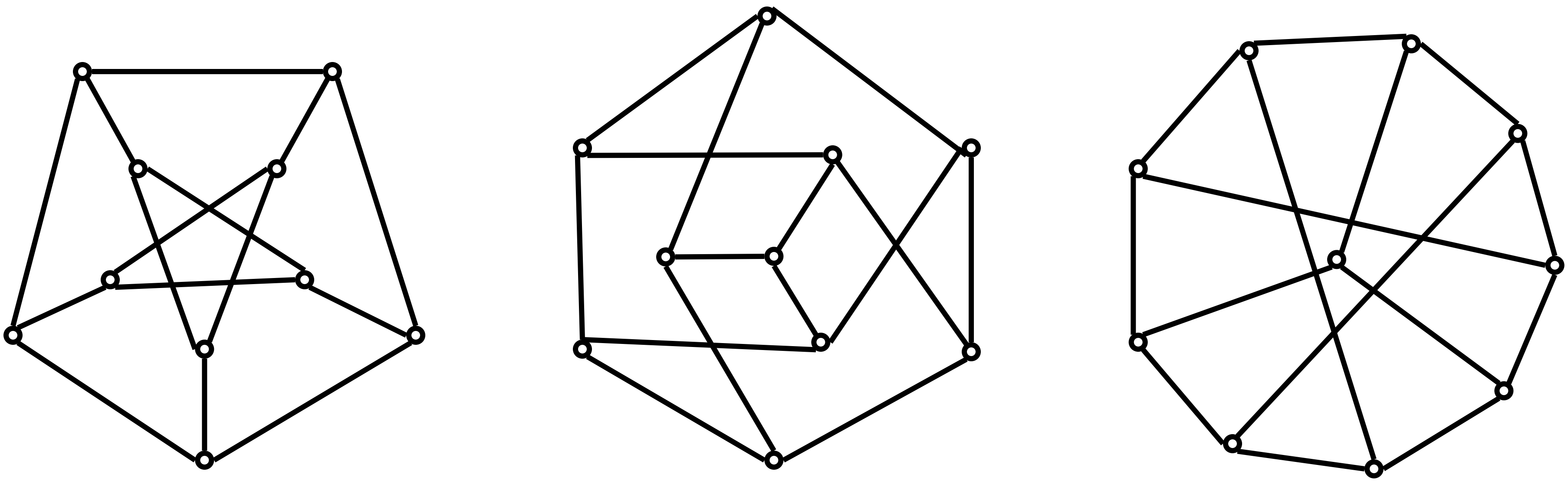
eindige graaf

§8.2 grafen en multigrafen

Grafen in dit college zijn eigenlijk eindig.

Schaum laat ook oneindige grafen toe, maar veel stellingen gelden alleen in het eindige geval.

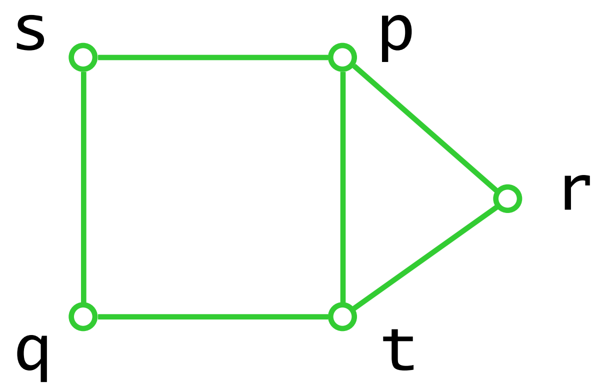
Petersen-graaf



steeds *dezelfde* graaf, anders weergegeven

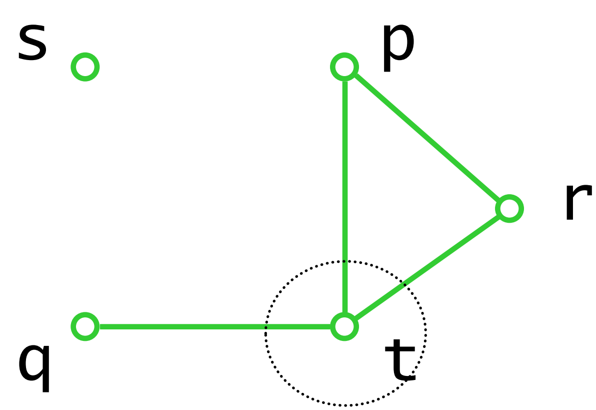
begrippen

$G = (V,E)$
$e = \{u,v\}$
e verbindt u en v
uiteinde
incidentie (punt&lijn)
buur   (adjacent)

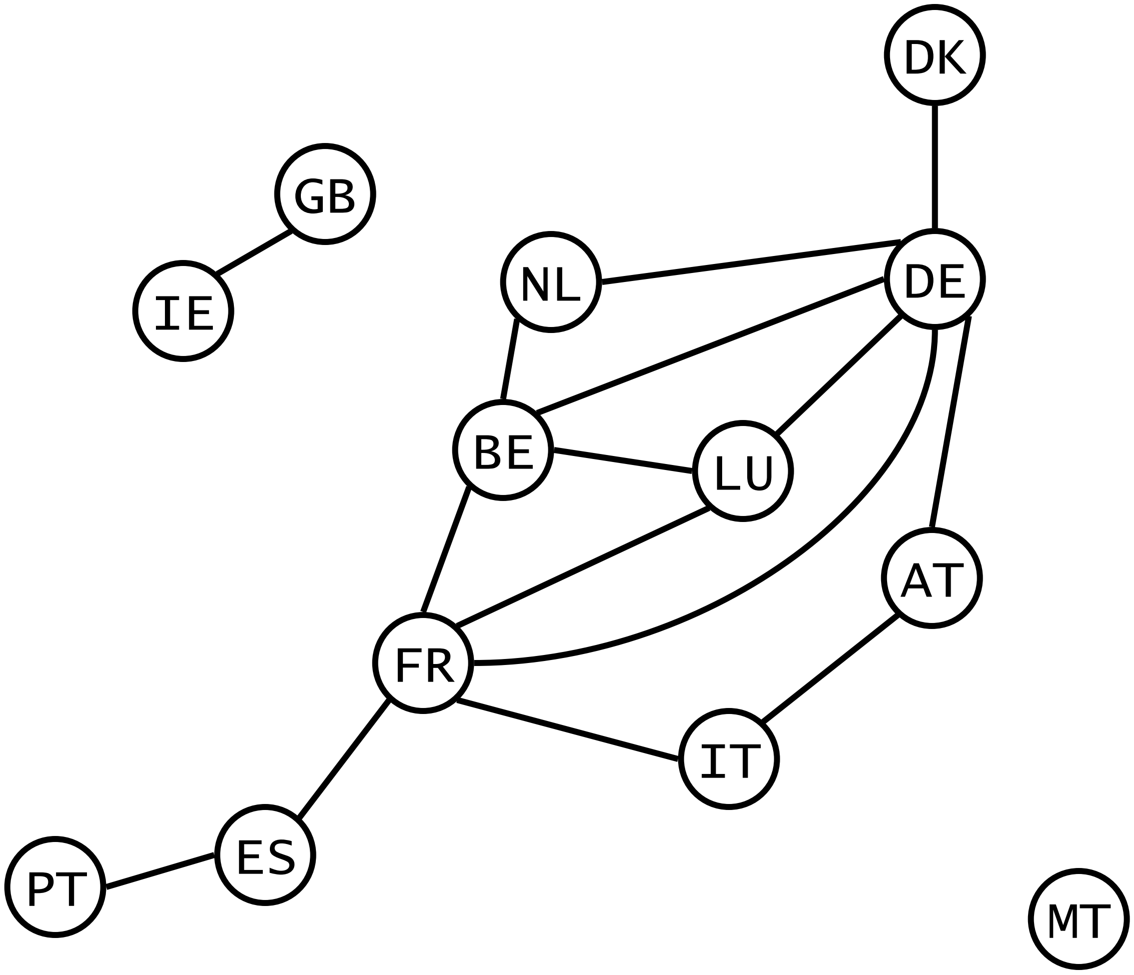


graad van punt v : aantal incidenties	$\deg(v)$

geïsoleerd punt
$\deg(v)=0$



oefenen …



handshaking lemma

Theorem 8.1

De som der graden is twee keer het aantal lijnen.

Leonhard Euler (1736)

In een graaf $G = (V,E)$ geldt
$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Gevolg

Het aantal punten met oneven graad is even.

$G = (V,E)$ met $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

ordening!

burenmatrix *verbindingsmatrix*

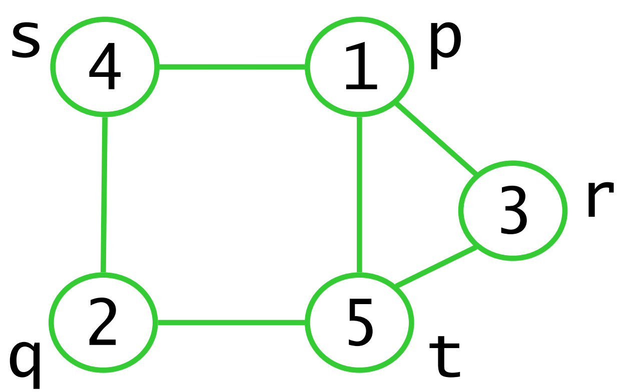
nxn-matrix $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \text{ en } v_j \text{ verbonden zijn} \\ 0 & \text{in de overige gevallen} \end{cases}$$

adjacency matrix

symmetrisch

nullen op diagonaal



naar

$$\begin{array}{ll} & \quad p,q,r,s,t \\ \text{van} \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

§8.11 adjacencymatrix

ordening!

Ik wil aandacht voor ‘ordening’ omdat we bij een matrix representatie de knopen op één of andere volgorde moeten opnoemen.

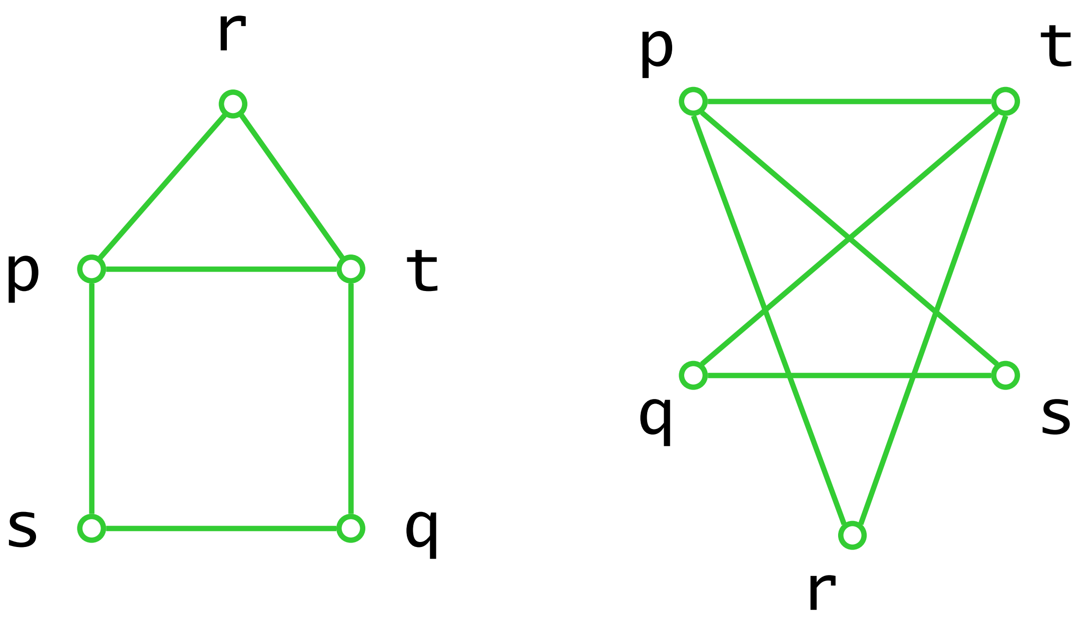
In het abstracte begrip graaf is er geen automatische (vanzelf sprekende) volgorde op de knopen: V is een verzameling en dus ongeordend.

gelijk vs. isomorf

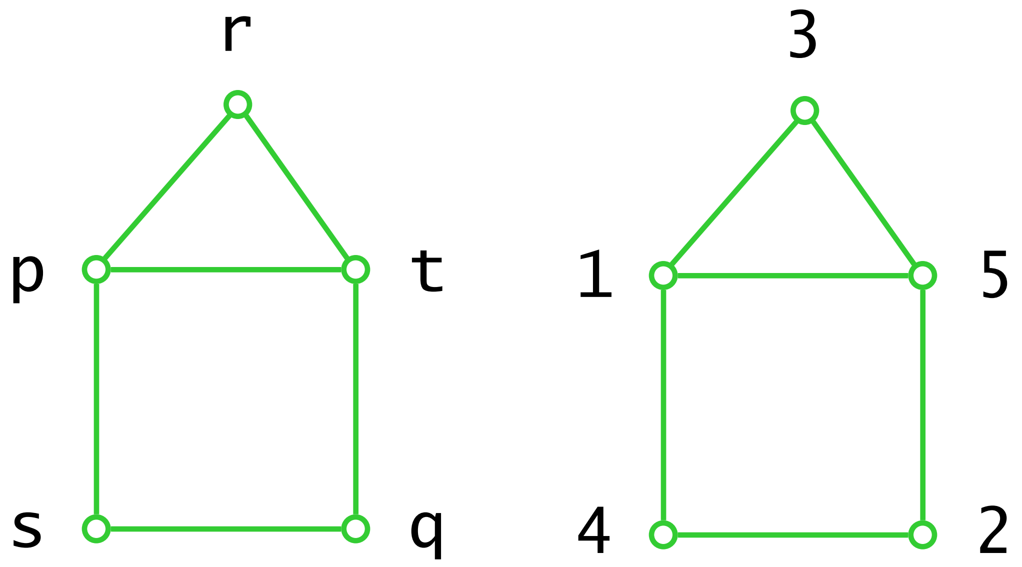
Twee (plaatjes) van grafen kunnen gelijk zijn ook al zien ze er anders uit.

Twee grafen die er hetzelfde uitzien kunnen (toch) verschillend zijn als hun knopen andere namen hebben. Dat leidt tot een speciaal begrip ‘isomorfisme’, feitelijk niet meer dan het hernoemen van de knopen (terwijl alle andere eigenschappen gelijk blijven).

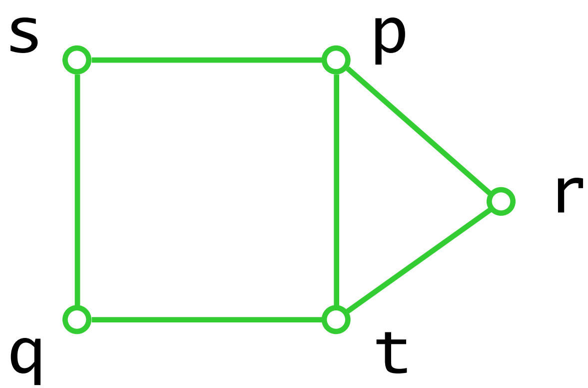
gelijke grafen

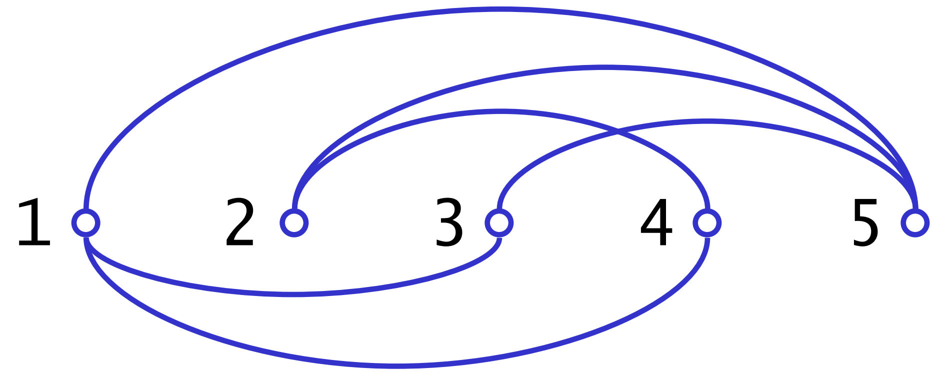


isomorfe grafen



§8.3 isomorfie

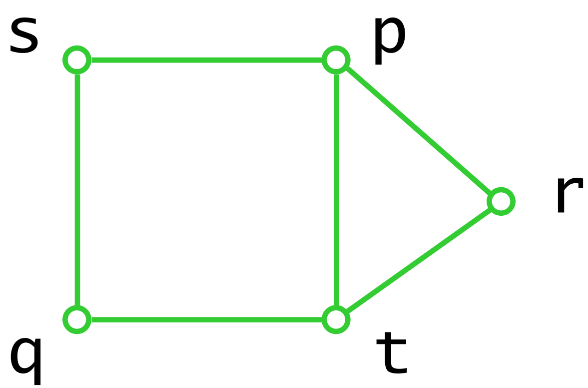


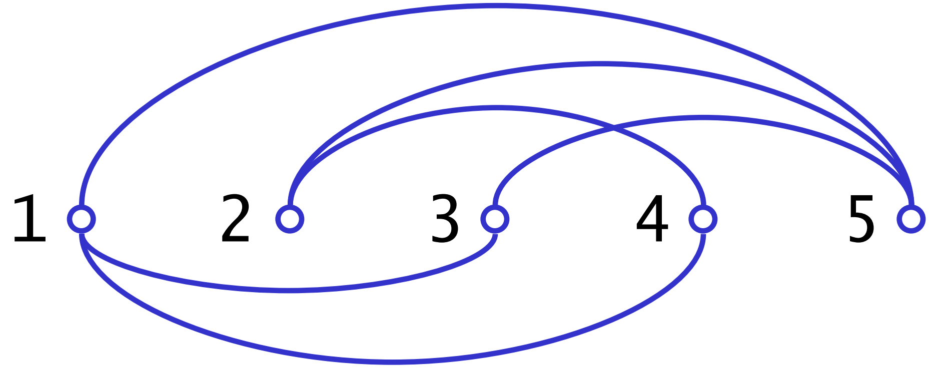


$V = \{p,q,r,s,t\}$
$E = \{pr,ps,pt,qs,qt,rt\}$

$V' = \{1,2,3,4,5\}$
$E' = \{ \{i,j\} \mid j \geq i+2 \}$

$p \leftrightarrow 1 \quad q \leftrightarrow 2 \quad r \leftrightarrow 3 \quad s \leftrightarrow 4 \quad t \leftrightarrow 5$





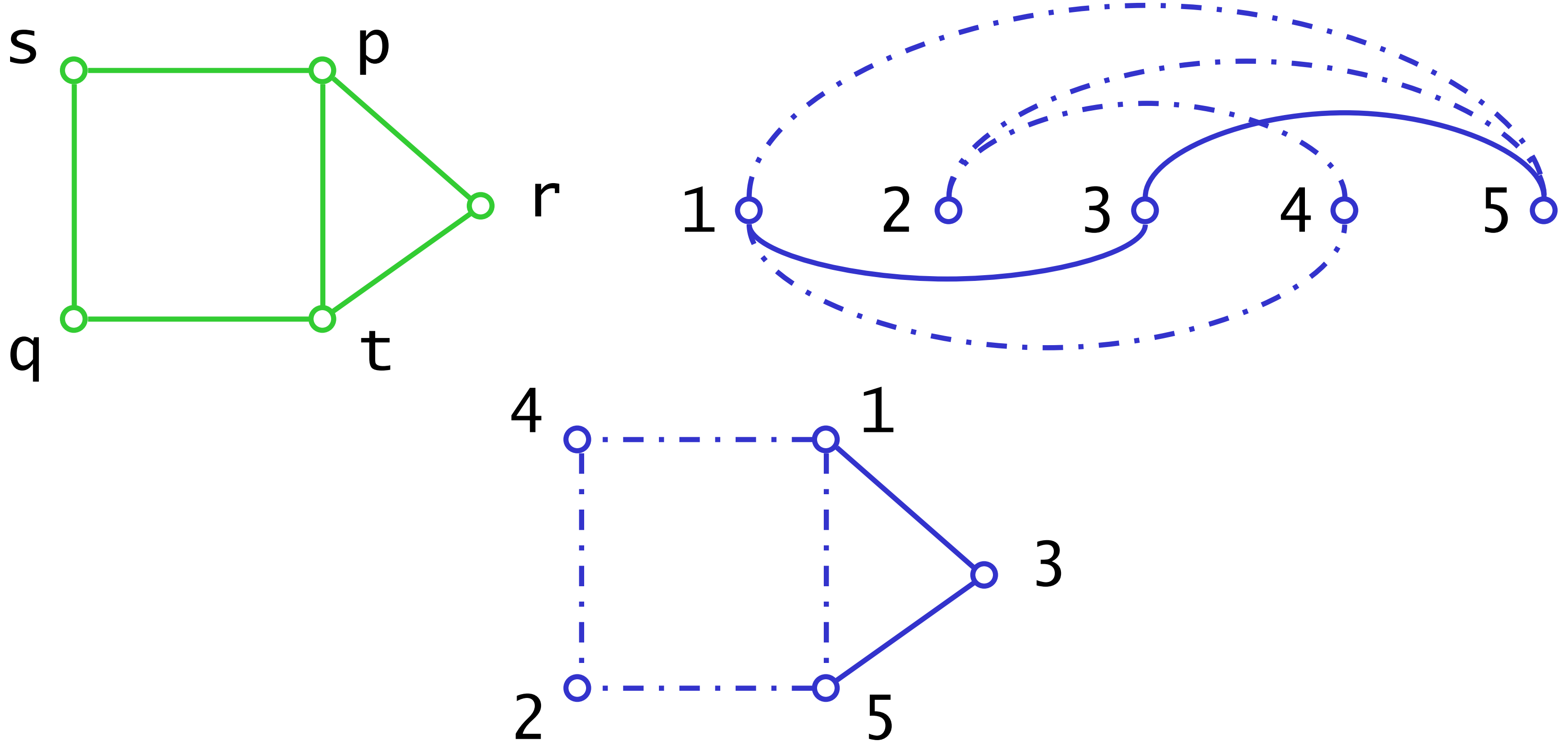
V = {p,q,r,s,t}

E = {pr,ps,pt,qs,qt,rt}

V’ = {1,2,3,4,5}

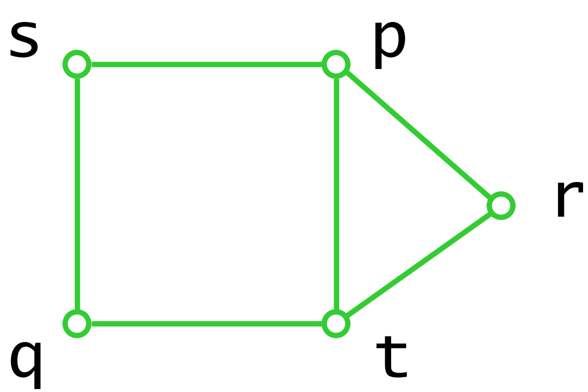
E’ = { {i,j} | j≥i+2 }

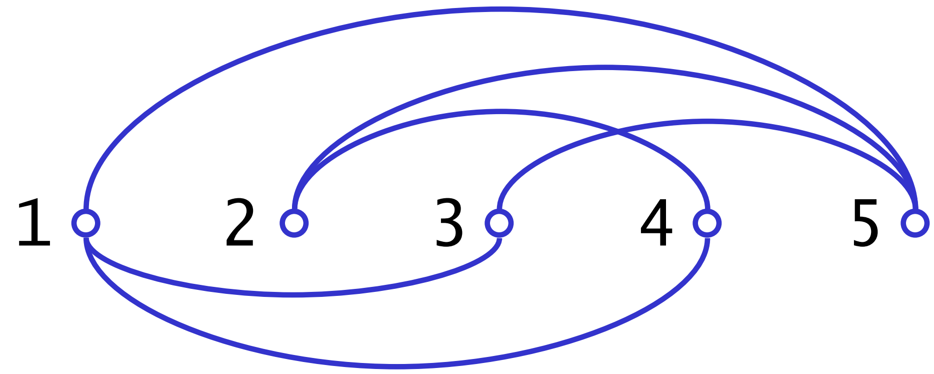
eigenlijk zou hier moeten staan
E = { {p,r},{p,s},{p,t},{q,s},{q,t},{r,t} }
want lijnen worden genoteerd als paren
knopen, maar dat wordt wel eens ingekort.



p↔1 q↔2 r↔3 s↔4 t↔5

§8.3 isomorfie

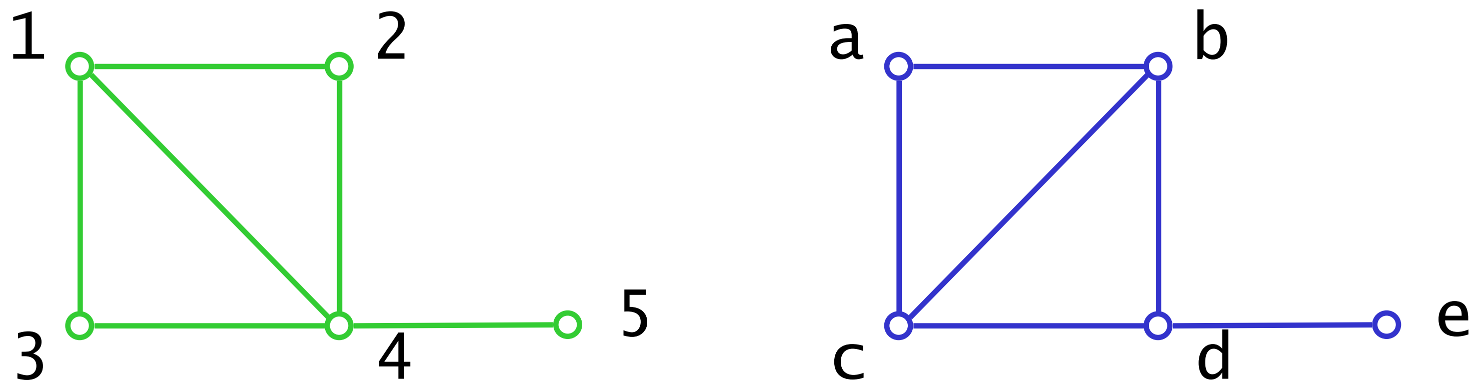




V = {p,q,r,s,t}
E = {pr,ps,pt,qs,qt,rt}

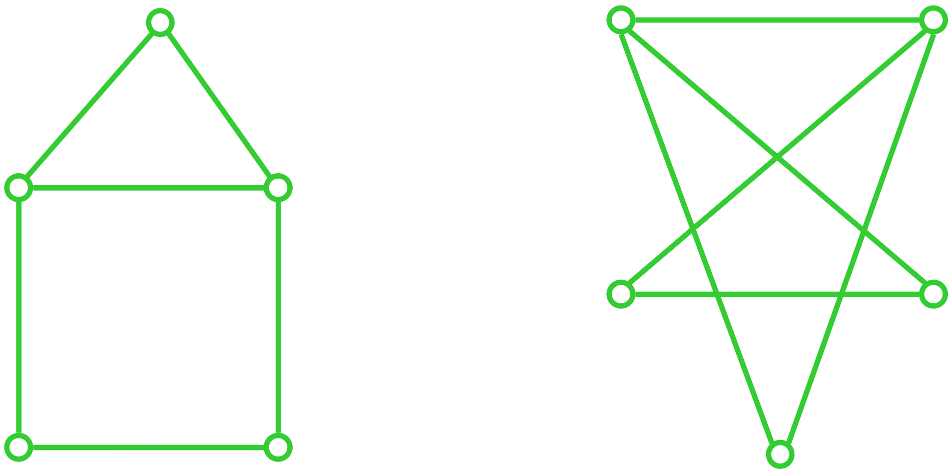
V' = {1,2,3,4,5}
E' = { {i,j} | j≥i+2 }

formeel: een isomorfisme tussen (V,E) en (V',E')
is een bijectie f: V → V'
met de eigenschap
{p,q} ∈ E desdals {f(p),f(q)} ∈ E'



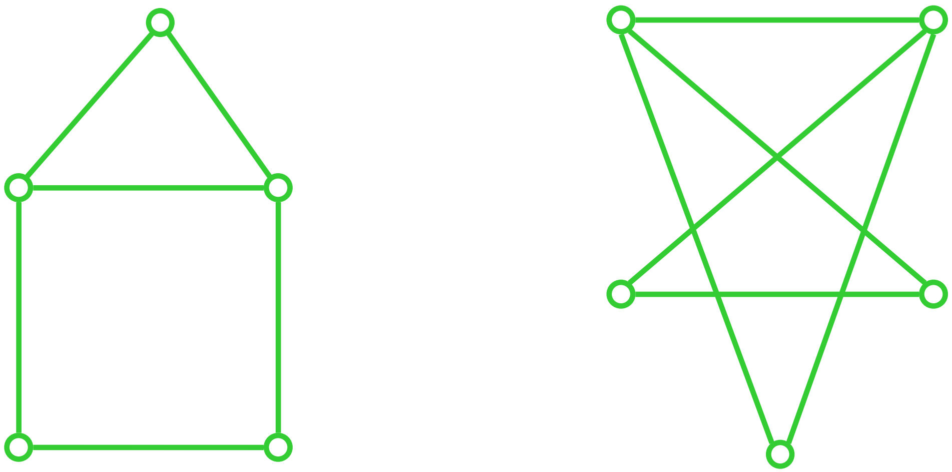
eigenschappen die bewaard blijven

- aantallen knopen en lijnen
- aantallen knopen van bepaalde graad
- paden van bepaalde lengte



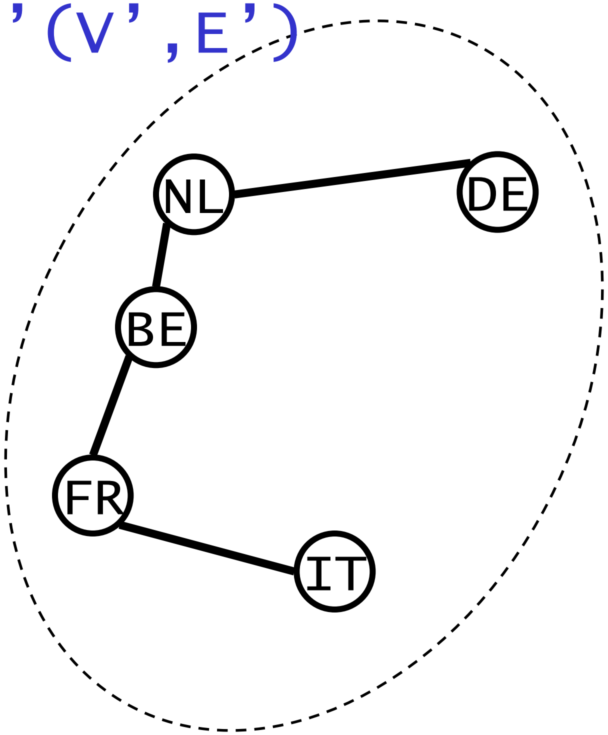
?? grafen

het is niet helemaal duidelijk of grafen zonder ‘namen’ van de knopen gelijk zijn of isomorf: we kiezen voor isomorf (zie Schaum Fig. 8-6)

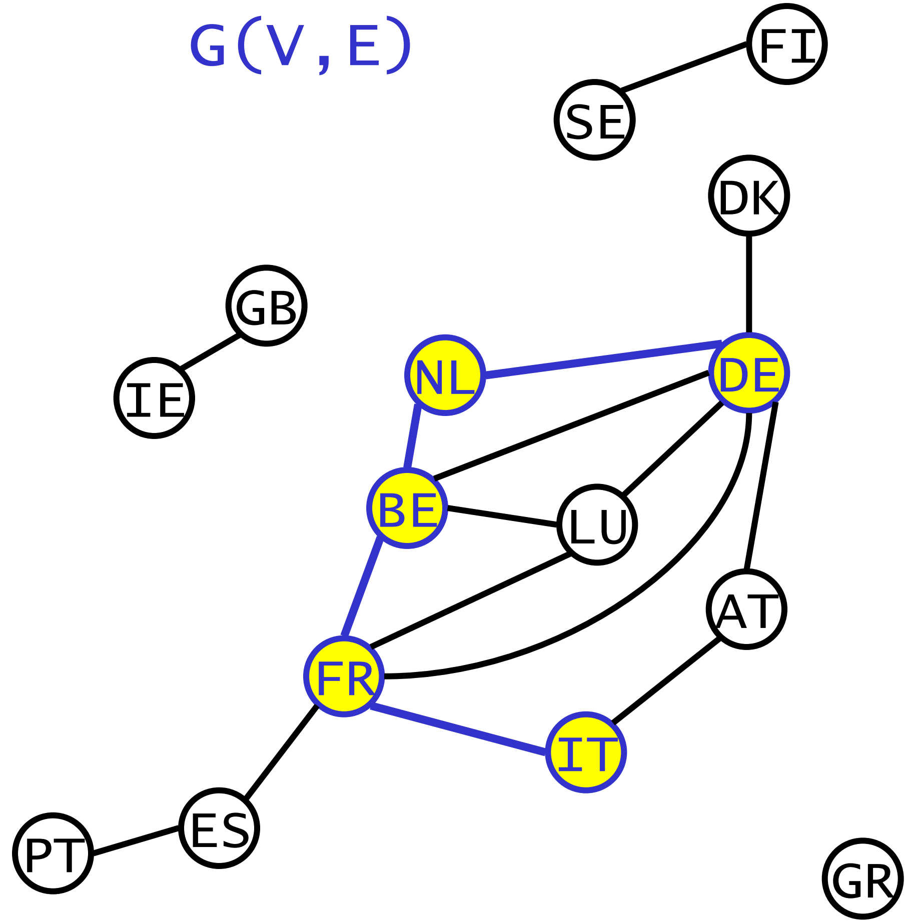


het begrip homeomorf dat Schaum introduceert zullen we niet behandelen

G'(V',E')

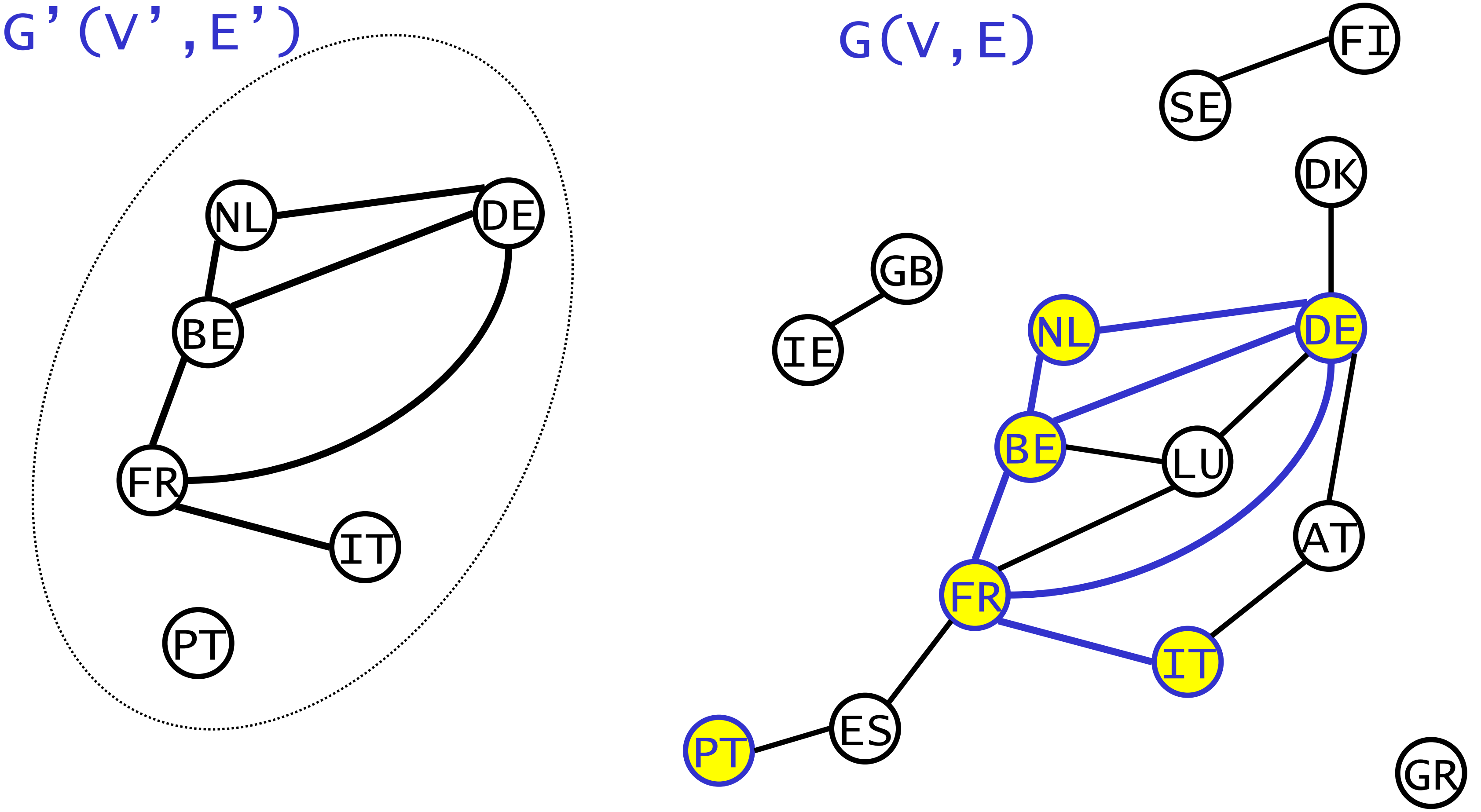


G(V,E)



$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

geïnduceerde deelgraaf



$V' \subseteq V$,

$E' = \{ \{u,v\} \in E \mid u,v \in V' \}$

geïnduceerde deelgraaf

$G'(V',E') \quad G(V,E)$

$V' \subseteq V$,
$E' = \{ \{u,v\} \in E \mid u,v \in V' \}$

een geïnduceerde deelgraaf wordt bepaald door de gekozen knopen: alle lijnen tussen die knopen uit de oorspronkelijke graaf doen mee.

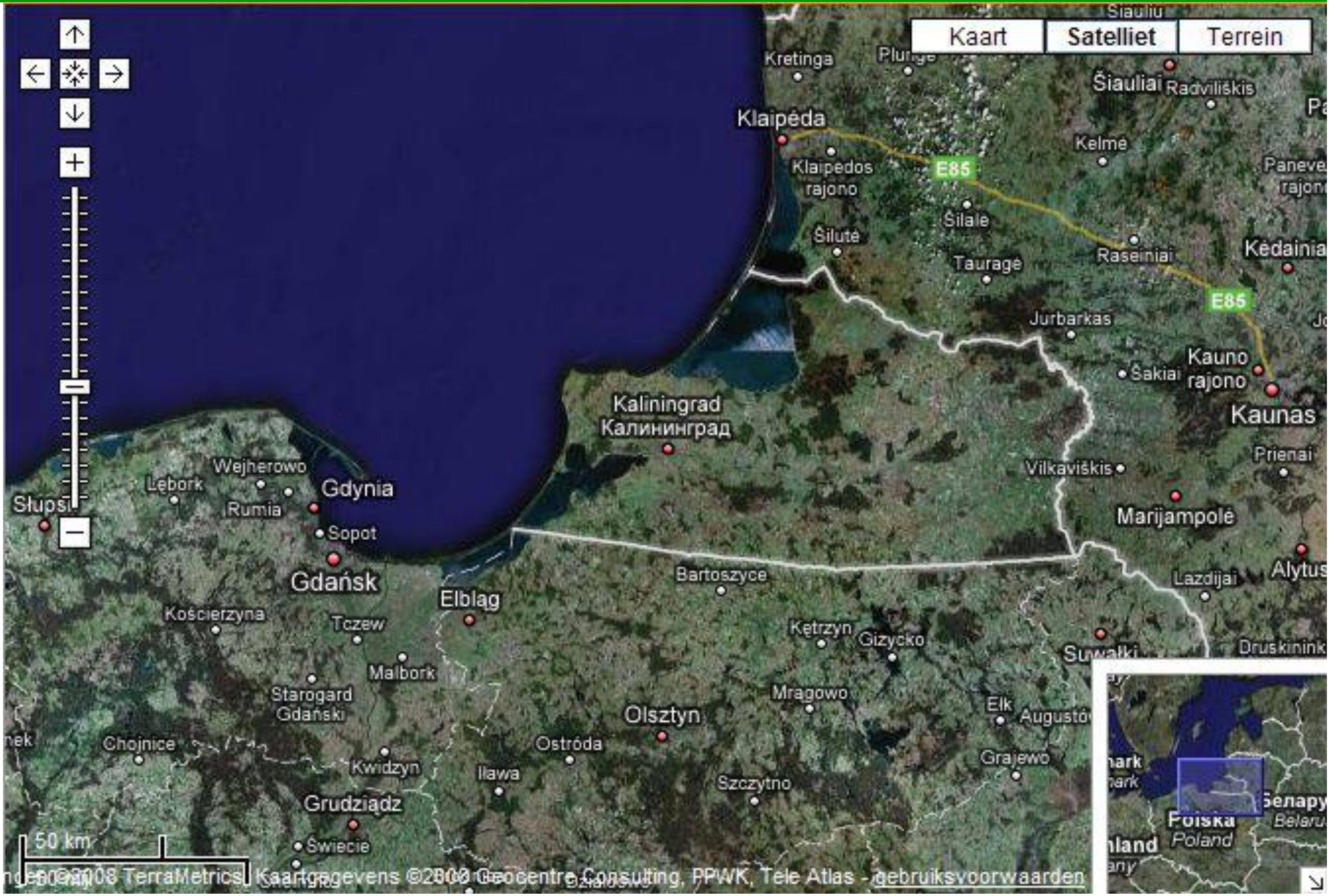
bij een (algemene) deelgraaf worden (in het algemeen) minder lijnen gekozen dan die door de knopen bepaald zijn.

Kaliningrad?

Kaliningrad heette vroeger Koningsbergen (Königsberg in Preußen), aan de rivier de Pregel.
Het wordt wel de geboorteplaats van de grafentheorie genoemd omdat de grote geleerde Euler er nadacht of hij een wandeling kon maken die elke brug één keer zou aandoen.
Er waren zeven bruggen. Tegenwoordig vijf.

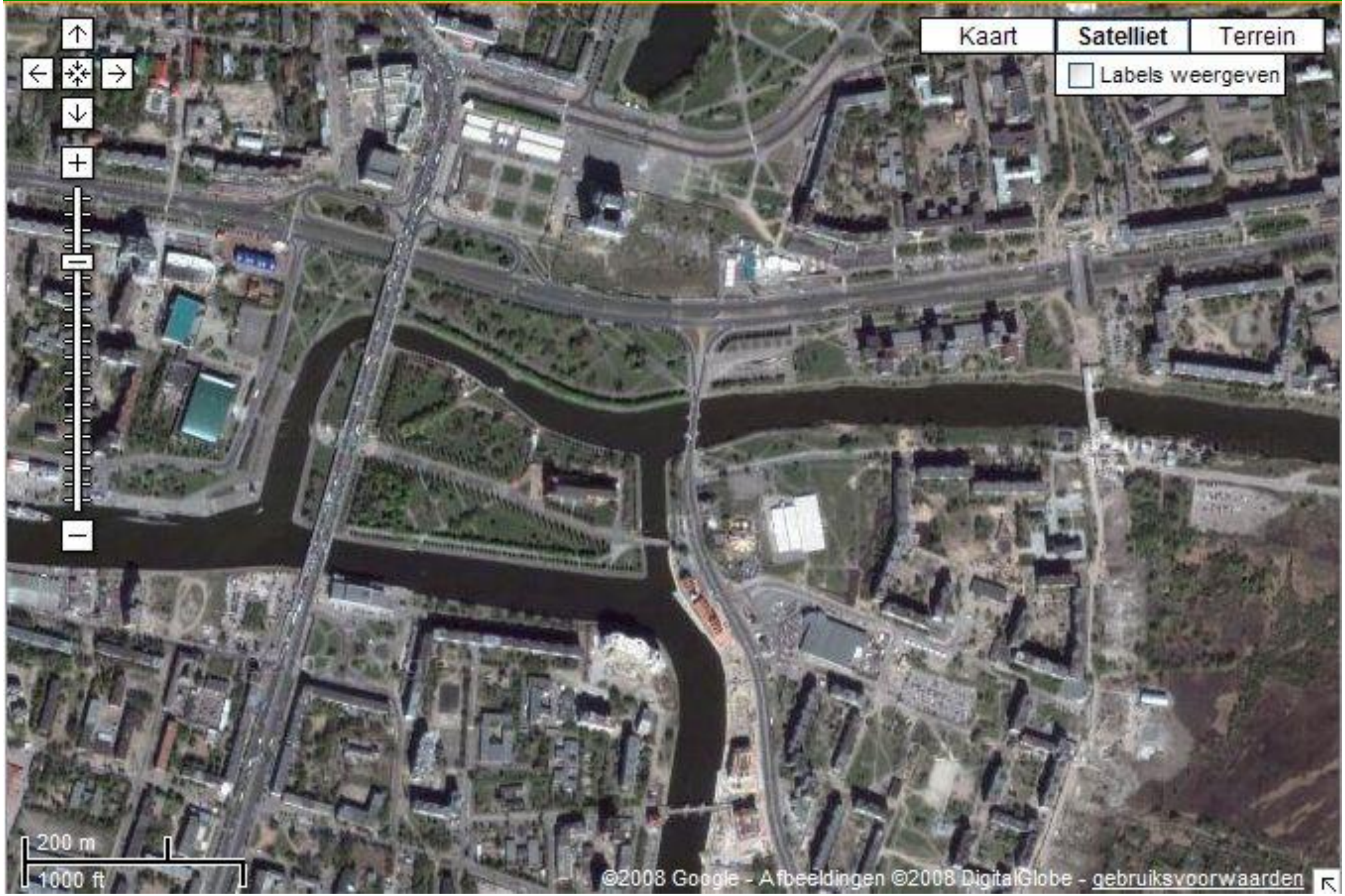
Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, 128-140.

Kaliningrad



http://maps.google.com/maps?ll=54.716667,20.516667&spn=0.1,0.1&t=h

Kaliningrad



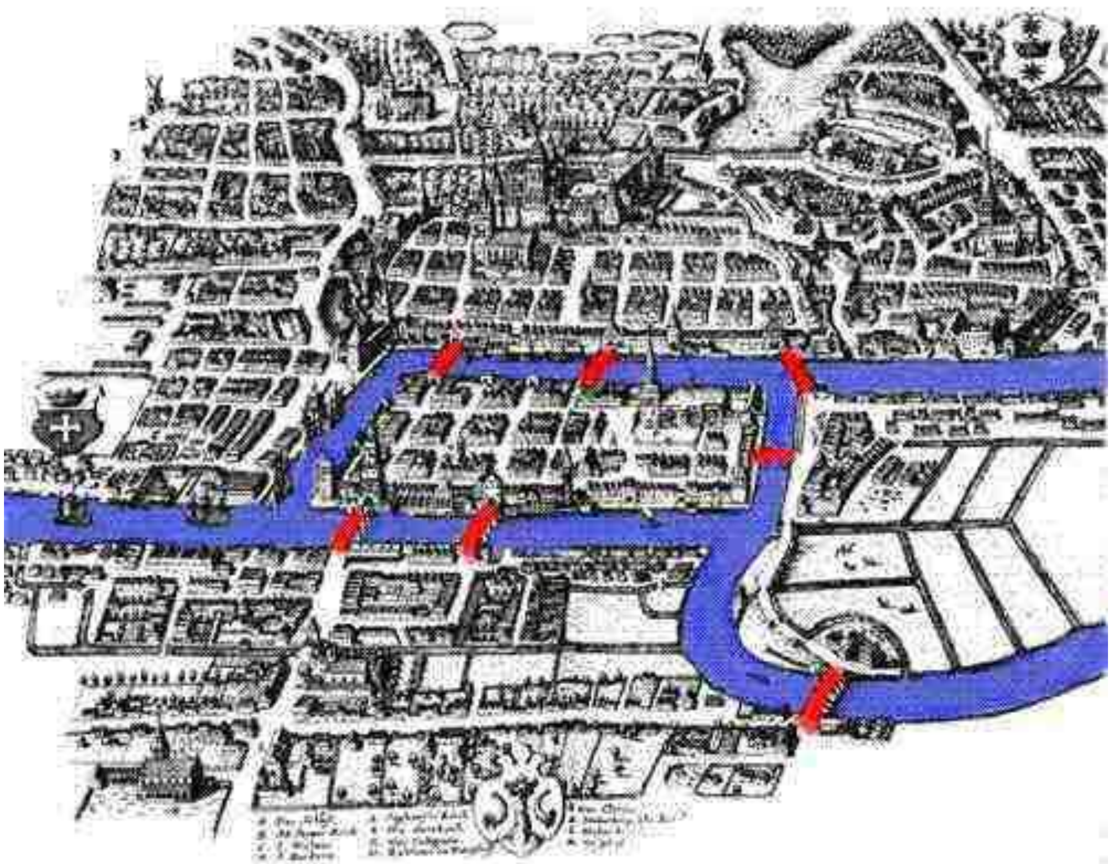
multigraaf

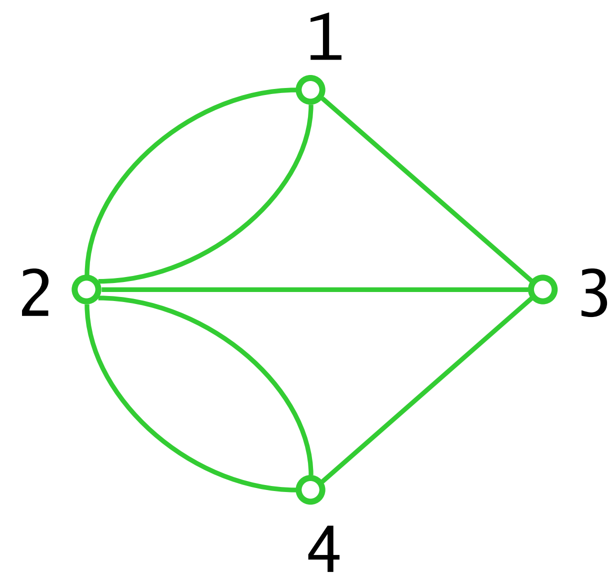
Een multigraaf is een heel natuurlijk begrip. Laat toe dat er meerdere ‘parallelle’ lijnen tussen dezelfde twee knopen lopen. Dat past echter niet makkelijk in onze definitie van graaf: de lijnen vormen een verzameling en de elementen daarvan kunnen niet twee keer in die verzameling zitten.
Ook een lus (lijn met gelijk begin- en eindpunt) past niet. Een lijn bestaat uit een verzameling met twee knopen. Die dus verschillend moeten zijn (volgens de oorspronkelijke definitie).

Daar is allemaal wel een mouw aan te passen, maar Schaum laat die formalisering achterwege. Wij ook. We doen het met het intuïtieve concept.

multigraaf

- meervoudige lijn
- lus *loop*



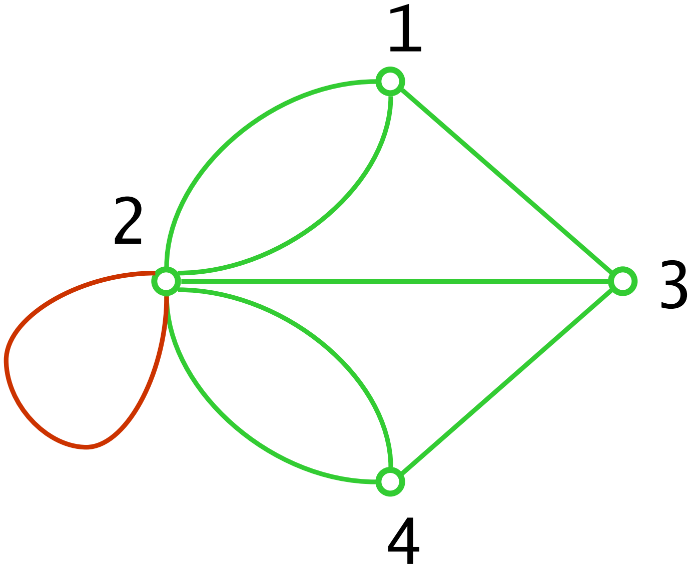


$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (m_{ij})$$

multigraaf

- meervoudige lijn
- lus *loop*

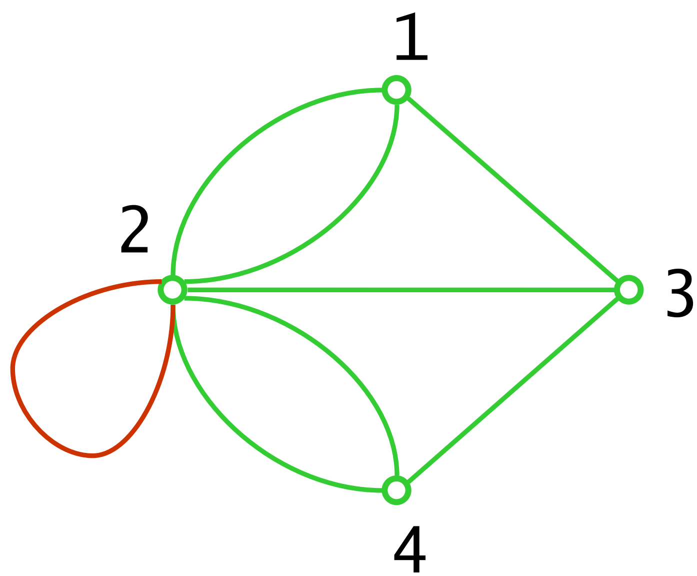


$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M = (m_{ij})$

multigraaf

- meervoudige lijn
- lus *loop*



waarom is de eerdere definitie van een graaf ongeschikt voor deze begrippen ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

graaf G bestaat uit twee verzamelingen

- V = V(G) knopen
- E = E(G) lijnen

lijn is een ongeordend tweetal knopen

$e = \{u,v\}$

$M = (m_{ij})$

pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$$

lengte n

van v_0 naar v_n

(tussen…, verbindt…)

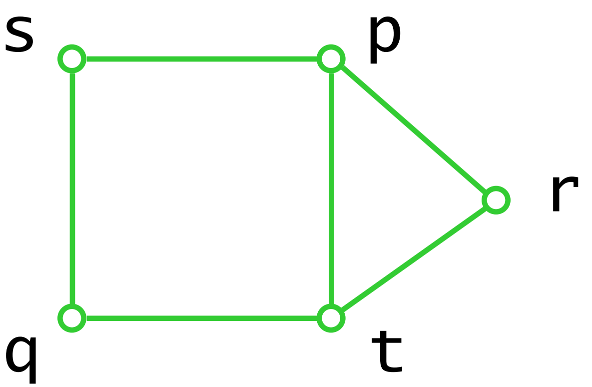
begin- eindpunt

gesloten pad $v_0 = v_n$

$(v_0, v_1, \dots, v_n)$

$v_0 \to v_1 \to \dots \to v_n$

$v_0 v_1 \dots v_n$



p→t→r→t→q

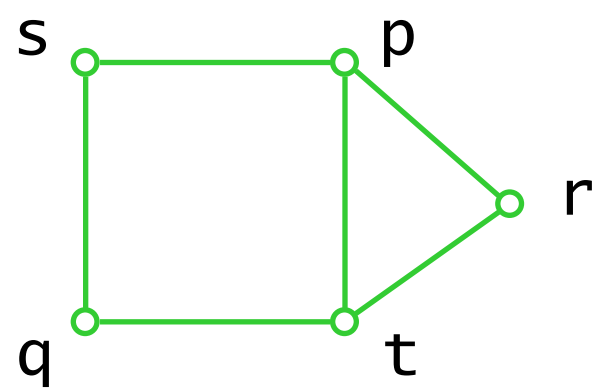
p

r→t→p→s→q→t→r

paden

pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$$



simpel pad verschillende v_i

trail verschillende e_i

cykel $n \geq 3$ &
gesloten &
verschillende v_i, behalve $v_0 = v_n$

circuit gesloten trail

Theorem 8.2

Als er een pad is van u naar v dan is er ook een simpel pad van u naar v.

Bewijs.
Neem een pad π van minimale lengte van u naar v.
Dan is dat pad π simpel.

Immers als π een herhaling van knopen bevat kunnen we de lijnen tussen die knopen (en een van die knopen) weglaten en vinden zo een korter pad van u naar v. Dat kan niet, want het pad π was minimaal gekozen. ∎

Theorem 8.2

Als er een pad is van u naar v dan is er ook een simpel pad van u naar v.

simpel pad verschillende v_i

cykel $n \geq 3$ &

gesloten &

verschillende v_i, behalve $v_0 = v_n$

de eis $n \geq 3$ voor cykel is om te vermijden dat een enkele lijn die heen en weer doorlopen wordt ook als cykel geldt;

makkelijker zou het zijn om te eisen dat in een cykel alle *lijnen* verschillen, …

(hoewel dat voor multigrafen misschien ongewenst is)

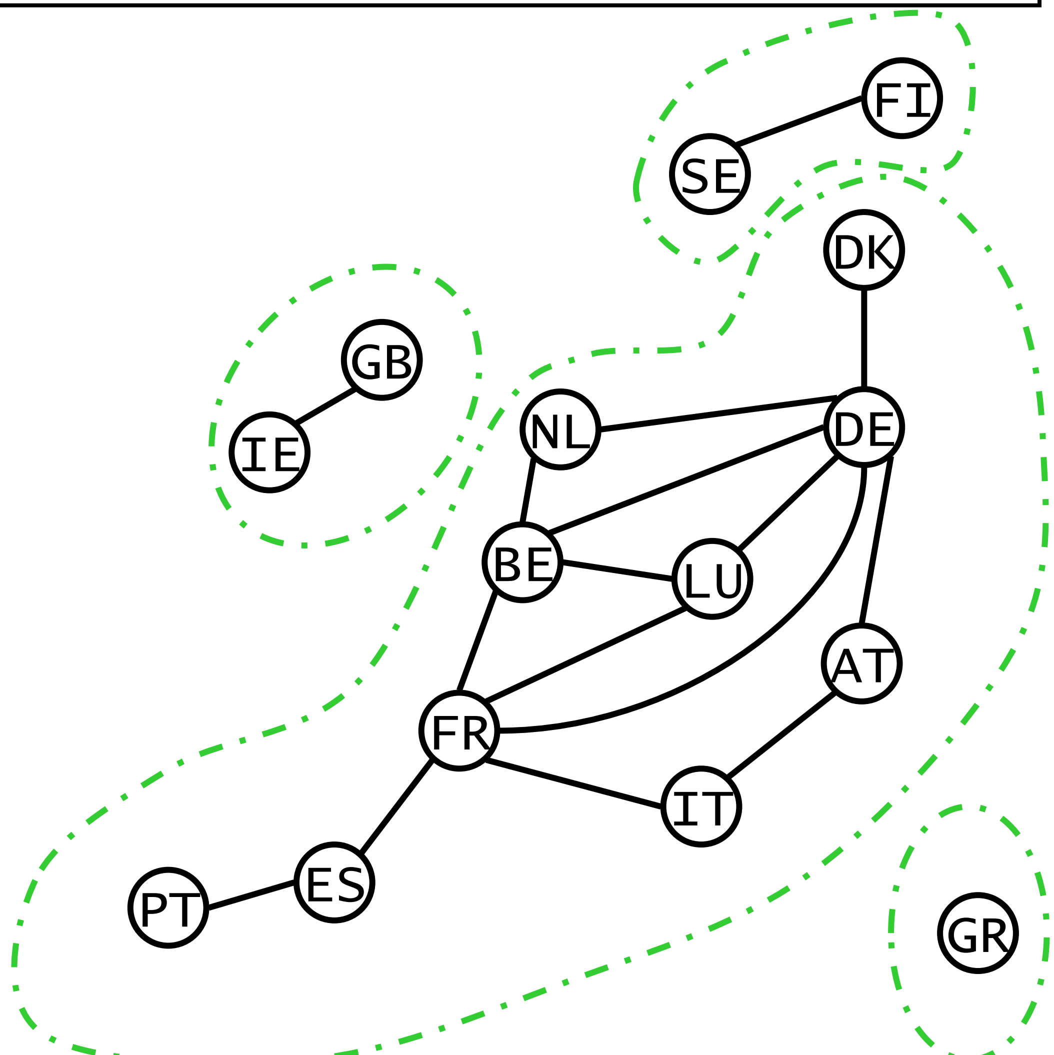
… dat begrip heet in Schaum een trail

intuitief eenvoudige begrippen, lastig precies te maken *samenhangend* : tussen elk tweetal punten bestaat een pad.

connected

'er bestaat een pad'
equivalentie relatie
- reflexief
- symmetrisch
- transitief

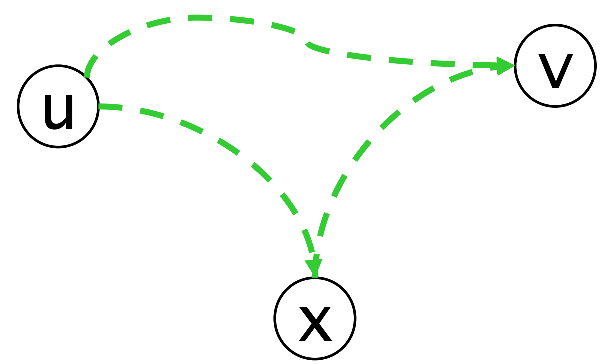
component



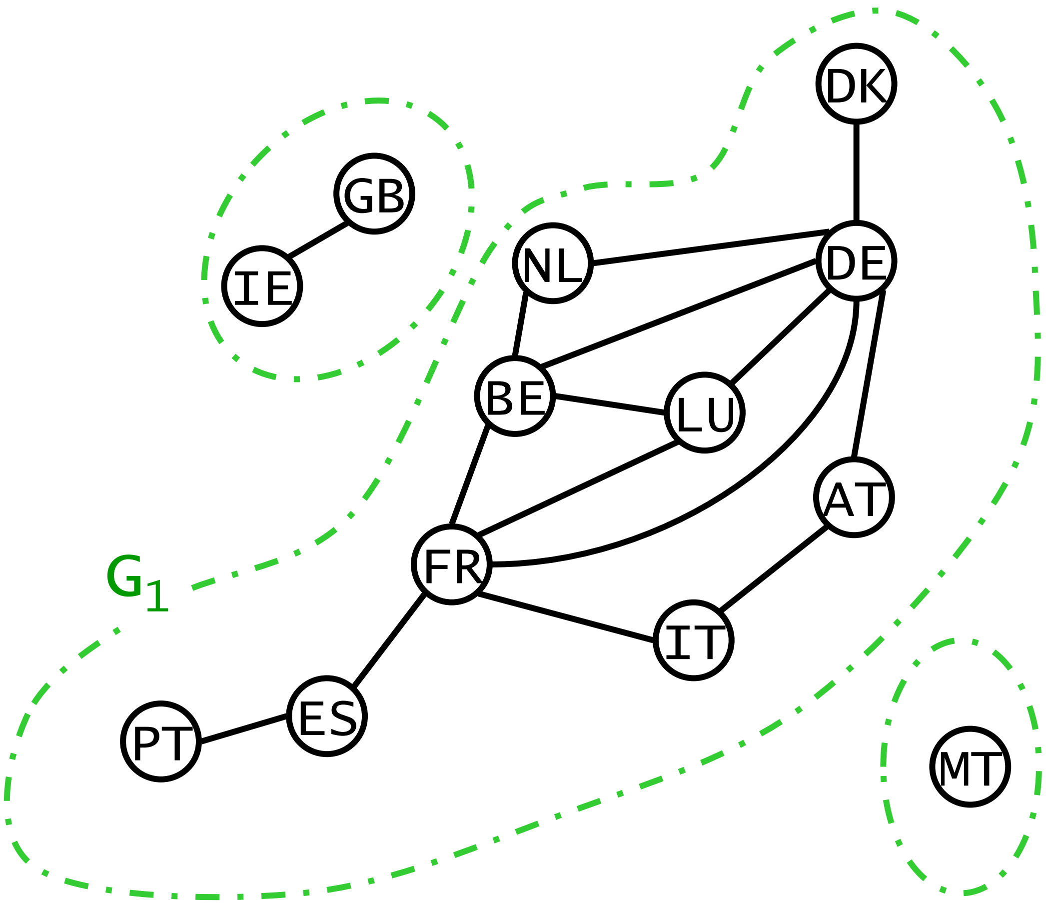
afstand : lengte van een kortste pad tussen u en v
d(u,v)
tussen verschillende componenten wordt de afstand op oneindig gesteld.

driehoeksongelijkheid

d(u,v) ≤ d(u,x) + d(x,v) voor elk drietal u,v en x



diameter diam(G) maximale afstand



d(ES,DK) = 3
d(BE,AT) = 2
d(GB,GB) = 0
d(IE,FR) = ∞

$\mathrm{diam}(G_1) = 4$

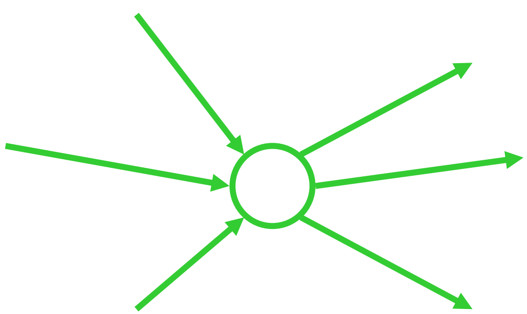
Een *Euler trail* is een gesloten wandeling die elke lijn precies één keer bevat. ‘traversable’

trail ‘all edges distinct’

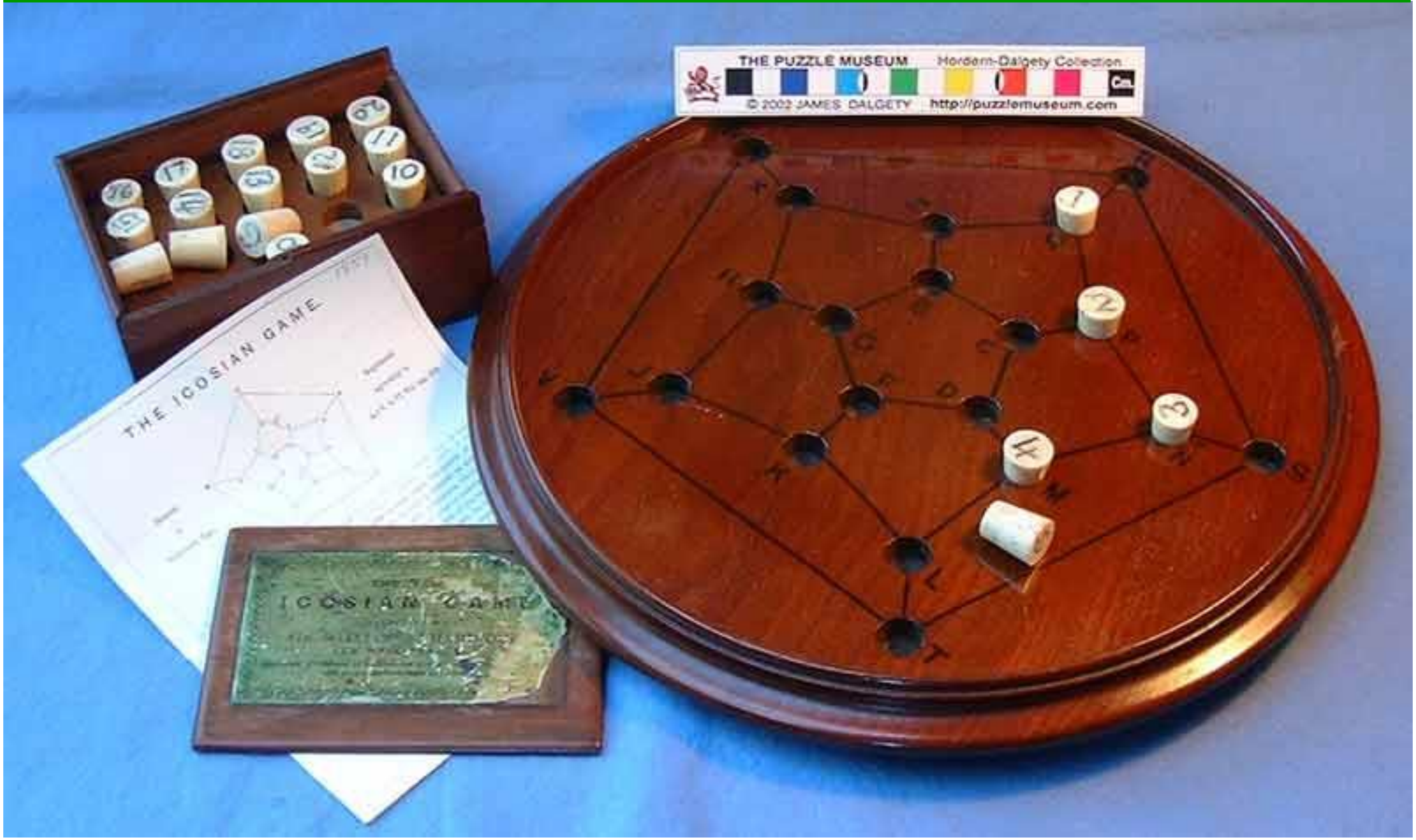
▶ zeven bruggenprobleem van Köningsbergen

Theorem 8.3

Een samenhangende graaf heeft een Euler trail desdals elk punt even graad heeft.



Icosian Game



http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm

Euler vs. Hamilton

- **Euler graaf**

  Leonhard Euler (1736) Königsberger bruggen
  elke *lijn* precies een keer 'trail'

  - eenvoudige karakterisatie Theorem 8.3
  - efficient te herkennen

- **Hamilton graaf**

  William Rowan Hamilton (1858) Icosian Game
  elke *knoop* precies een keer
  'handelsreiziger'

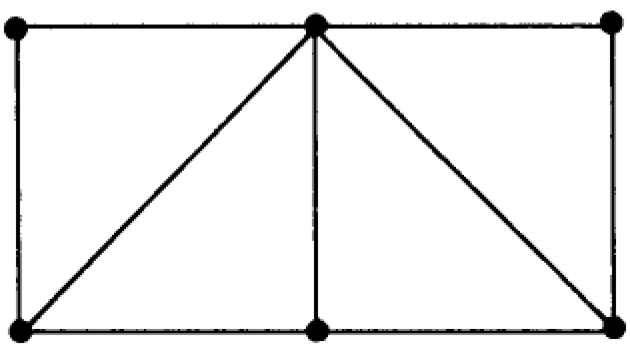
Ore (1960) A graph with n vertices (n>3) is Hamiltonian if, for each pair of non-adjacent vertices, the sum of their degrees is n or greater

- geen karakterisatie
- NP compleet

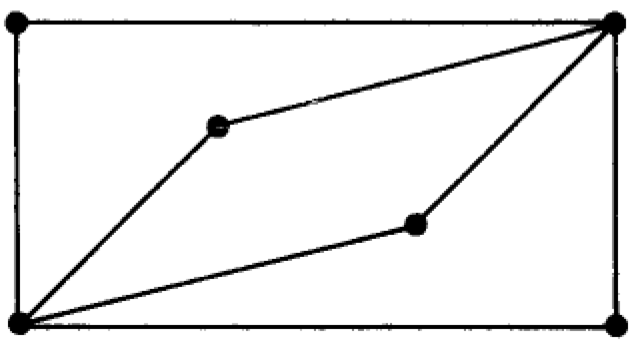
hoe bedoelt u?

Note that
an Eulerian circuit traverses every edge exactly once, but may repeat vertices, while a Hamiltonian circuit visits each vertex exactly once but may repeat edges.

schaum p.161



(*a*) Hamiltonian and non-Eulerian



(*b*) Eulerian and non-Hamiltonian

hoe bedoelt u?

Note that
an Eulerian circuit traverses every edge exactly once, but may repeat vertices, while a Hamiltonian circuit visits each vertex exactly once but may repeat edges.

schaum p.161

laat ik het uitleggen:
hoe kan een Hamilton circuit een lijn herhalen en tegelijk elke knoop slechts één keer aandoen?

tiepfout

schaum p.162

Theorem 8.5 (Dirac, 1952): Let G be a connected graph with n vertices. Then G is Hamiltonian if $n > 3$ and $n/2 \le \deg(v)$ for each vertex v in G.

niet om uit het hoofd te leren!
het is een *illustratie* van het type stellingen dat verkregen is om het begrip Hamiltonian te vatten.

de stelling van Ore (van enige slides hiervoor) is een ‘verbetering’ van deze stelling van Dirac.
(*zie je dat?*)

labels

In praktische toepassingen wordt de graaf voorzien van extra informatie, meestal langs de lijnen. We spreken van een gelabelde graaf. Als de labels *getallen* zijn heet het vaak een gewogen graaf. De gewichten stellen dan afstanden, kosten, capaciteiten (etc.) van de weergegeven verbindingen voor.

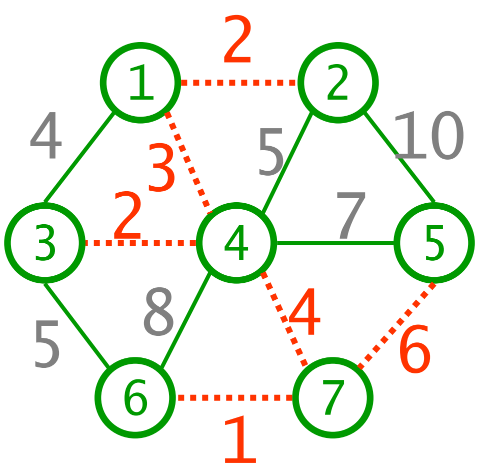
Zie colleges Algoritmiek en Datastructuren.

§8.6 labels & gewichten

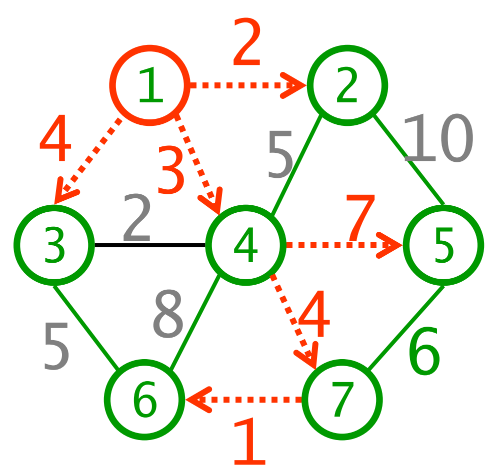
gelabelde graaf informatie
gewogen graaf getallen (op lijnen)

w(e)
capaciteit & kosten (lengte, tijd)
gewicht van een pad:

- minimale opspannende boom
- kortste paden



Prim, Kruskal

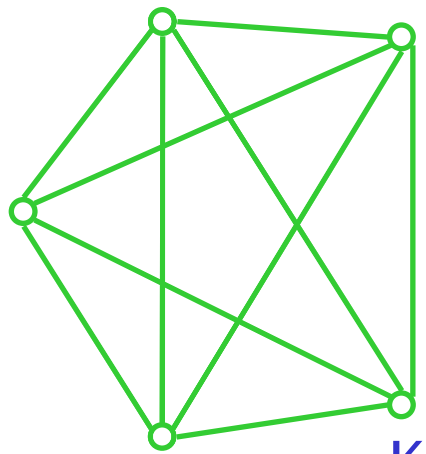


Dijkstra

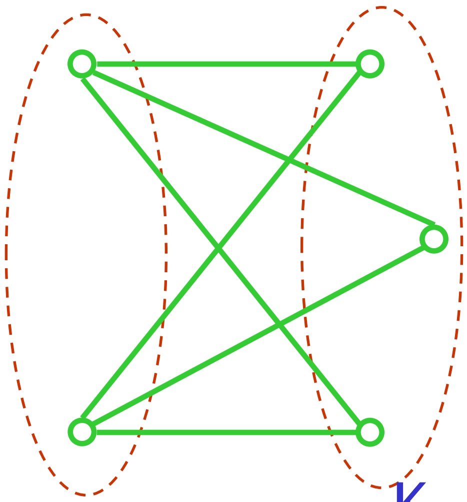
compleet K_n

K_{mxn}

compleet bipartiet



K_5

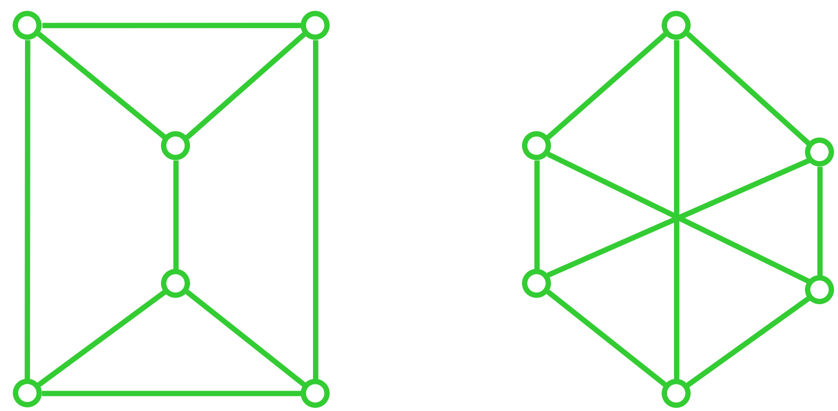


K_{2x3}

k-regulier

alle knopen graad k

bv. Petersen graaf



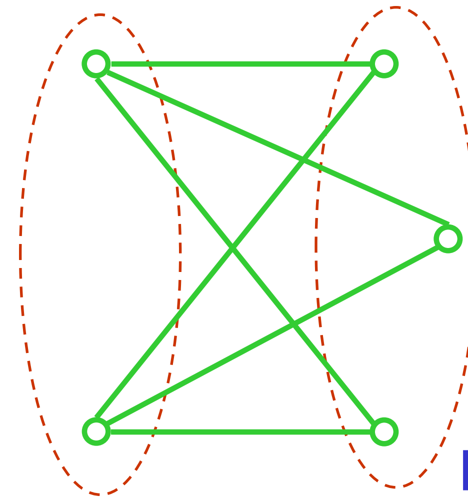
(zijn deze grafen isomorf?)

compleet K_n

$K_{m \times n}$

compleet bipartiet

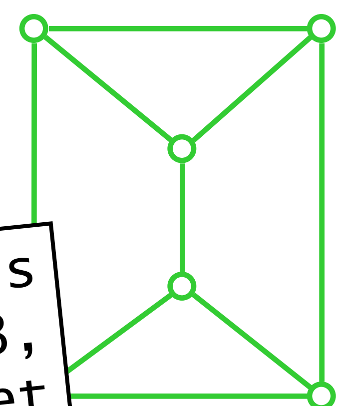
pas op: niet elke bipartiete graaf is compleet! (uitroepteken)

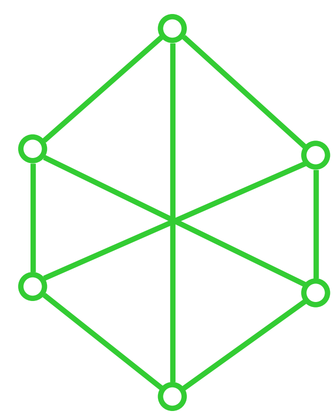


$K_{2 \times 3}$

k-regulier

bv. Petersen graaf





niet isomorf: links is er cykel van lengte 3, rechts niet

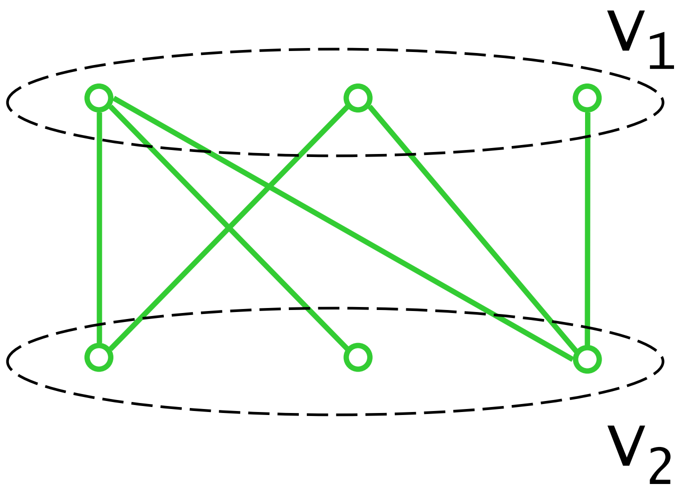
(zijn deze grafen isomorf?)

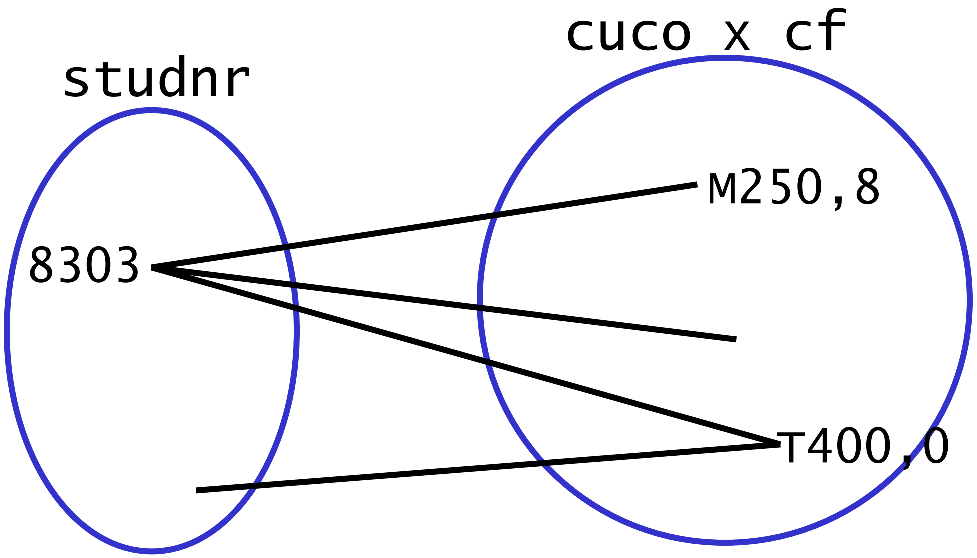
bipartiet

Een graaf is bipartiet als de knopen in twee deelverzamelingen V_1 en V_2 gesplitst kunnen worden zó dat de takken tussen V_1 en V_2 lopen.

Karakterisatie: de graaf bevat geen cykels van oneven lengte. Dat is een Stelling.

Een graaf is bipartiet als de knopen in twee deelverzamelingen V_1 en V_2 gesplitst kunnen worden zó dat de lijnen tussen V_1 en V_2 lopen.



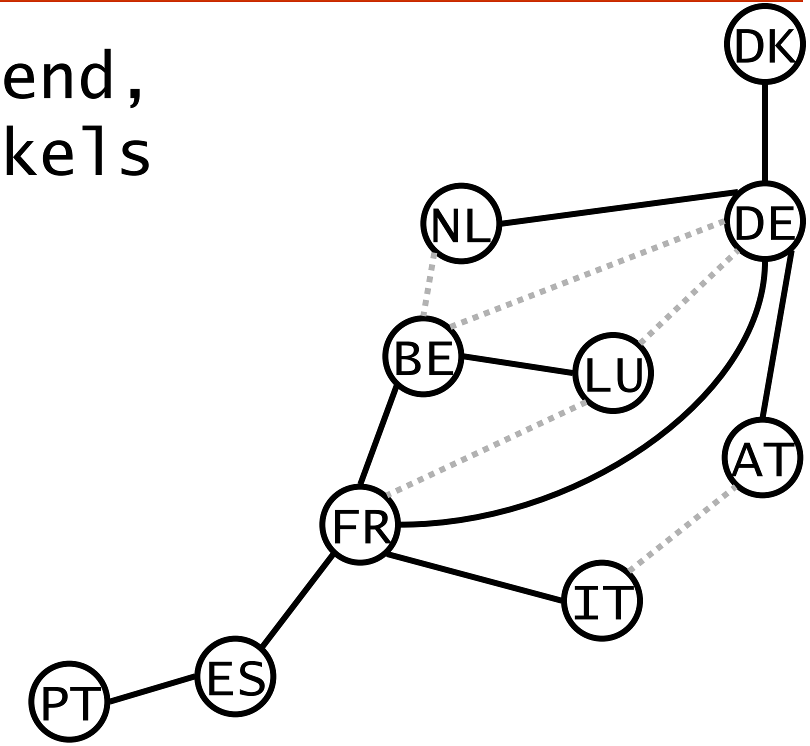


Theorem 8.11

Een graaf $G = (V,E)$ is bipartiet dan en slechts dan als G geen oneven cykels bevat.

(zie opgaven)

boom(-graaf): samenhangend,
zonder cykels



Theorem 8.6

G is een graaf met n≥1 knopen. Equivalent zijn:
1. G is een boom
2. G is zonder cykels & heeft n-1 lijnen
3. G is samenhangend & heeft n-1 lijnen

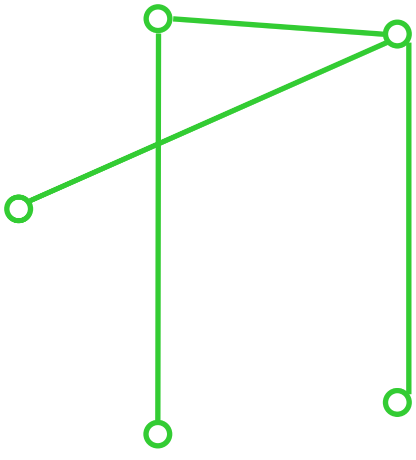
(zie bomen)

opspannende boom

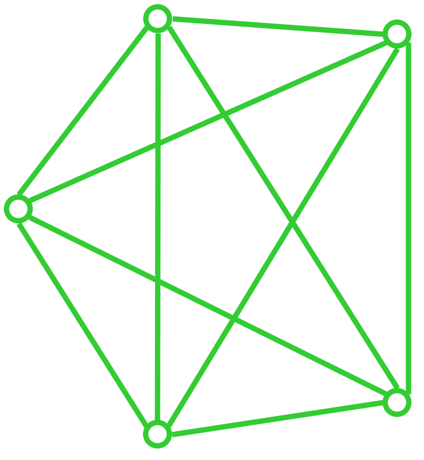
een samenhangende graaf met n knopen heeft

- minimaal n-1 lijnen

- maximaal $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lijnen



boom



compleet

http://www.chefgarret.com/article/256

gas, water en licht-probleem

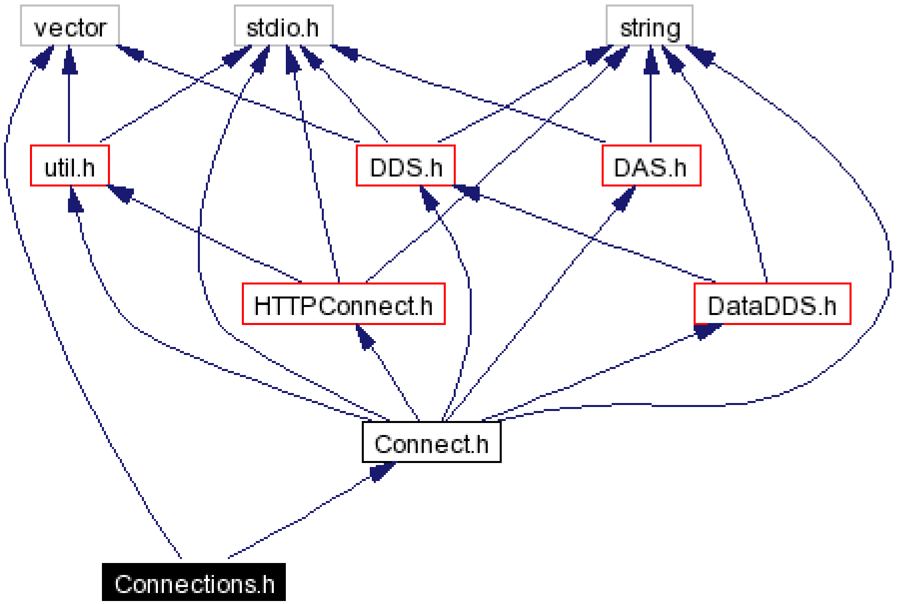
vlakke (of planaire) grafen kunnen getekend worden (in het vlak) zonder kruisende lijnen

formule van Euler: $v - e + r = 2$
relatie tussen aantal knopen v, lijnen e en ‘gebieden’ r in een vlakke graaf

Kuratowski: een graaf is vlak desdals deze geen K_5 of $K_{3,3}$ bevat

“bevat” als homeomorfe subgraaf (tja)

9 Gerichte grafen



gerichte graaf G bestaat uit

- V = V(G) knopen (punten; vertices,nodes,points)
- E = E(G) pijlen (takken,kanten; edges)

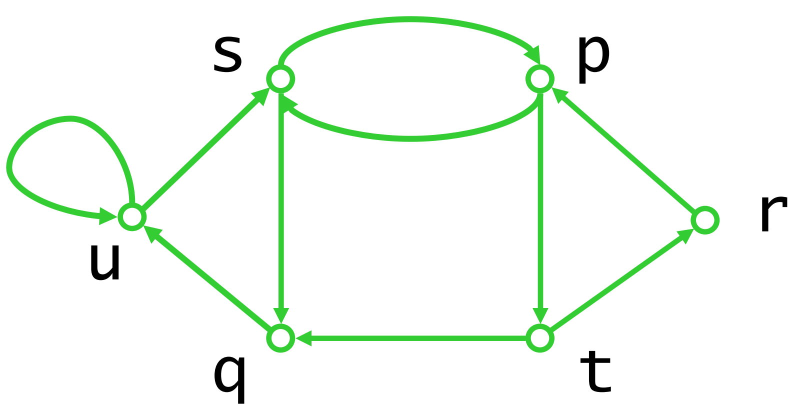
pijl ~ geordend tweetal knopen

e = (u,v) van … naar …

begin, eind; staart, kop

opvolger

lus



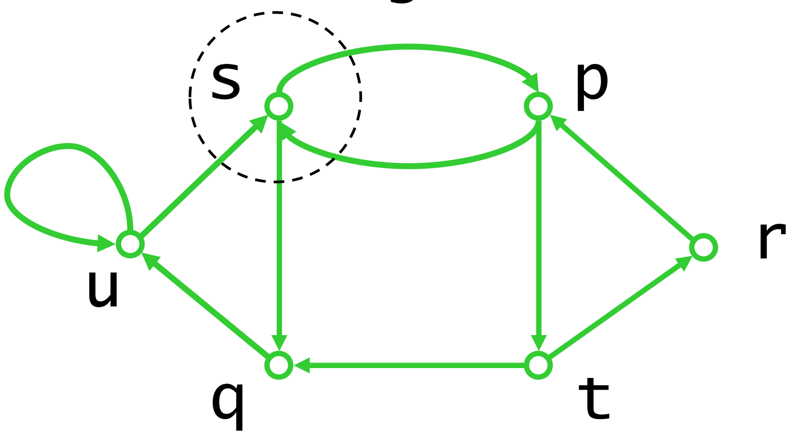
E =

{ (p,s), (p,t),
(q,u), (r,p),
(s,p), (s,q),
(t,q), (t,r),
(u,s), (u,u) }

§9.3 begrippen

uitgraad outdeg(u)
ingraad indeg(u)
bron source indeg(u) = 0 put sink outdeg(u) = 0

verbindingsmatrix



naar

van

$$
\begin{array}{c}
 \\ p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} p & q & r & s & t & u \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Theorem 9.1

In een gerichte graaf $G = (V,E)$ geldt

$\sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) = |E| = \sum_{v \in V} \text{indeg}(v)$.

(gericht) pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$

$e_i = (v_{i-1}, v_i)$

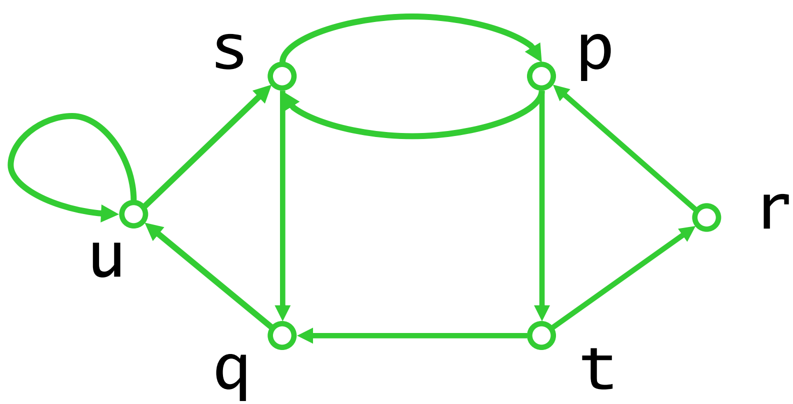
lengte

simpel, gesloten

opspannend bevat alle knopen vgl Hamilton

cykel

ongericht pad *semipad*



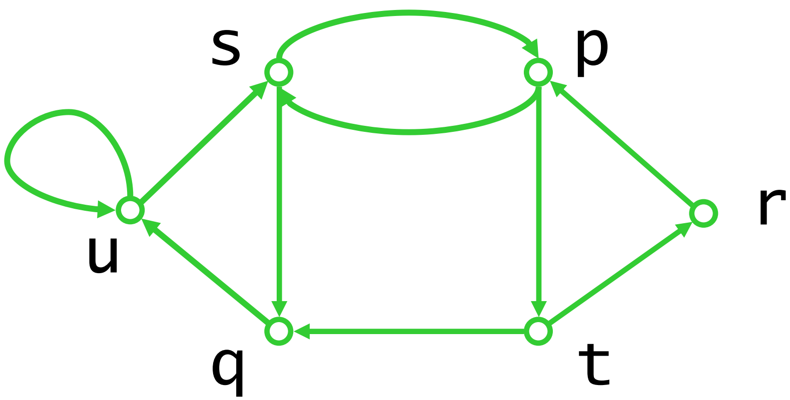
$q \rightarrow u \rightarrow s \rightarrow p \rightarrow t \rightarrow r$

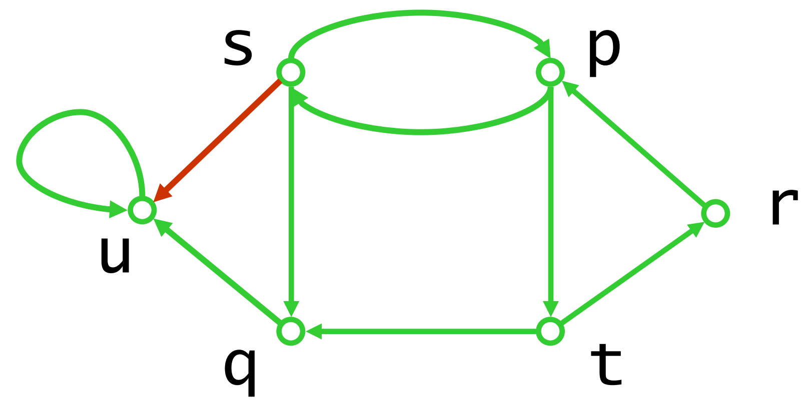
$p \rightarrow s \rightarrow q \leftarrow t \rightarrow r \leftarrow t$

samenhang

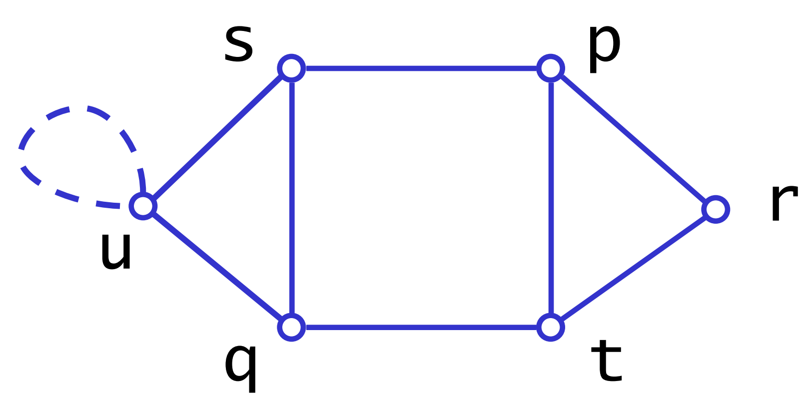
sterk samenhangend	gerichte wandelingen
zwak samenhangend	ongerichte wandelingen

sterk ⇔ gesloten opspannend pad
zwak ⇔ opspannend ongericht pad





onderliggende ‘graaf’



Theorem 9.2

sterk $\Leftrightarrow$ gesloten opspannend pad
zwak $\Leftrightarrow$ opspannend ongericht pad

Theorem 9.3

G gerichte graaf zonder cykels,
dan heeft G een put en een bron

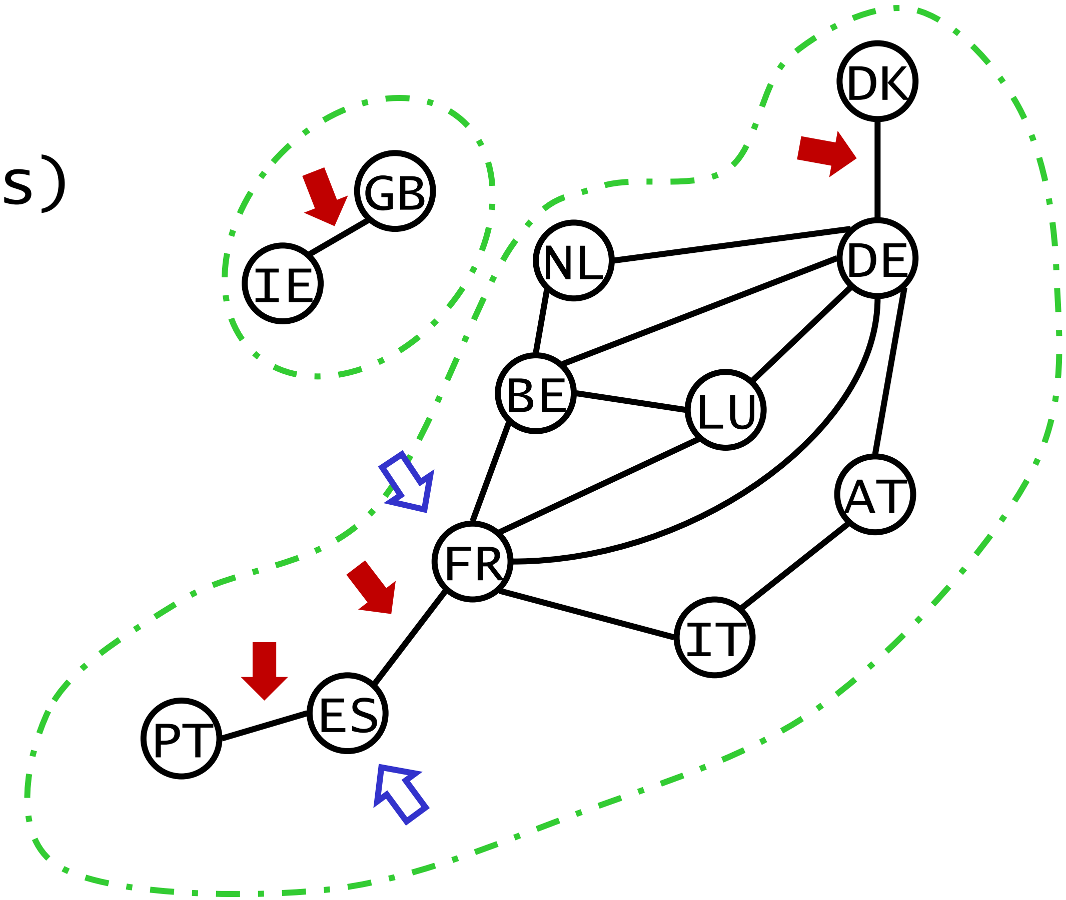
elders

end...

breekpunt

aantal componenten neemt toe

⇩ cut vertex
⬇ bridge (isthmus)



er zijn dan twee knopen die alleen verbonden zijn via die knoop/lijn