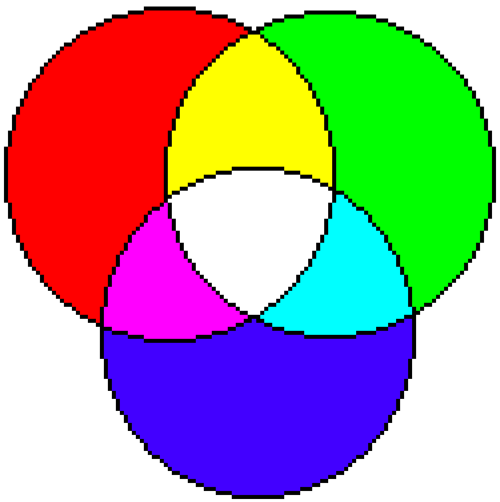
1 Verzamelingen



Symbolic Logic by Lewis Carroll

~1896 (2nd edition)

1. Babies are illogical.
2. Nobody is despised who can manage a crocodile.
3. Illogical persons are despised.

4. Therefore, babies can not manage crocodiles.

http://durendal.org/lcsl/
http://www.gutenberg.org/files/28696/28696-h/28696-h.htm
https://archive.org/details/symboliclogic00carr

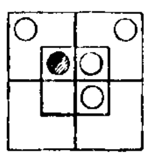
A Syllogism worked out.

That story of yours, about your once meeting the sea-serpent, always sets me off yawning;

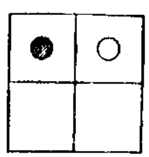
I never yawn, unless when I'm listening to something totally devoid of interest.

The Premisses, separately.

The Premisses, combined.



The Conclusion.



That story of yours, about your once meeting the sea-serpent, is totally devoid of interest.

$$xm_0 \dagger ym'_0 \text{ ¶ } xy_0$$

Fig. I.

$$xm_0 \dagger ym'_0 \text{ ¶ } xy_0$$

Two Nullities, with Unlike Eliminands, yield a Nullity, in which both Retinends keep their Signs.

A Retinend, asserted in the Premisses to exist, may be so asserted in the Conclusion.

Fig. II.

$$xm_0 \dagger ym_1 \text{ ¶ } x'y_1$$

A Nullity and an Entity, with Like Eliminands, yield an Entity, in which the Nullity-Retinend changes its Sign.

Fig. III.

$$xm_0 \dagger ym_0 \dagger m_1 \text{ ¶ } x'y'_1$$

Two Nullities, with Like Eliminands asserted to exist, yield an Entity, in which both Retinends change their Signs.

we gaan een nieuwe ‘taal’ leren,
de verzamelingenleer.

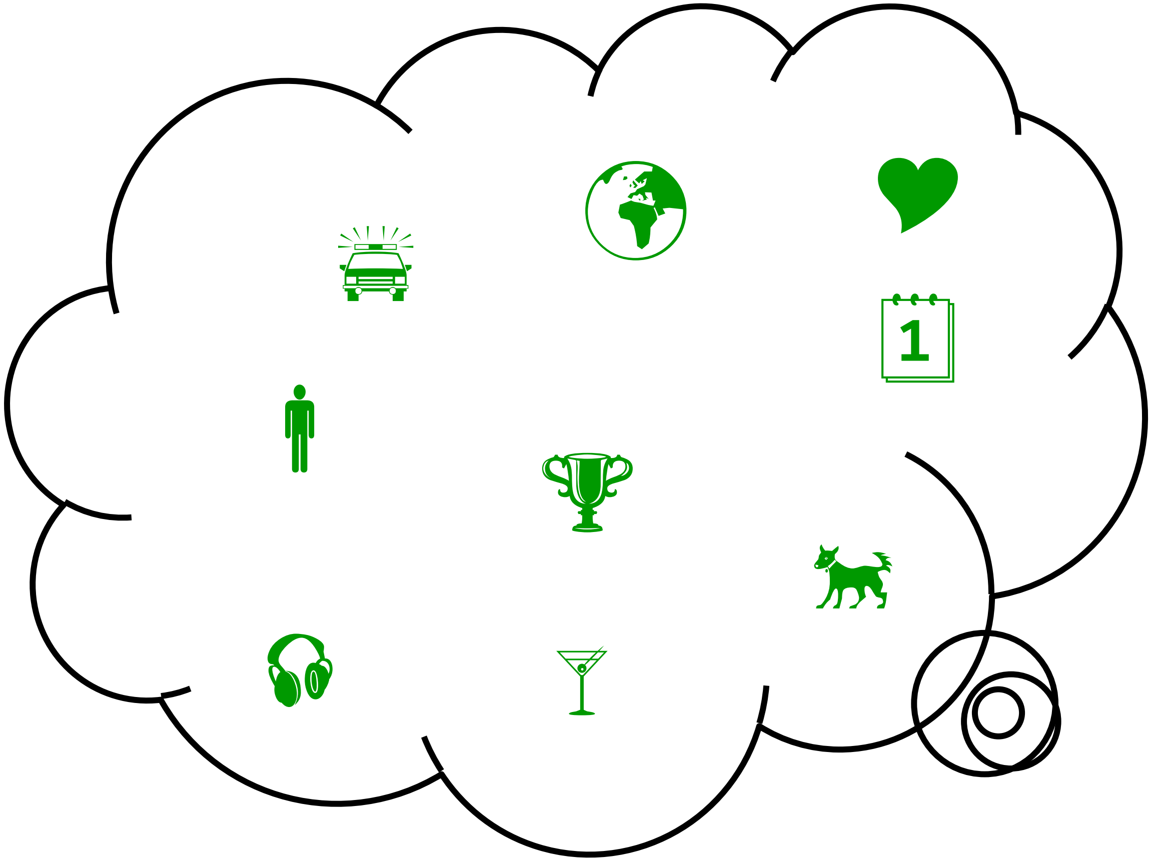
Begrippen, notaties, en technieken hoe we er mee kunnen werken.

Het voorbeeld van Lewis Caroll (hiervoor) laat zien dat dit soort afspraken door de eeuwen kunnen veranderen. Het voorbeeld laat ook twee aspecten zien die we ook hier tegenkomen: een grafische weergave (zie Venn diagram) en formeel redeneren (zie verzamelingenalgebra).

‘de grote drie’

050906 © de Volkskrant · Douwe Douwes, Raymond van der Meij

verzameling



§1.2 definitie (?)

"Een *verzameling* is het resultaat van het samennemen tot één geheel van een aantal onderscheidbare objecten."

… set may be viewed as a collection of objects …

volgorde, duplicaten

$\{ 0,2,4,6 \}$ extensional

$\{ 0,2,4, \dots \}$

$\{ x \mid x \text{ is even} \}$ intensional

$\{ x \mid P(x) \}$ eigenschap P

element van $x \in A$ $x \notin A$

gelijkheid $A = B$ $x \in A$ desdals $x \in B$

$\Leftrightarrow$

§1.2 definitie (?)

Een verzameling bevat elementen. $x \in A$ 'x in A'

In een verzameling is de volgorde of de aanwezigheid van duplicaten *niet* van belang, de verzameling wordt bepaald door zijn elementen.
$\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,1\}$

Een verzameling wordt gegeven door de elementen expliciet te noemen (met behulp van puntjes … als het moet) of door een eigenschap van de elementen te geven.

$\{ x \mid P(x) \}$ wordt uitgesproken als "de verzameling van alle elementen x waarvoor geldt dat …"

$\{ x \mid P(x) \}$ eigenschap P

element van $x \in A$
gelijkheid $A = B$ $x \in A$ desdals $x \in B$

$A = \{ x \mid x \text{ is even} \}$
$B = \{ x \mid x^2 \text{ is even} \}$

x is even desdals x^2 is even

Twee verzamelingen zijn gelijk als ze dezelfde elementen bevatten. Hier zijn A en B verschillend gedefinieerd, maar als verzameling getallen gelijk.

Het domein (universum) is hier stilzwijgend $\mathbb{N}$.

x is even desdals x^2 is even

De definierende eigenschappen van A en B gelden voor dezelfde x.

desdals “dan en slechts dan als” $\Leftrightarrow$.
wiskundig dialect voor: als het één waar is ook het ander (twee richtingen op)

in het engels vaak iff (met dubbel f) if and only if

(St Petersburg 1845 - Halle 1918)

“ Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen. ”

Über eine Eigenschaft des Imbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Crelles Journal für Mathematik*, **77** (258-263) 1874.

http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_cantor

Georg Cantor

Het begrip verzameling werd geformaliseerd door Georg Cantor, die ook belangrijke inzichten over oneindigheid heeft ontwikkeld (waarover later meer).

universum	U	*universal set*
lege verzameling	$\varnothing$	*empty set*

deelverzameling $A \subseteq B$ echt $A \subset B$ (!)
inclusie, bevat in

$\{ 3,5,7,11,13 \} \subseteq \{ 1,3,5,7,9,11,13,15 \}$
$\{ 2,3,5,7 \} \not\subseteq \{ 1,3,5,7,9,11,13,15 \}$

gelijkheid

$A=B$ desdals $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$

§1.3 begrippen

Om te redeneren over een bepaald "domein" kiezen we de verzameling van alle mogelijke elementen, *het universum*.
De *lege verzameling* {} heeft geen elementen.
Notatie gewoonlijk $\varnothing$.

Deelverzameling $A \subseteq B$ wil zeggen dat elk element van A ook in B te vinden is.
Dan geldt of $A = B$ (*gelijkheid*: ook alle elementen van B zitten in A) of $A \subset B$ (*echte inclusie*: er is een element in B dat niet in A zit).
Vergelijk met getallen:
als $x \leq y$ dan ofwel $x = y$ of $x < y$.

De notatie $A \subseteq B$ en $A \subset B$ wordt niet overal zo gebruikt. Het is ook gewoon om $\subset$ (inclusie) en $\subsetneq$ (strict) te gebruiken. (*maar niet hier*!)

getalsverzamelingen

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen $\mathbb{N}^+$

{ 0,1,2,3, … }

$\mathbb{Z}$ gehele getallen *integers*

{ … ,-3,-2,-1,0,1,2,3, … }

$\mathbb{Q}$ rationale getallen *rationals*

$\{ p/q \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+ \}$

maar: 2/3 = 4/6

$\mathbb{R}$ reële getallen *reals*

$\sqrt{3}$, π, e, …

getalsverzamelingen

In dit college is nul (0) een natuurlijk getal. Daar is niet iedereen het mee eens. Maar met een duidelijke afspraak ontstaan geen problemen.

Bij breuken (rationale getallen) is het duidelijk dat je dezelfde breuk op meerdere manieren kunt schrijven.
Ik bedoel: 2/4 ziet er anders uit dan 1/2, maar is hetzelfde getal. Bij getallenparen ("coordinaten", zie hoofdstuk relaties) zijn (2,4) en (1,2) echter verschillend.

Theorem 1.1

(i) $A \subseteq A$

(ii) als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ dan $A = B$

(iii) als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$ dan $A \subseteq C$

eigenschap

Theorem 1.1

(i) $A \subseteq A$
(ii) als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ dan $A = B$
(iii) als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$ dan $A \subseteq C$

(i) $x \leq x$
(ii) als $x \leq y$ en $y \leq x$ dan $x = y$
(iii) als $x \leq y$ en $y \leq z$ dan $x \leq z$

partiële ordening

reflexief
anti-symmetrisch
transitief

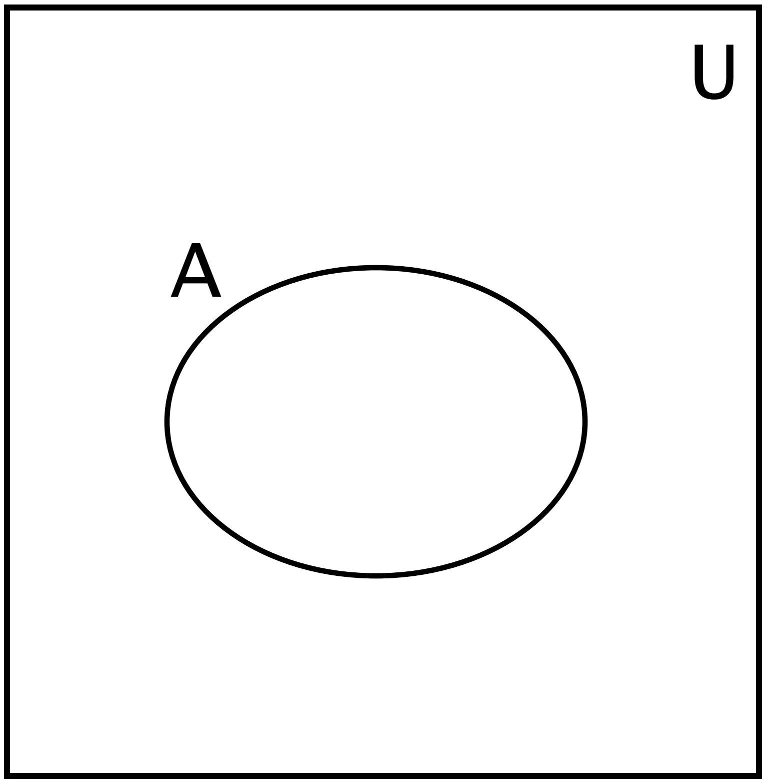
partiële ordening

De relatie “deelverzameling” heeft een aantal belangrijke eigenschappen, namelijk beweringen die gelden voor élke verzameling A,B, C (binnen elk domein).

De eigenschappen in Thm 1.1 komen zo vaak voor dat ze een naam gekregen hebben: (i) *reflexief*, (ii) *anti-symmetrisch* en (iii) *transitief*. Samen heet zo’n relatie dan een *partiële ordening*. *(zie later, bij relaties)*

“partiëel” omdat niet elk tweetal objecten geordend hoeft te worden: er geldt niet voor elke twee verzamelingen A en B dat $A \subseteq B$ of $B \subseteq A$.

Toevallig geldt dat wel voor kleiner-gelijk: voor elke twee getallen x en y geldt $x \leq y$ of $y \leq x$ (of allebei)



universum U

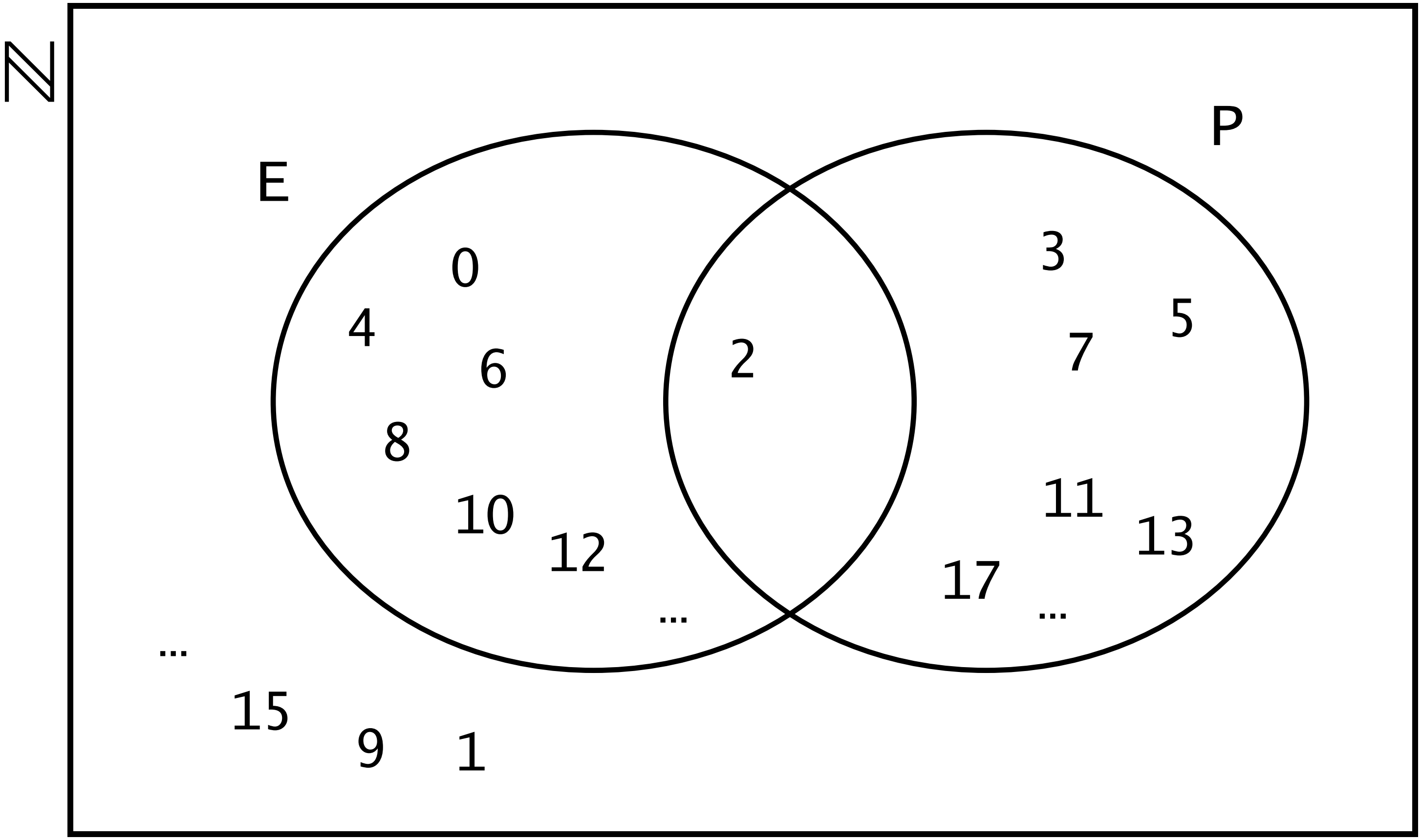
§1.3 Venn diagram

We nemen aan dat we altijd binnen een "universum" werken, een super-verzameling die uit alle mogelijke elementen bestaat.

Weergave: verzameling A in universum U.

$A \subseteq U$

venn diagram



P priemgetallen
E even getallen

Venn diagram

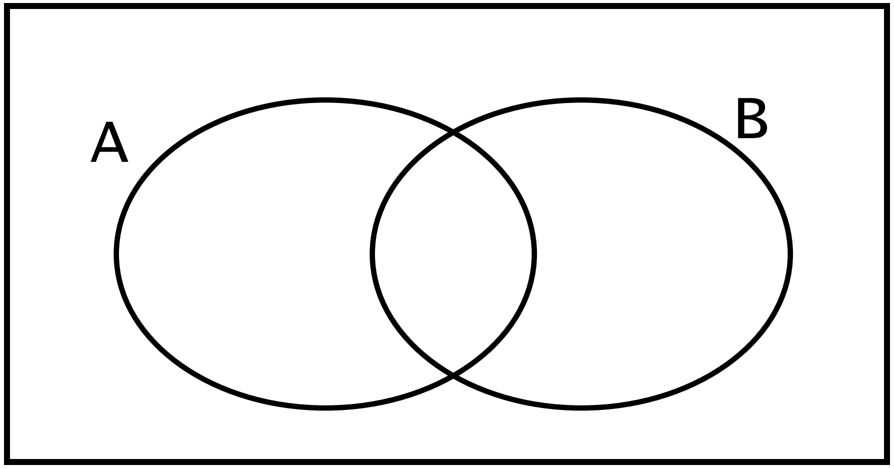
Twee (oneindige) deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ in een Venn-diagram getekend, samen met een aantal getallen in de juiste gebieden.

P priemgetallen, E even getallen

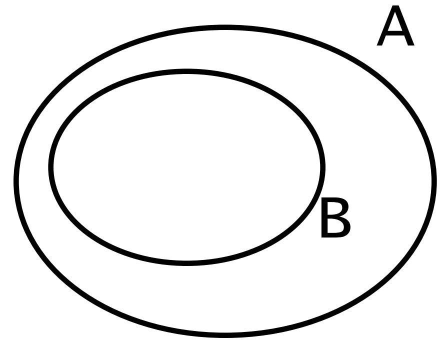
Nul is even. Want $0 = 2 \cdot 0$.
Eén is geen priemgetal, dat is een afspraak.
Het enige even priemgetal is 2.

Buiten beide ovalen de oneven getallen die geen priemgetal zijn.

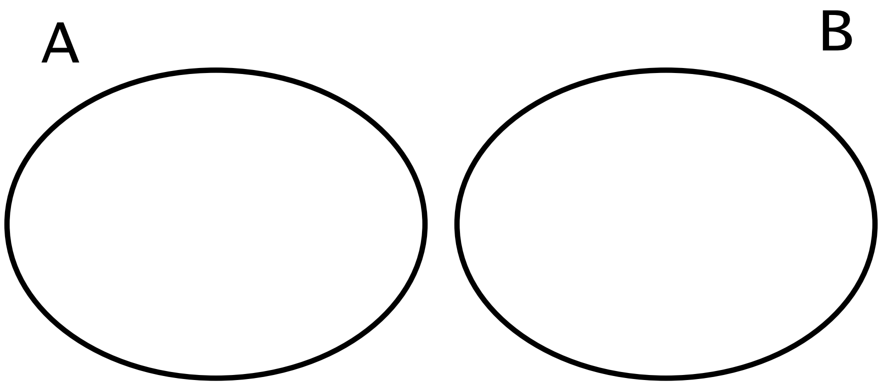
Dit is een “concreet” Venn diagram, met expliciete verzamelingen. We zullen ook rederen met onbekende verzamelingen in een Venn diagram.



algemeen
(vier! gebieden)



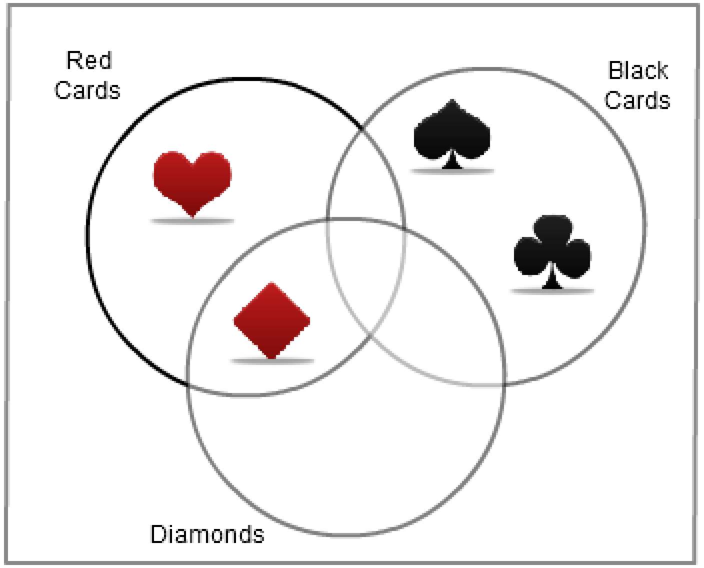
deelverzameling
subset



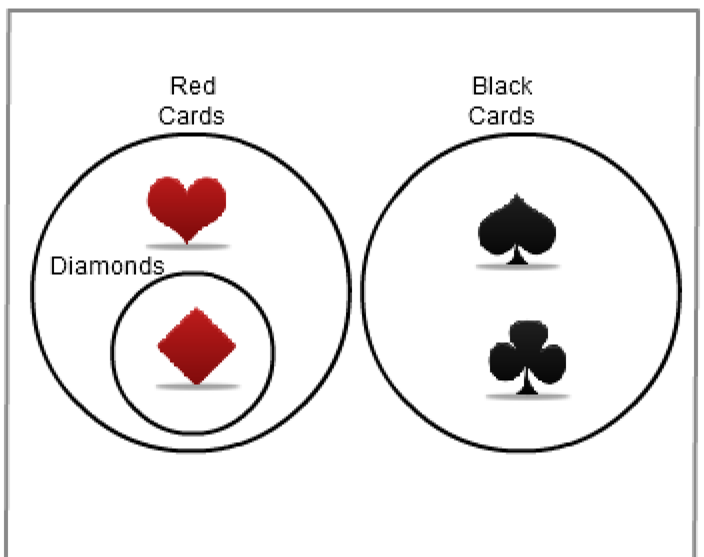
disjunct
disjoint

Euler diagram

V
E
N
N



E
U
L
E
R



Blijkt dat ik het al jaren door elkaar haal.

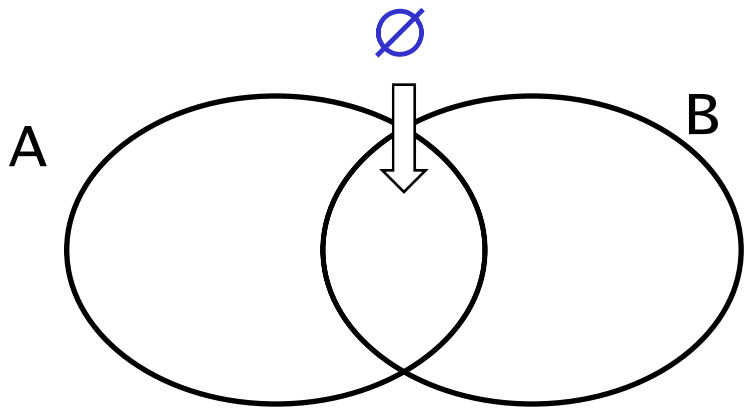
http://creately.com/blog/diagrams/venn-diagrams-vs-euler-diagrams/

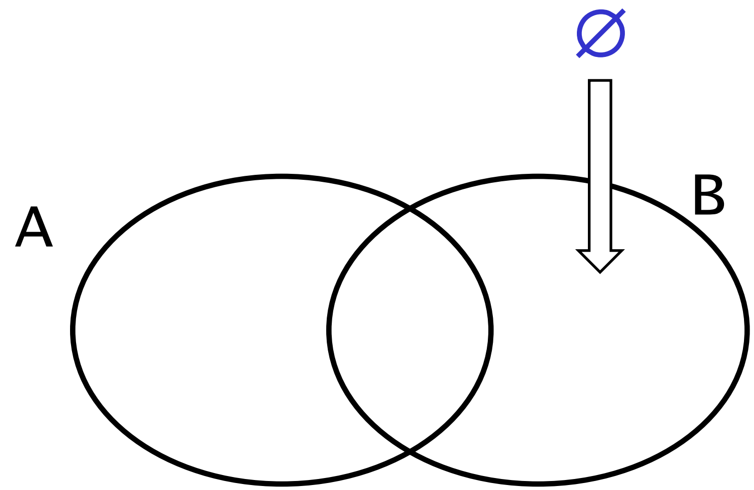
Venn diagram

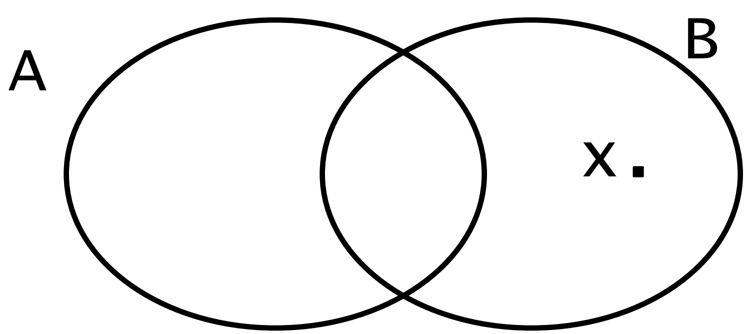
In het algemeen bestaat een Venn-diagram van twee verzamelingen uit vier gebieden: drie binnen de ovalen, en één erbuiten. Die laatste wordt soms vergeten.
Al deze gebieden kunnen elementen bevatten (of niet). Drie verzamelingen dan acht gebieden, vgl. drie partijen.

Als we iets concreets weten van de verzamelingen kunnen we het diagram anders weergeven indien daar aanleiding toe is: bv. *disjuncte* verzamelingen of *deelverzameling*.

Sommigen maken bezwaar tegen het tekenen van verzamelingen binnen elkaar en noemen dat een Euler diagram [slide hiervóór]. Dan zou een Venn diagram altijd alle gebieden moeten geven, ook als deze leeg zijn. Ik maak dat onderscheid niet.


∅
A
B


∅
A
B

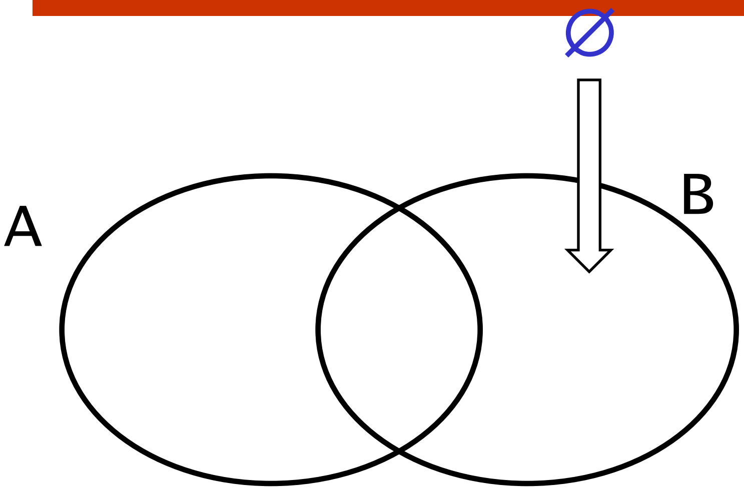

A
B
x.

Puzzel.

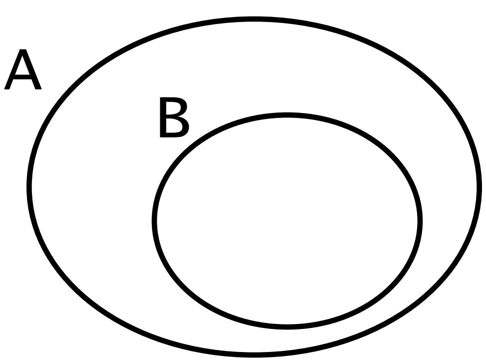
(1) Als het gemeenschappelijke deel [de doorsnede] van A en B leeg is zijn A en B disjunct. We kunnen ze ook expliciet niet-doorsnijdend weergeven.

(2) Als er geen elementen zijn in B buiten A, dan is B een deelverzameling van A: $B \subseteq A$. We kunnen ook expliciet B binnen A tekenen.

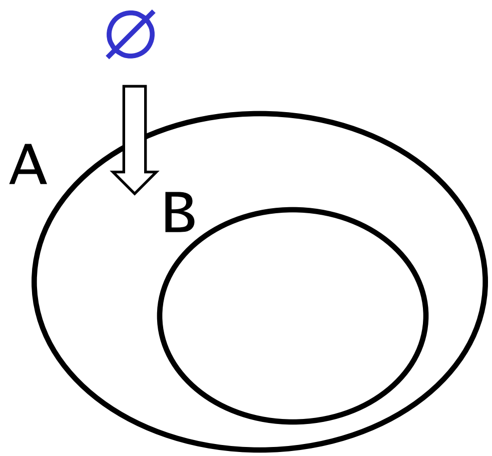
(3) Als er een element x is in B maar niet in A, dan weten we dat B geen deelverzameling is van A: $B \nsubseteq A$.



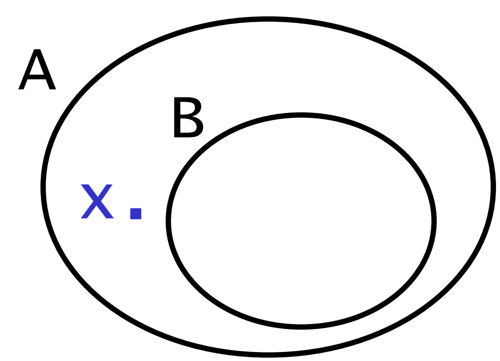
B⊆A



B⊆A



B=A



B⊂A

inclusie

Het geval $A \subseteq B$ apart.
We kunnen B binnen A tekenen om de inclusie expliciet te maken.

Er zijn nu twee mogelijkheden
- $B=A$ als er geen elementen in $A \setminus B$ zijn.
- $B \subset A$, dus *echte* inclusie, als er een element in $A \setminus B$ is.

De notatie $A \setminus B$ wordt verderop uitgelegd.

(Hull 1834 – Cambridge 1923)

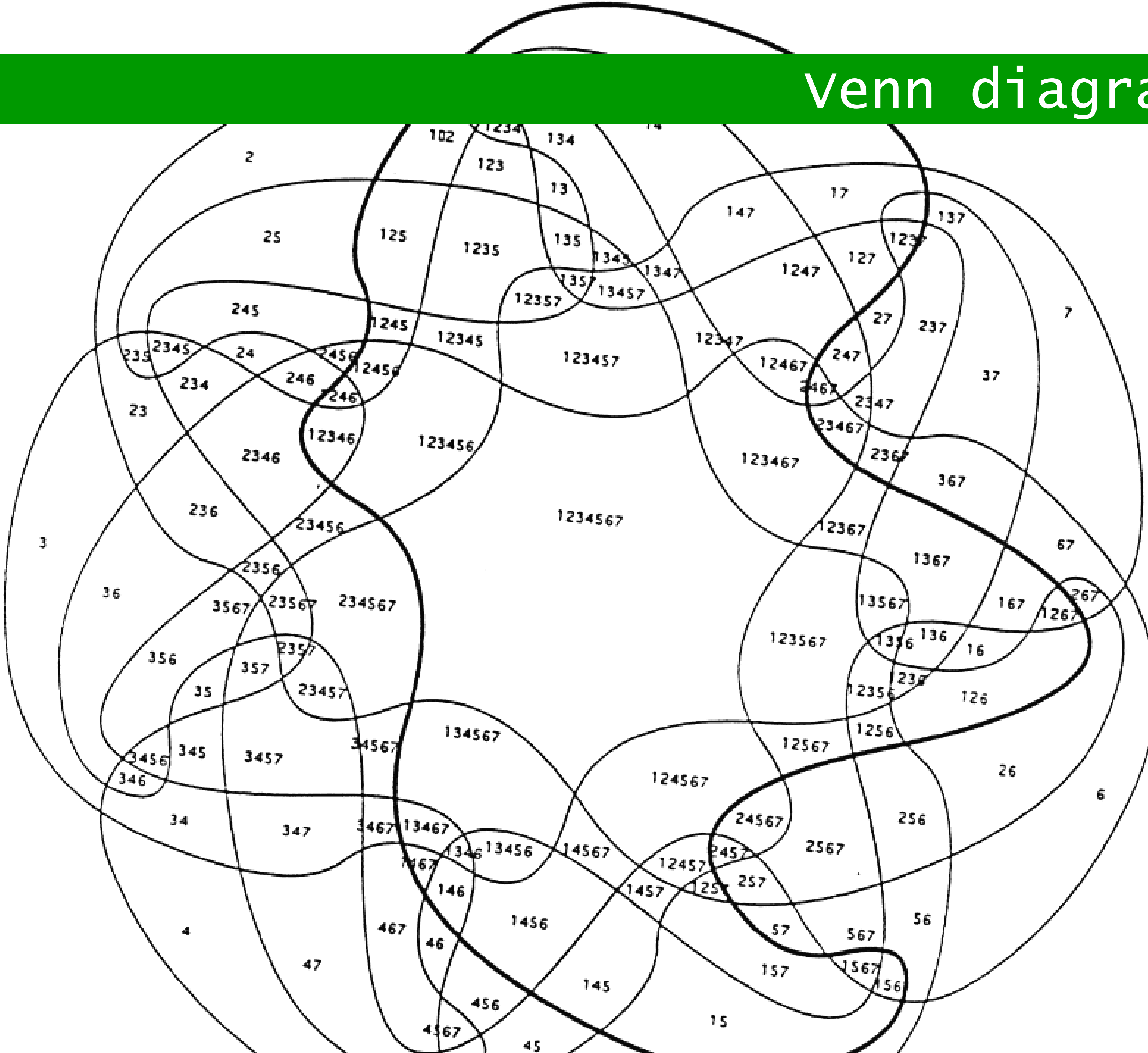
On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings. *Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **9**, 1–18, 1880.

http://en.wikipedia.org/wiki/John_Venn

John Venn

Naamgever van de Venn-diagrammen.
De diagrammen werden ingevoerd om redeneringen weer te geven, zie Schaum (*saucepans are tin objects*).

Venn diagram



Venn diagram met 7 verzamelingen

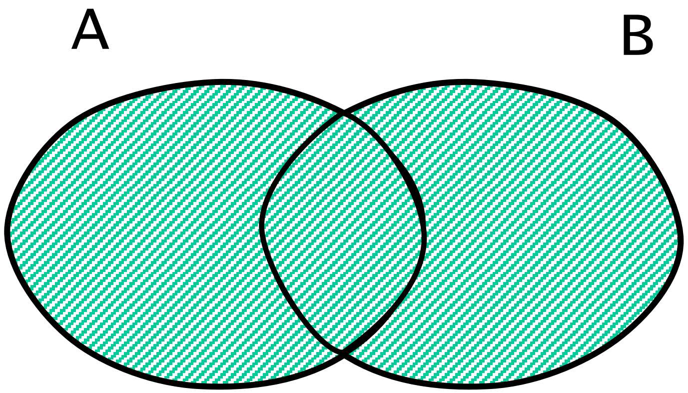
Het is goed te doen om Venn diagrammen met drie of vier verzamelingen te tekenen (zie ook Karnaugh diagram bij Dite – we zullen dit later zien op dit college). Daarna wordt het onoverzichtelijk, of kunst.

Hier een symmetrisch diagram met 7 verzamelingen en 2^7 gebieden.

yeah, sure ...


raleigh • cary
INDY week
7|29|15
FILES WE WANT
FILES THEY HAVE
FILES THEY GAVE US
WHY WE'RE SUING GOVERNOR MCCRORY
BY LISA SORG, PAGE 8

§1.4 operaties: vereniging



vereniging

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$

'of'

'cup'

∪nion

§1.4 operaties: vereniging

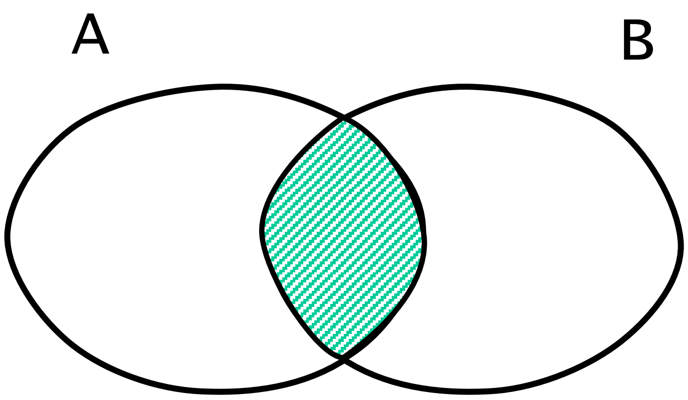
Uit bestaande verzamelingen kunnen we nieuwe maken met operaties op verzamelingen.

De basisoperaties zijn de Boolese operaties vereniging, doorsnede en complement.

Zij komen in zekere zin overeen met de logische operaties ‘of’, ‘en’ en ‘niet’

De vereniging van twee verzamelingen is de verzameling die alle elementen bevat die in ten minste één van de verzamelingen liggen. Hier gearceerd weergegeven.

Een operatie als $A \cap B$ geeft bij (een of) twee verzamelingen een nieuwe verzameling. Een relatie als $B \subseteq A$ is een bewering, dwz. zij is waar of niet-waar.



doorsnede ‘door’

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

‘en’

‘cap’

i∩tersection

disjunct $A \cap B = \varnothing$

doorsnede

De *doorsnede* van twee verzamelingen is de verzameling die alle elementen bevat die in allebei de verzamelingen liggen. Hier gearceerd weergegeven.

Twee verzamelingen heten *disjunct* als hun doorsnede leeg is.

Theorem 1.4

equivalent zijn:

(i) $A \subseteq B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

Theorem 1.4

equivalent zijn:
(i) $A \subseteq B$
(ii) $A \cap B = A$
(iii) $A \cup B = B$

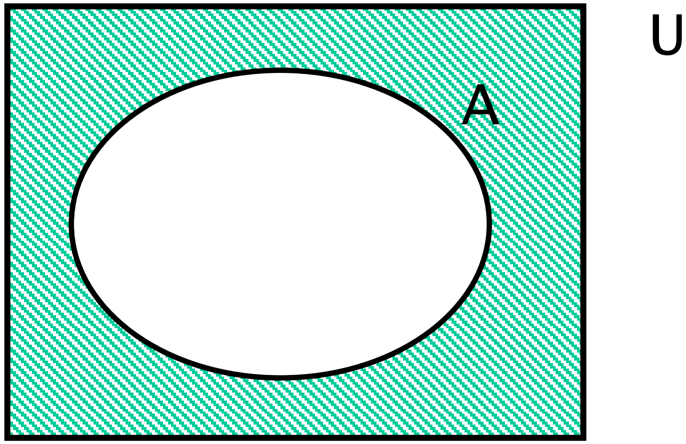
equivalent zijn:
(i) $A \leq B$
(ii) $A \min B = A$
(iii) $A \max B = B$

eigenschap

De verzamelingsoperaties vereniging ∪ en doorsnede ∩ kunnen beschreven worden met behulp van de deelverzamelingsrelatie ⊆.

Zie Stelling.

Vergelijkbaar bij getallen: de *operatie* maximum is gerelateerd aan de *relatie* kleiner-gelijk. De theorie hierachter staat in Ch.14 van Schaum, ordered sets and lattices. Dat behandelen we hier niet. (In het Nederlands heet dat overigens een tralie.)

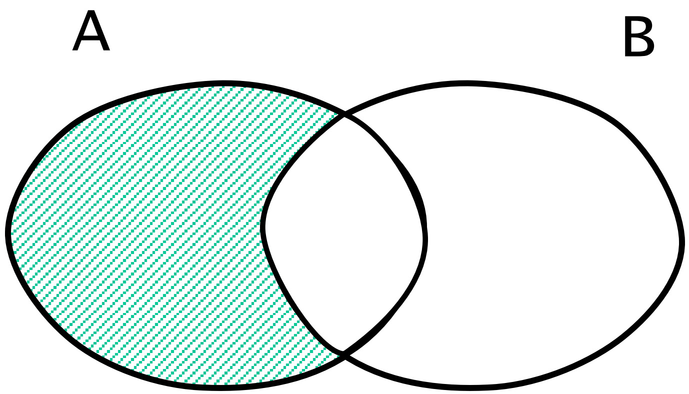


complement

universum U

$A^c = \{ x \in U \mid x \notin A \}$

'niet'



verschil **A−B A\B A~B**

$A-B =$
$\{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

difference
relative complement

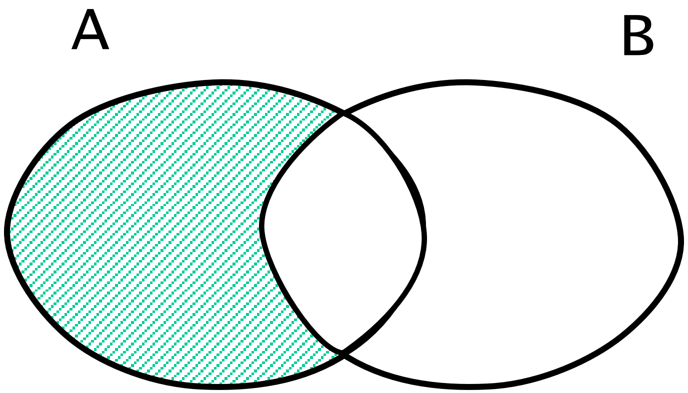
complement

Het verschil van A en B is gelijk aan $A - B = A \cap B^c$
Er zijn diverse notaties voor in omloop.

$A-B = A \cap B^c$

$A^c = U-A$

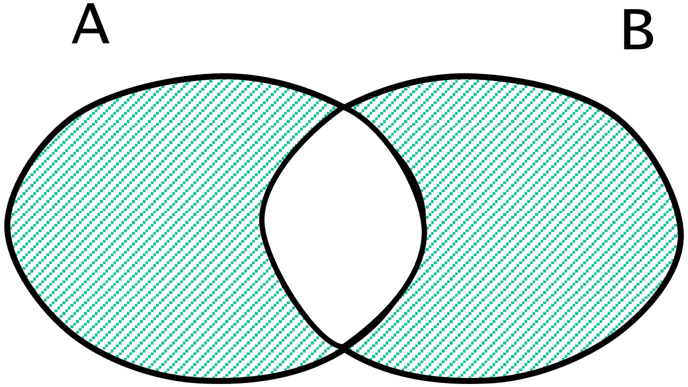
$A-B \subseteq A$



symmetrisch verschil

$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

'xor'



(symmetrisch) verschil

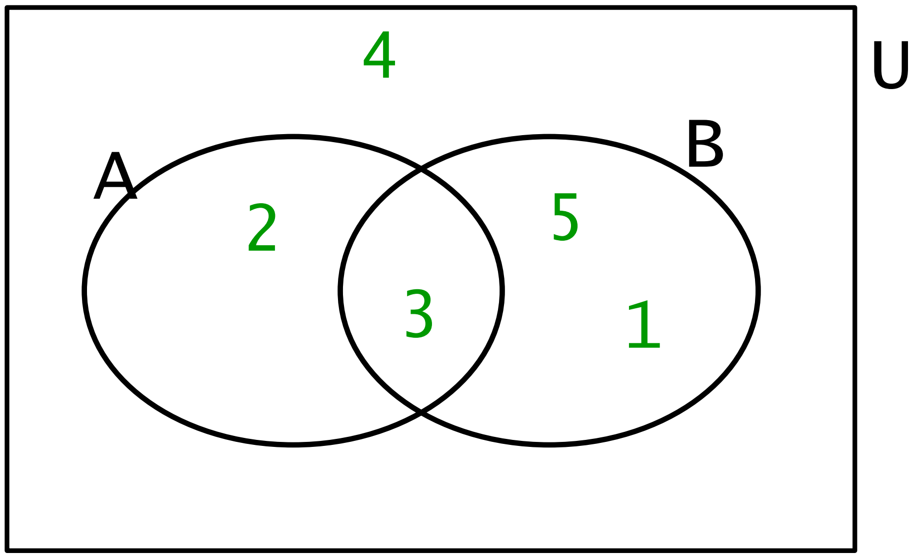
De operatie verschil kan uitgedrukt worden in complement en doorsnede.
Omgekeerd kan complement geschreven worden als verschil (tov. het universum)

Ook gebruikt wordt de operatie symmetrisch verschil, voor elementen die in precies één van A of B zitten.

quiz: welke elementen zitten in $A \oplus B \oplus C$?

vb

$A - B = A \cap B^c$



$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$
$A = \{ 2, 3 \}$
$B = \{ 1, 3, 5 \}$

$B^c = \{ 2, 4 \}$
$A \cap B^c = \{ 2 \}$
$(A \cap B^c)^c = \{ 1,3,4,5 \} = A^c \cup B$

algemeen mbv. Venn diagrammen
(arceren)

Theorem 1.4

equivalent zijn:

(i) $A \subseteq B$

(ii) $A \cap B = A$

(iii) $A \cup B = B$

maar ook:

(iv) $B^c \subseteq A^c$

(v) $A \cap B^c = \varnothing$

(vi) $A^c \cup B = U$

Vienna Development Method

Main Operators on Sets (s, s1, s2 are sets)	
{a, b, c}	Set enumeration: the set of elements a, b and c
{x | x:T & P(x)}	Set comprehension: the set of x from type T such that P(x)
{i, ..., j}	The set of integers in the range i to j
e in set s	e is an element of set s
e not in set s	e is not an element of set s
s1 union s2	Union of sets s1 and s2
s1 inter s2	Intersection of sets s1 and s2
s1 \ s2	Set difference of sets s1 and s2
dunion s	Distributed union of set of sets s
s1 psubset s2	s1 is a (proper) subset of s2
s1 subset s2	s1 is a (weak) subset of s2
card s	The cardinality of set s

http://en.wikipedia.org/wiki/Vienna_Development_Method#Sets

binomiaalcoëfficienten

$$\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$$

"x boven y" "x choose y"

$x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

"x faculteit" "x factorial"

op hoeveel manieren kan ik y objecten uit x objecten kiezen?

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

driehoek van Pascal

binomiaalcoefficienten

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

driehoek van Pascal

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

hoeveel kubusjes?

$$3 \times 16 - 3 \times 4 + 1$$

“principe van inclusie en exclusie”

inclusie en exclusie

Als we de elementen in de vereniging van verzamelingen willen tellen moeten we de gemeenschappelijke elementen niet dubbel tellen.

Dat leidt tot het principe van inclusie en exclusie.

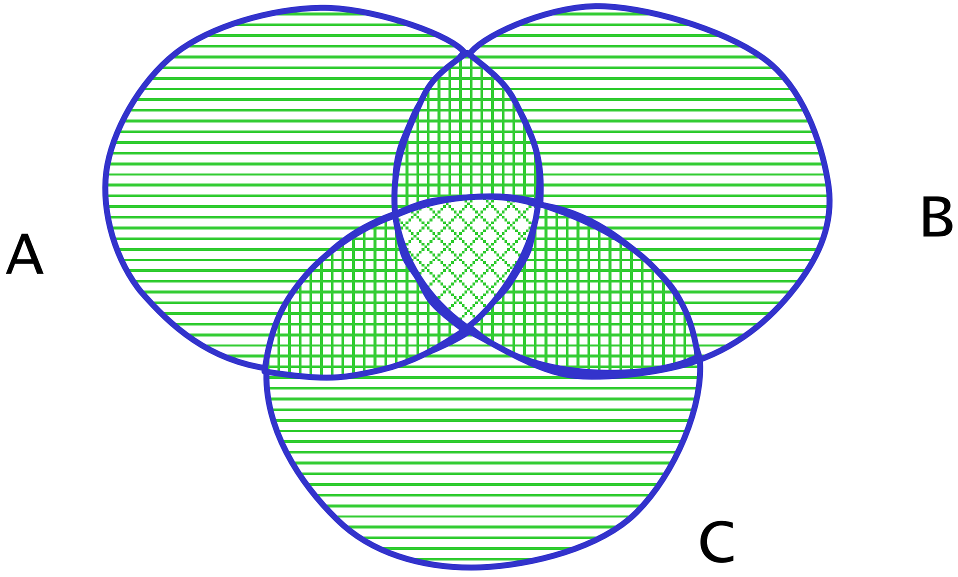
aantal elementen

$n(A)$ $\#(A)$ $|A|$ $\mathrm{card}(A)$

Corollary 1.10

Voor eindige verzamelingen A, B en C geldt

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

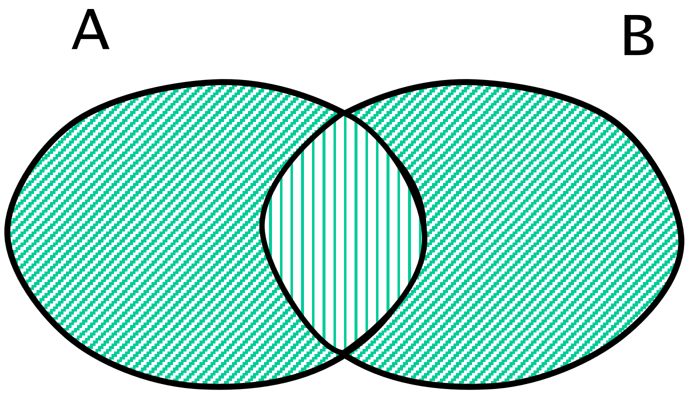


'gevolg'

Theorem 1.9

Voor eindige verzamelingen A en B geldt

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.



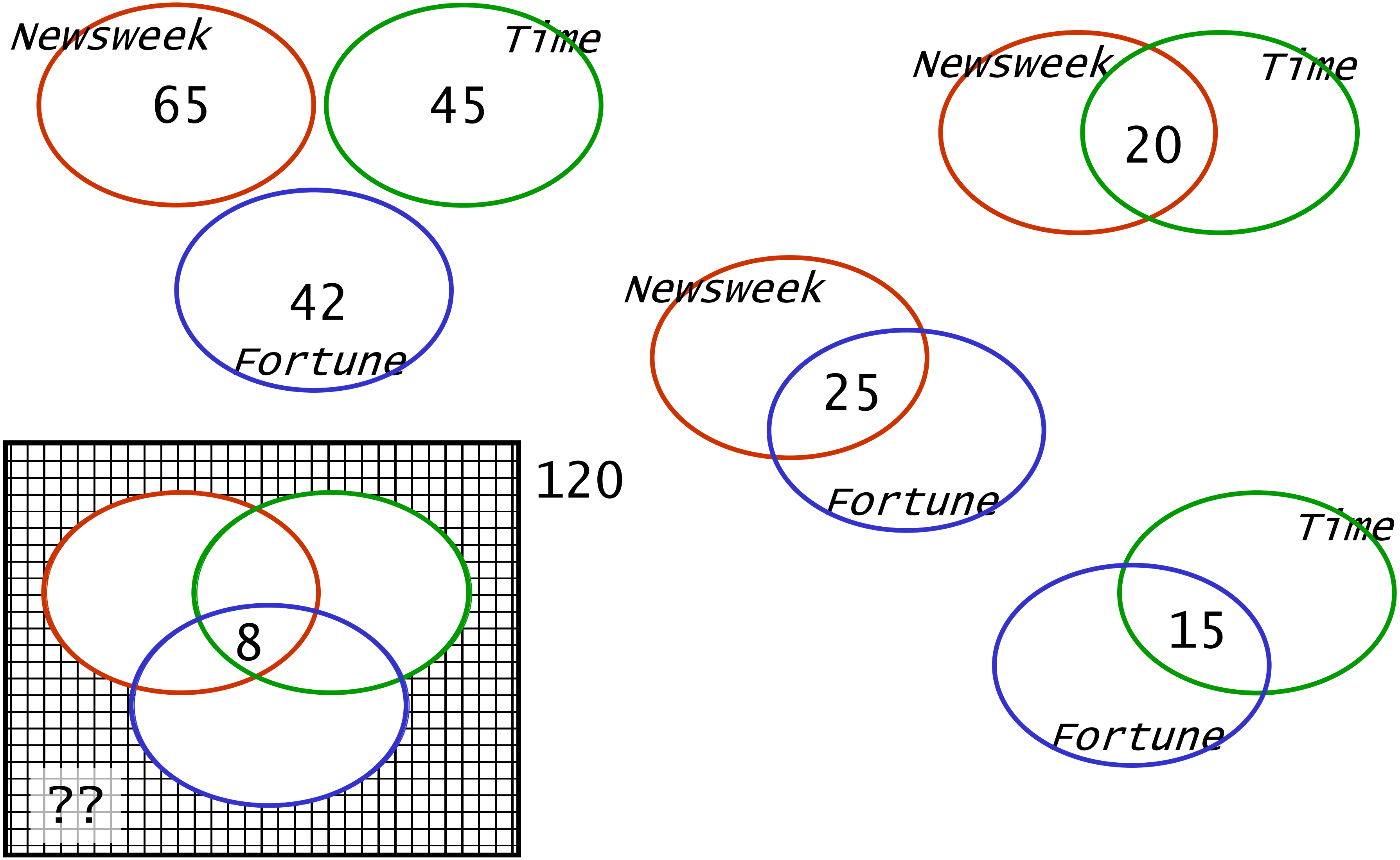
Lemma 1.6: $A \cap B = \varnothing$

Stelling en gevolg

Hiervoor staan de in/exclusie-resultaten Corollary 1.10 (voor drie verzamelingen A,B,C) en Theorem 1.9 (voor twee verzamelingen A,B).

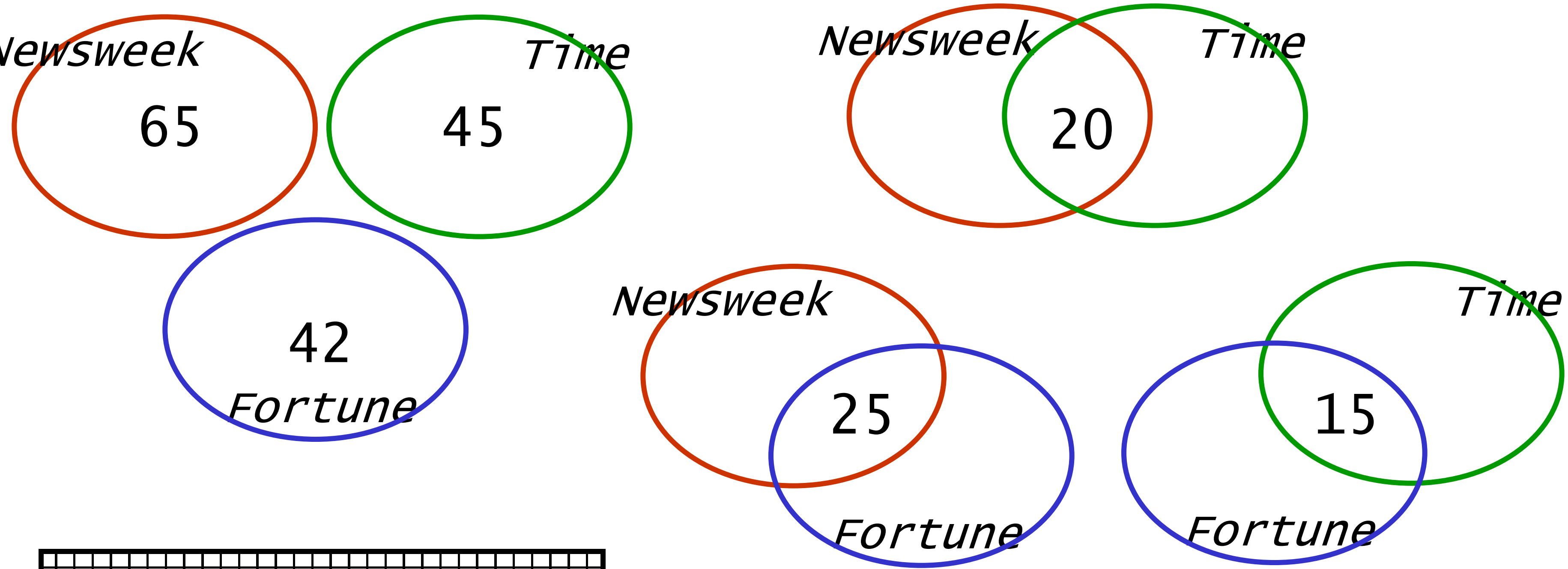
Als je n=3 weet kun je ook n=2 afleiden, want dan neem je $C=\emptyset$ en krijg je het gewenste resultaat.
Toch is bij Schaum omgekeerd Cor.1.10 een gevolg van Thm.1.9. Dat komt omdat n=3 volgt uit n=2 door dat resultaat herhaald toe te passen.   Zie opgaven.

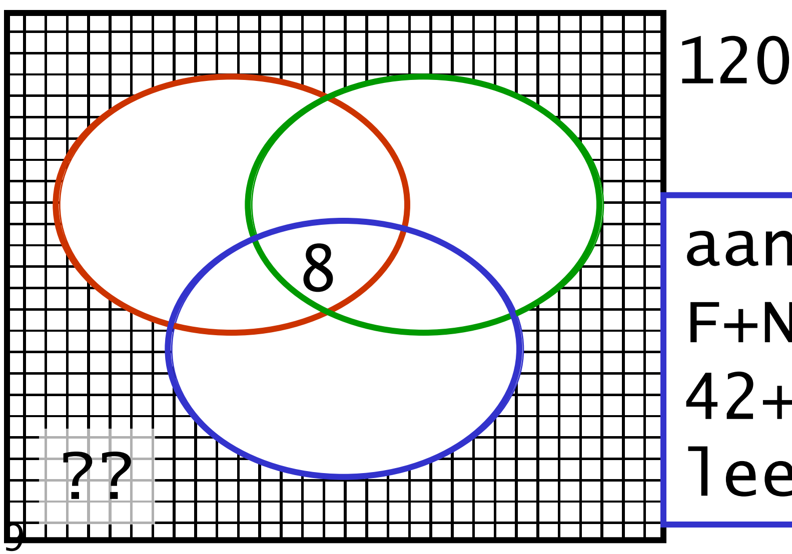
Het speciale geval dat A en B disjunct zijn en dus $n(A \cap B)=0$ staat in Schaum nog apart.



hoeveel mensen lezen géén blad?

tellen (oplossing met inclusie en exclusie)





aantal lezers:

F+N+T – F&N–F&T–N&T + F&T&N =

42+65+45 -25-15-20 +8 = 100

leest geen blad = 120-100 = 20

Het begrip ‘formele taal’ is het onderwerp van hoofdstuk 12 van Schaum.

Een string is een rijtje letters.
Een taal is een verzameling strings, dus past al in dit hoofdstuk.

strings

Een *alfabet* is een eindige, niet-lege, verzameling *letters*.

Σ = { a,b,c }
B = { 0,1 }
C = { а,б,в,г,д,е,ж,з,и,й,к,л, … э,ю,я }
P = { if, else, while, do, … }
V = { … , appel, koek, ei , … }

12 strings

Σ alfabet.
Een *string/woord* (over Σ) is een eindig geordend rijtje letters uit Σ.

ab, abca, abcbabcba

0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, …

приключения, астерикса

“de appel valt niet ver”

Σ^*, lege string λ, lengte $|x|$

$|abcbac| = 6$ $|\lambda| = 0$ $a^6b^3 = aaaaaabbb$

$B^* = \{ \lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, 101, \dots \}$

taal

Een *taal* (over Σ) is een verzameling strings over Σ

Σ^* alle strings

PAL = { λ, aa, bb, abba, baab, abaaba, …}

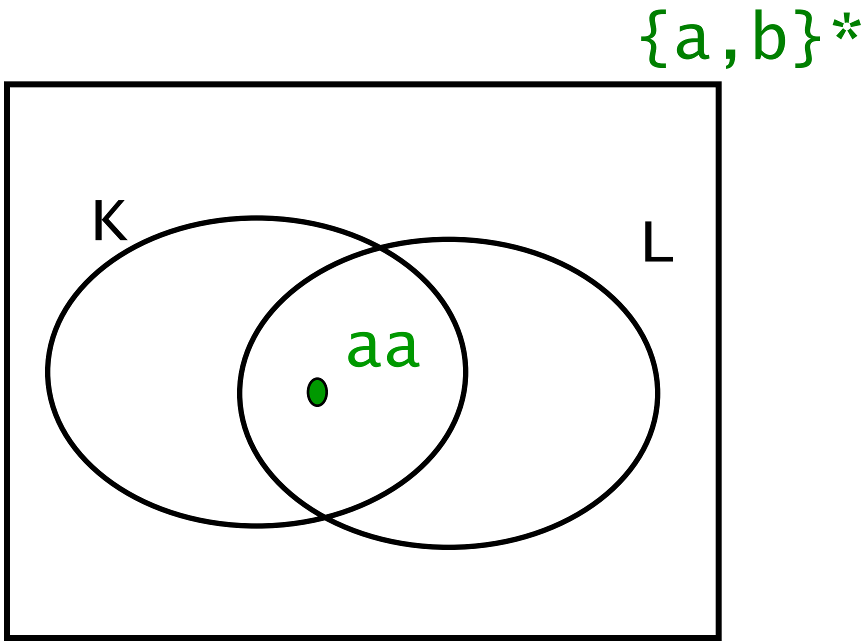
BIN = { 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, … }

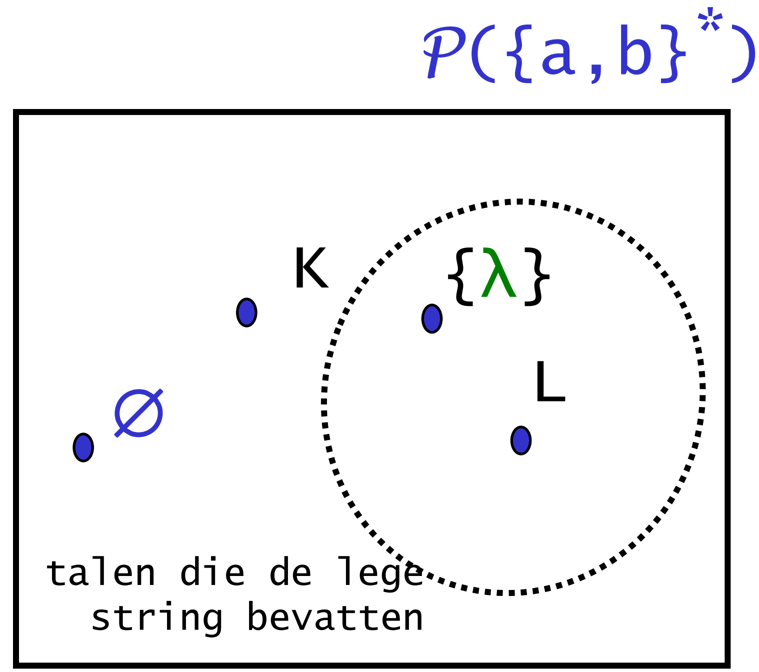
K = { a, aa, ba, aaa, aba, baa, bba, aaaa, aaba, … }
  = { $x \in \{a,b\}^*$ | x eindigt op een a }

L = { λ, aa, ab, ba, bb, aaaa, aaab, aaba, aabb, … }
  = { $x \in \{a,b\}^*$ | x heeft even lengte }

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ talen over Σ

taal in welk universum?





$K = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x$ eindigt op een a $\}$

$L = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x$ heeft even lengte $\}$

Σ^* strings over Σ

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ talen over Σ

12 taal: Boolese operaties

Een *taal* (over Σ) is een verzameling strings over Σ

K = { a, aa, ba, aaa, aba, baa, bba, aaaa, aaba, … }
  = { $x \in \{a,b\}^*$ | x eindigt op een a }
L = { λ, aa, ab, ba, bb, aaaa, aaab, aaba, aabb, … }
  = { $x \in \{a,b\}^*$ | x heeft even lengte }

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ talen over Σ
vereniging, doorsnede, complement (tov. Σ^*)

$K \cap L$ = { aa, ba, aaaa, aaba, abaa, abba, baaa, … }
$K - L$ = { a, aaa, aba, baa, bba, aaaaa, aaaba, … }
$L - K$ = { λ, ab, bb, aaab, aabb, abab, abbb, baab, … }
$\{a,b\}^* - (K \cup L)$ = { b, aab, abb, bab, bbb, aaaab, … }

verzameling van verzamelingen

Omdat een verzameling zelf weer een object is kan ze weer als element van andere verzamelingen dienen. Dit leidt makkelijk tot verwarring, soms zeggen we daarom ‘collectie’ of ‘klasse’ ipv verzameling van verzamelingen.

Twee voorbeelden:

- machtsverzameling: bevat alle deelverzamelingen van een verzameling

  $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\ \}$

- partitie: collectie van (disjuncte) deelverzamelingen die samen het domein vullen

  $\{\ \{1,4\}, \{2\}, \{3,5,6\}\ \}$ partitie van $\{\ 1,\ldots,6\ \}$

$\mathcal{P}(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

'collectie'
alle deelverzamelingen Power(A) 2^A

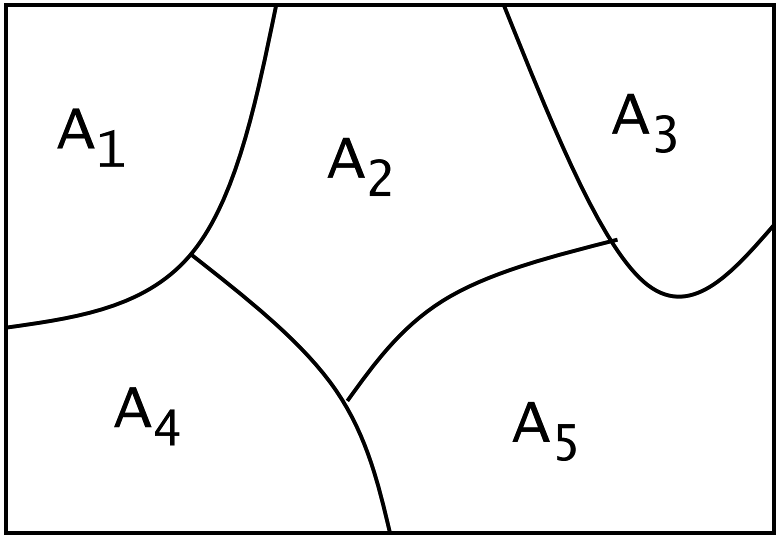
$\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ want $\varnothing \subseteq A$
$A \in \mathcal{P}(A)$ want …

$\mathscr{P}$

$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) =$
$\{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\},$
$\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$

voor een eindige verzameling A
$n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$



$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots , A_n \}$

- $A_i \neq \emptyset$ voor alle i
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ als $i \neq j$
- $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

'subscript notatie'

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{ x \mid x \in A \text{ voor een } A \in \mathcal{A} \}$$

zie: equivalentierelaties

universum $\mathbb{Z}$

restklassen modulo 7

$\overline{0} = \{ \ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots \}$

$\overline{1} = \{ \ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots \}$

$\overline{2} = \{ \ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots \}$

$\overline{3} = \{ \ldots, -11, -4, 3, 10, 17, \ldots \}$

…

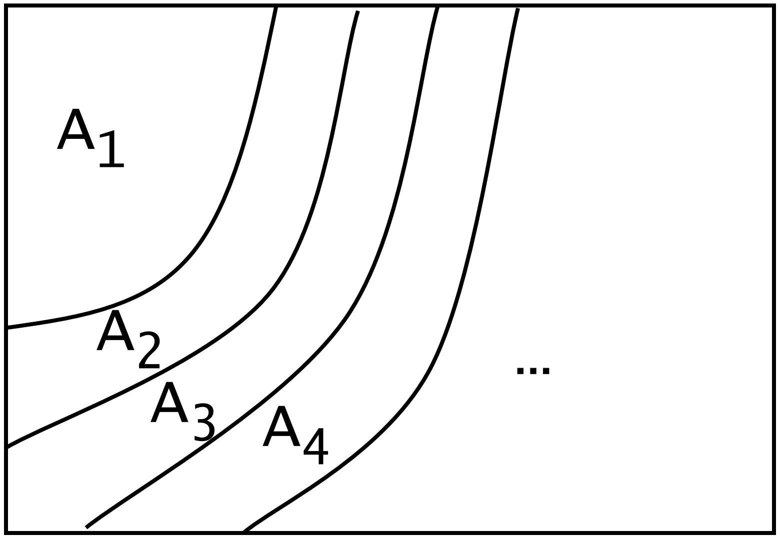
$\overline{6} = \{ \ldots, -8, -1, 6, 13, 20, \ldots \}$

$R_7 = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6} \}$

(eindige) partitie: $\overline{i} \cap \overline{j} = \varnothing$ als $i \neq j$

$\bigcup R_7 = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4} \cup \overline{5} \cup \overline{6} = \mathbb{Z}$

mag ook oneindig



$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots \}$

- $A_i \neq \varnothing$ voor alle i
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ als $i \neq j$
- $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

'subscript notatie'

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{ x \mid x \in A \text{ voor een } A \in \mathcal{A} \}$$

§1.5 'algebraische' eigenschappen

$$23+11+17+9 =$$

$$23+17 + 11+9 =$$

$$40 + 20 = 60$$

voor alle x,y in $\mathbb{R}$ geldt

$$x+y = y+x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

§1.5 'algebraische' eigenschappen

Rekenregels voor de verzamelingenleer, net als we regels hebben bij de rekenkunde en de logica (volgend semester).

We moeten ons bewust worden welke regels we gewend zijn om te gebruiken, en of dat altijd vanzelfsprekend is.

Regels en benamingen zul je ook leren bij DiTe.

De operaties optellen en vermenigvuldigen (in $\mathbb{R}$) zijn commutatief.

‘algebraische’ eigenschappen

$$3 \cdot 98 = 3 \cdot (100-2)$$
$$= 3 \cdot 100 + 3 \cdot (-2)$$
$$= 300 - 6 = 294$$

voor alle x,y,z in $\mathbb{R}$ geldt

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) \neq (x+y) \cdot (x+z)$$

$x=2 \quad y=3 \quad z=-4$

$3 + 8 = 8 + 3$

$p \wedge q = q \wedge p$

$A \cup B = B \cup A$

$x / y = y / x$

Definitie

De bewerking 🎖 op A heet *commutatief* als voor alle x en y in A geldt x 🎖 $y = y$ 🎖 x.

Theorem 1.5 (3ab)

Voor verzamelingen A en B geldt dat $A \cap B = B \cap A$ en $A \cup B = B \cup A$. De bewerkingen doorsnede en vereniging zijn commutatief.

(3ab) commutativiteit

inderdaad, de bewering

$$x \mathbin{/} y = y \mathbin{/} x$$

is *niet* waar (dwz. niet voor alle x en y);
dit staat er alleen om studenten te prikkelen

(op de volgende slide weer een onwaarheid over delen, u bent gewaarschuwd…)

Het symbool 🎖 (spreek uit ‘bla’) geeft aan dat we een willekeurige bewerking bekijken. Meestal kiezen we een wat bescheidener symbool. Zoals $\circ$.

(2ab) associativiteit

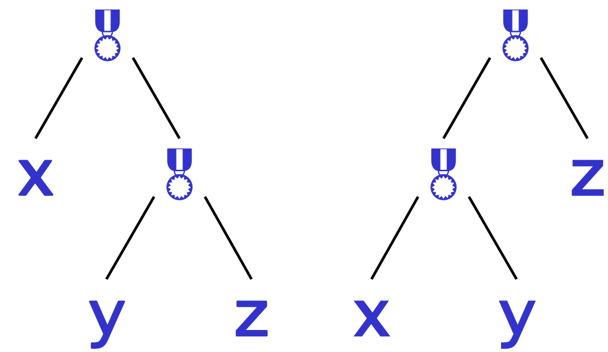
$3 + (8 + 2) = (3 + 8) + 2$

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$x / (y / z) = (x / y) / z$

haakjes ~ bomen



Definitie

De bewerking 🎖 op A heet *associatief* als voor alle x, y en z in A geldt
x 🎖 (y 🎖 z) = (x 🎖 y) 🎖 z.

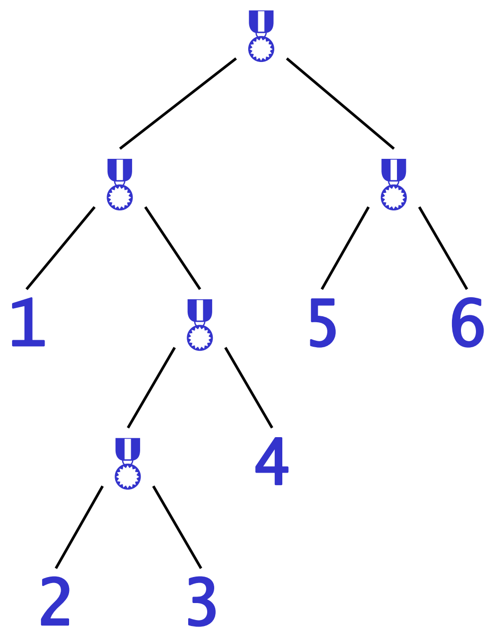
Theorem 1.5 (2ab)

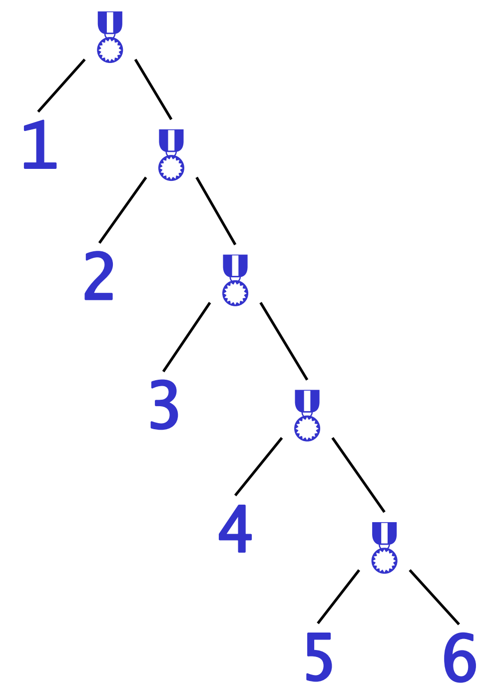
De bewerkingen doorsnede en vereniging zijn associatief.

(2ab) associativiteit

x 🎖 (y 🎖 z) = (x 🎖 y) 🎖 z

meer algemeen:



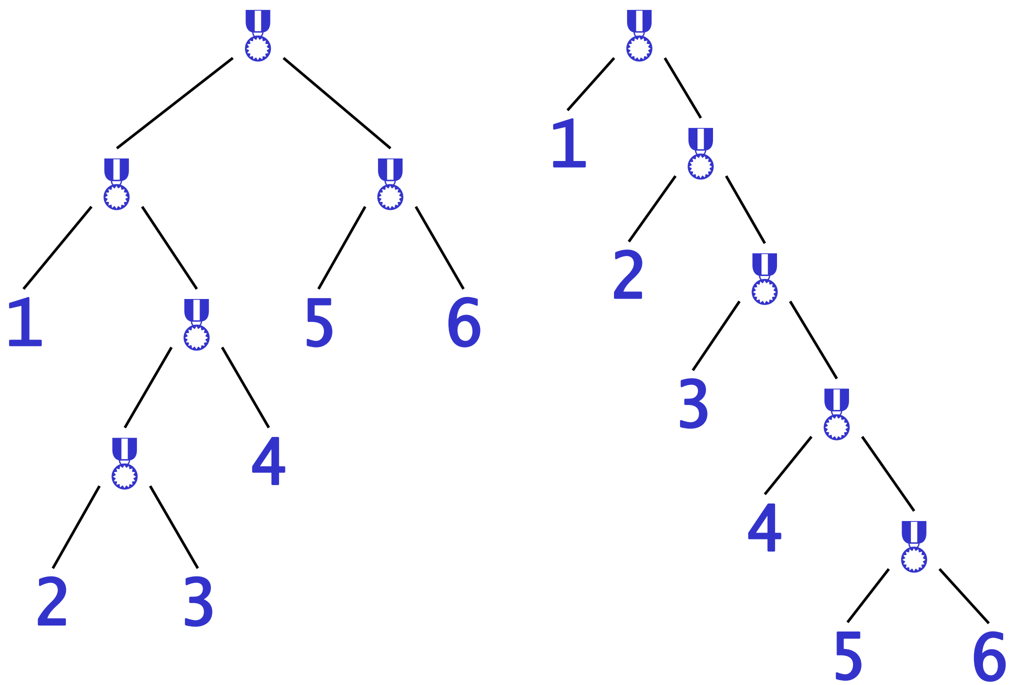


(1 🎖 ((2 🎖 3) 🎖 4)) 🎖 (5 🎖 6) =

1 🎖 (2 🎖 (3 🎖 (4 🎖 (5 🎖 6))))

(2ab) associativiteit

x 🎖 (y 🎖 z) = (x 🎖 y) 🎖 z



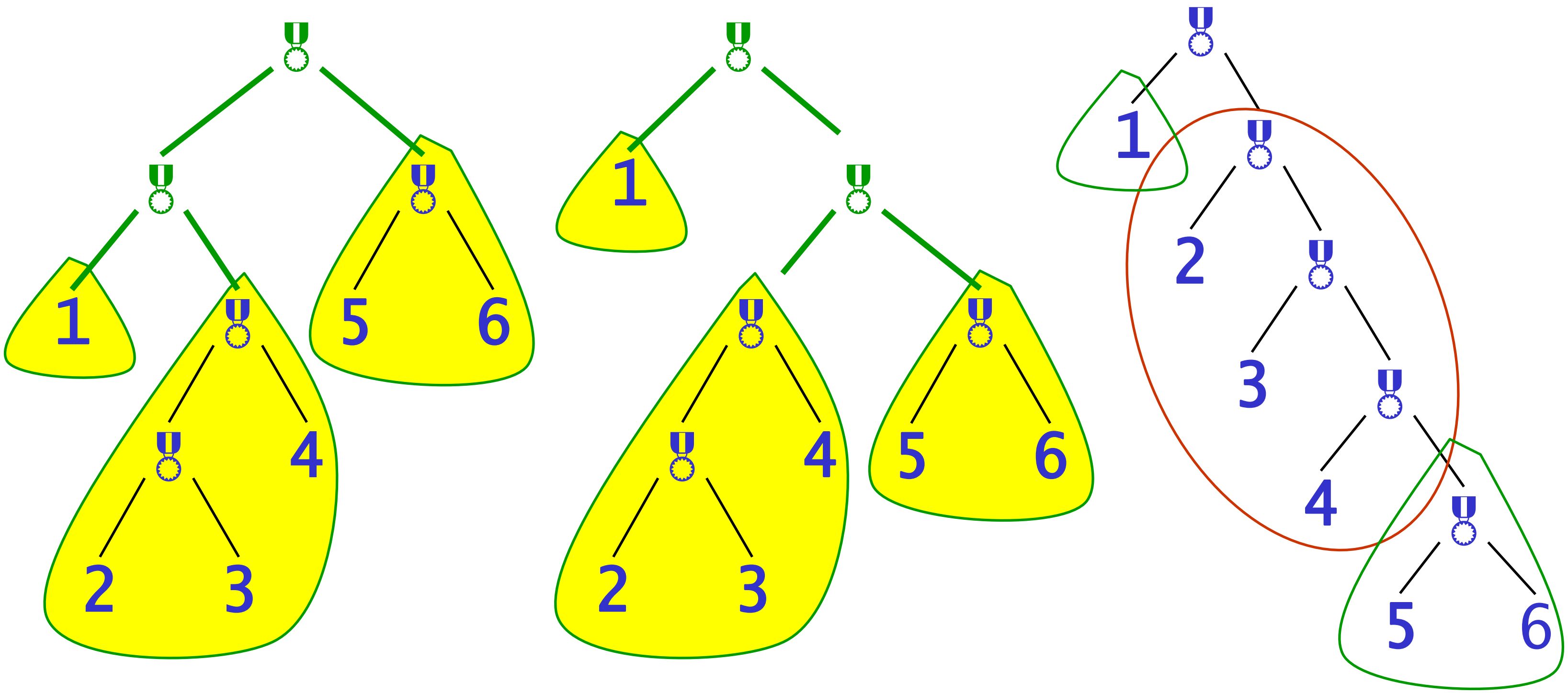
Zolang de argumenten (onderaan) in gelijke volgorde staan is de waarde van de twee expressies gelijk wanneer de operator 🎖 associatief is. Dat is een gevolg van genoemde simpele associativiteit met twee operatoren, zie (2ab) in de titel van de slide.

(1 🎖 ((2 🎖 3) 🎖 4)) 🎖 (5 🎖 6) =
1 🎖 (2 🎖 (3 🎖 (4 🎖 (5 🎖 6))))

(2ab) associativiteit

x 🎖 (y 🎖 z) = (x 🎖 y) 🎖 z

meer algemeen:



(1 🎖 ((2 🎖 3) 🎖 4)) 🎖 (5 🎖 6) =

1 🎖 (((2 🎖 3) 🎖 4) 🎖 (5 🎖 6)) =

haakjes !

Binnen de informatica spelen diverse soorten expressies een belangrijke rol. We moeten ze leren lezen. De betekenis van een expressie hangt af van haakjes, of waar ze ontbreken van voorrangsregels, en de leesrichting (*left \ right associative*). Een programmeertaal als C++ kun je zonder deze kennis niet lezen.

Is `*int[]` een pointer naar een array of een array van pointers?

haakjes !

priority	operator	description	associativity
1	::	scope	Left
2	() [ ] -> . sizeof		Left
3	++ --	increment/decrement	Right
	~	1-complement (bitwise)	
	!	unary NOT	
	& *	(de)reference (pointers)	
	(type)	type casting	
	+ -	unary less sign	
4	* / %	arithmetical operations	Left
5	+ -	arithmetical operations	Left
6	<< >>	bit shifting (bitwise)	Left
7	< <= > >=	relational operators	Left
8	== !=	relational operators	Left
9	& ^ |	bitwise operators	Left
10	&& ||	logic operators	Left
11	?:	conditional	Right
12	= += -= *= /= %= >>= <<= &= ^= |=	assignation	Right
13	,	comma, separator	Left

```
var x = 16 + 4 + "Volvo";
20Volvo
```

```
var x = "Volvo" + 16 + 4;
Volvo164
```

http://www.w3schools.com/js/js_datatypes.asp

bestaat een bewerking
- wel commutatief, niet associatief ?
- niet commutatief, wel associatief ?

onderzoek eigenschappen:
- verschil, symmetrisch verschil ?
- minimum, maximum ?

  $a \Delta b = \max\{a,b\}$ $a \nabla b = \min\{a,b\}$

  $a \Delta (b \nabla c) = (a \Delta b) \nabla (a \Delta c)$

volgorde

De begrippen commutatief en associatief gaan allebei over “volgorde” en het toepassen van operaties. Het is goed om je af te vragen of de eigenschappen onafhankelijk zijn: kan de één voorkomen zonder de andere?

Wat zijn de eigenschappen van andere eenvoudige operaties (op verzamelingen of getallen)?

voorbeelden

- wel commutatief, niet associatief ?

$\boxed{a \,\&\, b = (a+b)/2}$ *gemiddelde*

8 & 0 & 4

- niet commutatief, wel associatief ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrixvermenigvuldiging

zie vak lineaire algebra

a ☺ b = b *‘laatste’*

De operatie & “gemiddelde van twee getallen” is niet associatief.

De uitkomst van (a & b) & c hoeft namelijk niet altijd gelijk te zijn aan die van a & (b & c).

Dat betekent dat a & b & c als expressie ongedefinieerd is!!
Tenzij we een leesrichting afspreken.

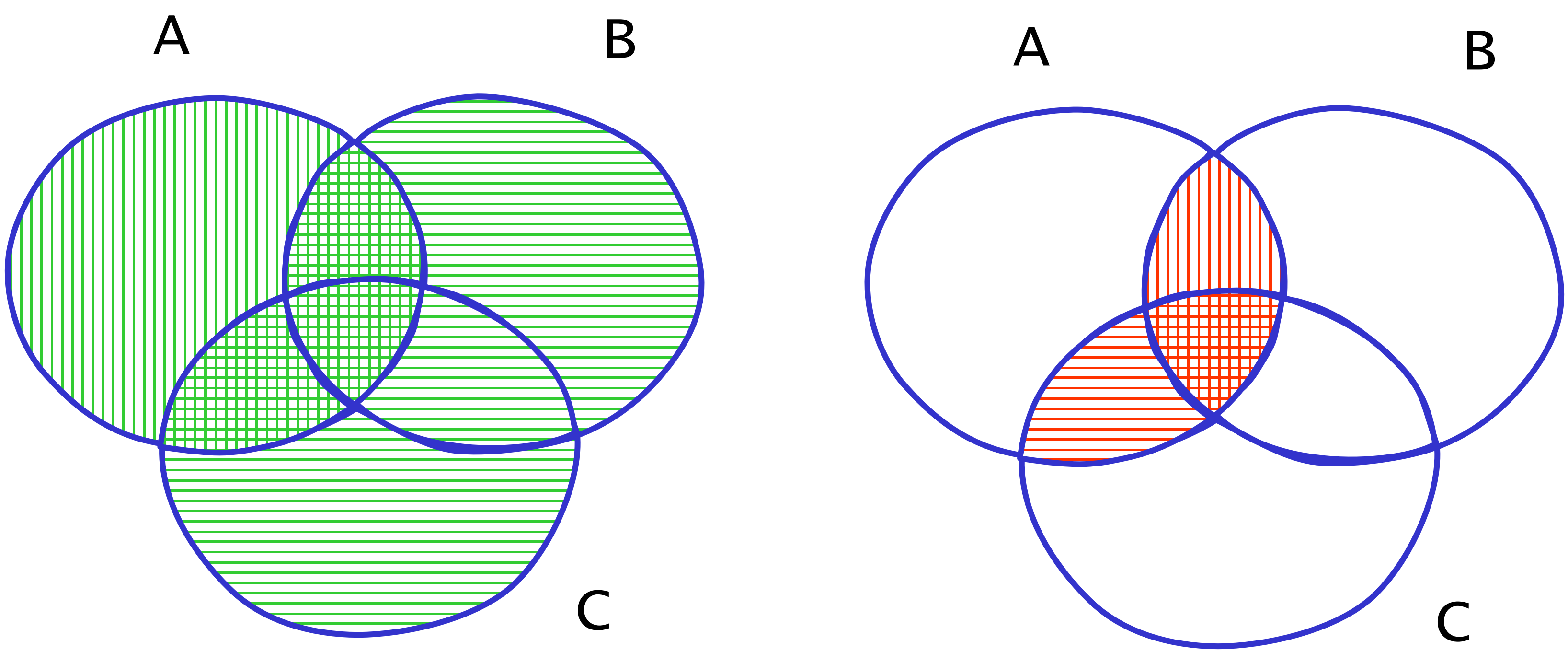
Néé, de uitkomst is niet (a+b+c)/3 !!

(4ab) distributiviteit

Voor verzamelingen A, B en C geldt dat

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ en

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.



$$A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

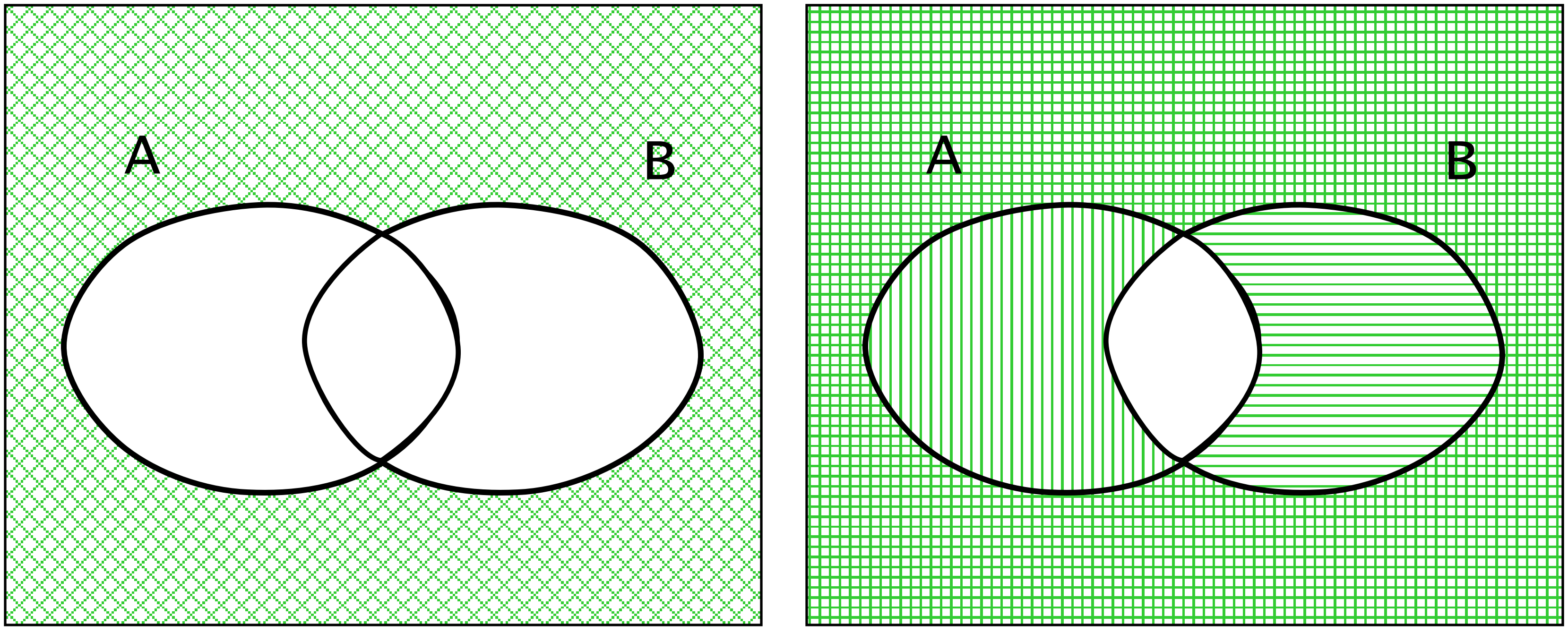
redeneren met Venn diagrammen

De verzamelingen-algebra bevat een groot aantal regels die algemeen geldig zijn, voor alle verzamelingen in elk domein. Deze regels kunnen bewezen worden door bijvoorbeeld Venn-diagrammen te gebruiken.

Neem twee Venn diagrammen. Arceer de gebieden voor elk van de twee uitdrukkingen en laat zien dat het gebied waar de uitdrukking links en rechts voor staat overeenkomen.

Als je een som maakt: beschrijf duidelijk wat de arceringen links en rechts voorstellen. Trek expliciet de conclusie welke gebieden er toe doen, en gelijk aan elkaar zijn.

(10ab) De Morgan



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

zie ook Theorem 1.11 (willekeurige vereniging)

(5ab & 6ab) identity laws

nulelement $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \emptyset = A$

éénelement $A \cap U = A$ $A \cup U = U$

(7&) 8ab & 9ab complement laws

dubbel complement $(A^c)^c = A$

‘*involution*’

complementregels $A \cap A^c = \emptyset$ $A \cup A^c = U$

$U^c = \emptyset$ $\emptyset^c = U$

(1ab) idempotent laws

gelijkmachtig $A \cap A = A$ $A \cup A = A$

De lijst met axioma’s van de verzamelingenalgebra is niet vaststaand: er zijn verschillende keuzes mogelijk.

Bij DiTe wordt nog *absorptie* gegeven maar dat is een extra stelling, die erg handig is, maar afgeleid kan worden uit de andere axioma’s.

Je kunt anderzijds *idempotentie* weglaten bv, dat volgt dan weer uit overige axioma’s, zie volgende slide.

gemist …

absorptiewetten:

$A \cap (A \cup B) = A$ en $A \cup (A \cap B) = A$

gevonden: Problem 15.5

Dite vs. Schaum

$A \cap (A \cup B) =$	(identity)
$(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) =$	(distributive)
$A \cup (\varnothing \cap B) =$	(commutative)*
$A \cup (B \cap \varnothing) =$	(identity)
$A \cup \varnothing =$	(identity)
A	

* moet strikt genomen omgedraaid worden omdat identiteitsregels maar in één variant opgenomen zijn

Een bewijs in de verzamelingenalgebra heeft een vaste vorm.

Elke regel bevat een verzamelingsexpressie, die uit de voorafgaande volgt door het toepassen van één van de regels. Benoem die regel in het bewijs.

De eerste en laatste expressie zijn dan equivalent. Zie voorbeelden hierna.

Er zijn ook andere type bewijssystemen. Zie LOGICA.

idempotentie:

$A \cap A = A$ en $A \cup A = A$

wikipedia: algebra of sets

$A \cap A =$	(nul)
$(A \cap A) \cup \varnothing =$	(complement)
$(A \cap A) \cup (A \cap A^c) =$	(distributief*)
$A \cap (A \cup A^c) =$	(complement)
$A \cap U =$	(één)
A	

*van achter naar voor!

Stelling 6.5 dualiteit

commutativiteit

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$

associativiteit

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

distributiviteit

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

absorptie

$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$

idempotentie

$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$

De Morgan

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

nulelement

$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \emptyset = A$

éénelement

$A \cap U = A \qquad A \cup U = U$

dubbel complement

$(A^c)^c = A$

complementregels

$A \cap A^c = \emptyset \qquad A \cup A^c = U$

Stelling 6.5 — dualiteit

commutativiteit

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$

associativiteit

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

distributiviteit

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

absorptie

$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$

idempotentie

$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$

De Morgan

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

nulelement

$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad \boxed{A \cup \varnothing = A}$

éénelement

$\boxed{A \cap U = A} \qquad A \cup U = U$

dubbel complement

$(A^c)^c = A$

complementregels

$A \cap A^c = \varnothing \qquad A \cup A^c = U$

$U \leftrightarrow \varnothing$

$\cap \leftrightarrow \cup$

duaal

De duaal van een bewering uit de verzamelingenalgebra ontstaat door de bewerkingen vereniging en doorsnede om te wisselen, evanals de constanten lege verzameling en universum.

Als een bewering bewezen kan worden, dan ook zijn duaal, want alle stappen uit een bewijs blijven geldig als we ze door hun duaal vervangen. Omdat alle axioma’s samen met hun duaal voorkomen.

duaal ϕ^* van verzamelings expressie ϕ
vervang zowel $\cap$ en $\cup$ als $\varnothing$ en **U** in elkaar

stelling: als $\phi = \psi$ dan ook $\phi^* = \psi^*$

want ook elke regel heeft duaal

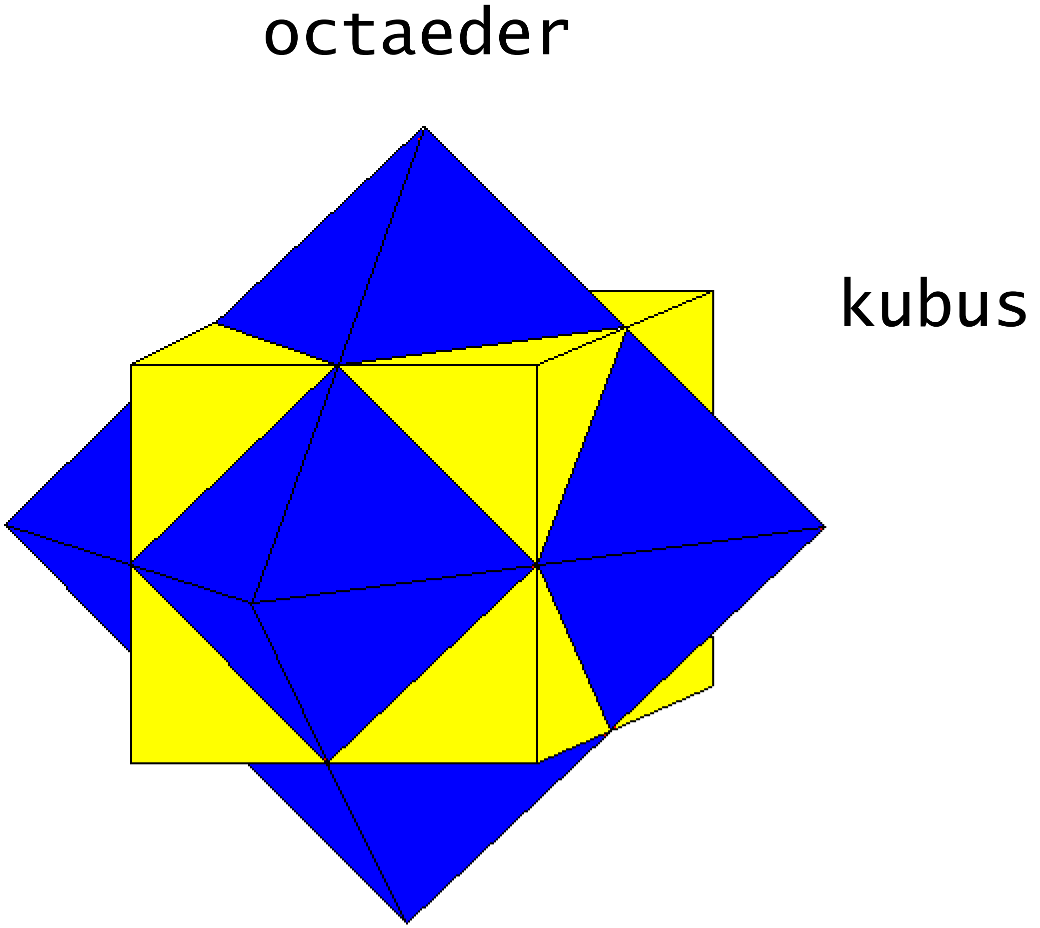
$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

$$\begin{aligned}
&A \cap (A \cup B) = \\
&(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = \\
&A \cup (\varnothing \cap B) = \\
&A \cup (B \cap \varnothing) = \\
&A \cup \varnothing = \\
&A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A \cup (A \cap B) = \\
&(A \cap \varnothing) \cup (A \cap B) = \\
&A \cap (\varnothing \cup B) = \\
&A \cap (B \cup \varnothing) = \\
&A \cap \varnothing = \\
&A
\end{aligned}$$

vlak ↔ hoekpunt



dualiteit

In de verzamelingenleer zijn vereniging en doorsnede duaal. De operaties zijn verschillend maar op allerlei manieren volkomen uitwisselbaar en symmetrisch.

Dualiteit komt op diverse plekken voor. Hier bijvoorbeeld bij de regelmatige veelvlakken, waar punt en vlak tegengangers zijn, en daarmee kubus en octaeder duaal. De tetraeder is duaal met zichzelf.

- directe redeneringen
- algebraïsche wetten
- Venn diagrammen
- waarheidstafels DITE

bij het vak Logica leren we onderscheid maken tussen deze methodes [voor beweringen ipv. verzamelingen]: geven ze altijd hetzelfde resultaat?

consistentie & volledigheid

Basic Identities of Boolean Algebra

Let X be a boolean variable and 0,1 constants

1. $X + 0 = X$ -- Zero Axiom
2. $X \cdot 1 = X$ -- Unit Axiom
3. $X + 1 = 1$ -- Unit Property
4. $X \cdot 0 = 0$ -- Zero Property

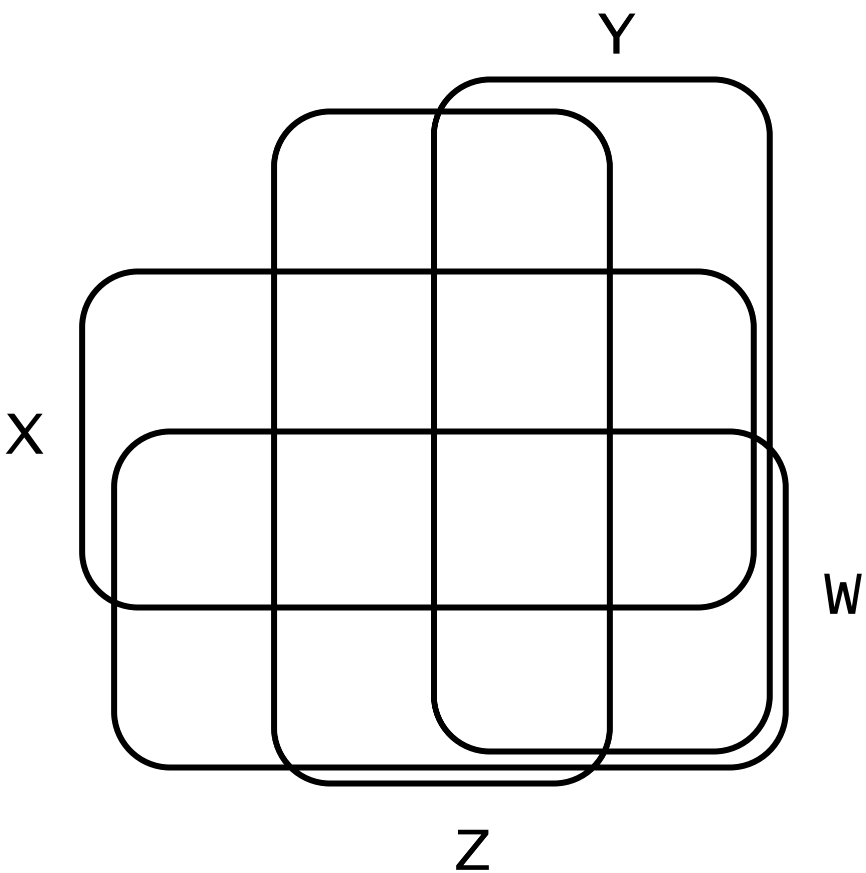
5. $X + X = X$ -- Idempotence
6. $X \cdot X = X$ -- Idempotence
7. $X + X' = 1$ -- Complement
8. $X \cdot X' = 0$ -- Complement
9. $(X')' = X$ -- Involution

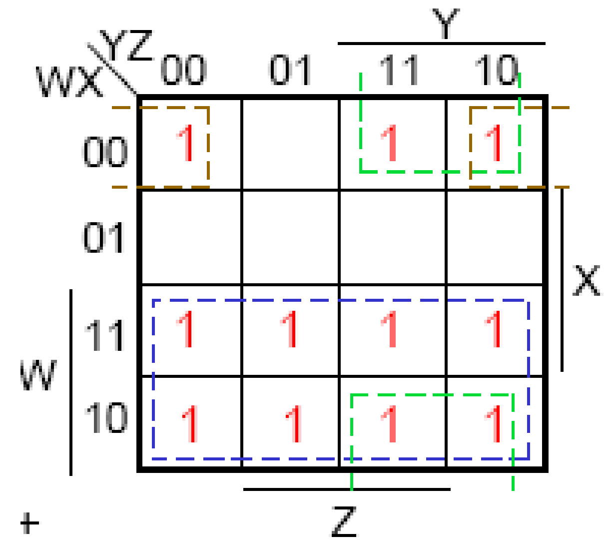
commutativiteit	*commutative*	10,11
$A \cap B = B \cap A$	$X \cdot Y = Y \cdot X$	
$A \cup B = B \cup A$	$X + Y = Y + X$	
associativiteit	*associative*	12,13
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	
distributiviteit	*distributive*	14,15
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$X + (Y \cdot Z) = (X + Y)(X + Z)$	
idempotentie	*idempotence*	5,6
$A \cap A = A = A \cup A$	$X \cdot X = X = X + X$	
De Morgan	*DeMorgan's Theorem*	16,17
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(X + Y)' = X' \cdot Y$	
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(X \cdot Y)' = X' + Y'$	
nulelement	*zero*	1,4
$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A$	$X \cdot 0 = 0 \quad X + 0 = X$	
éénelement	*unit*	2,3
$A \cap U = A \quad A \cup U = U$	$X \cdot 1 = A \quad X + 1 = 1$	
dubbel complement	*involution*	9
$(A^c)^c = A$	$(X')' = X$	
complementregels	*complement*	7,8
$A \cap A^c = \emptyset \quad A \cup A^c = U$	$X \cdot X' = 0 \quad X + X' = 1$	

“Onze” regels uit de verzamelingen-algebra tegenover de Boolese algebra gepresenteerd bij DiTe.

Het is duidelijk dat (hoewel notatie en naamgeving een beetje schelen) het hier om verwante theorieën gaat.

Meer details in Chapter 15 Boolean Algebra.
Waar we overigens geen les over zullen geven.





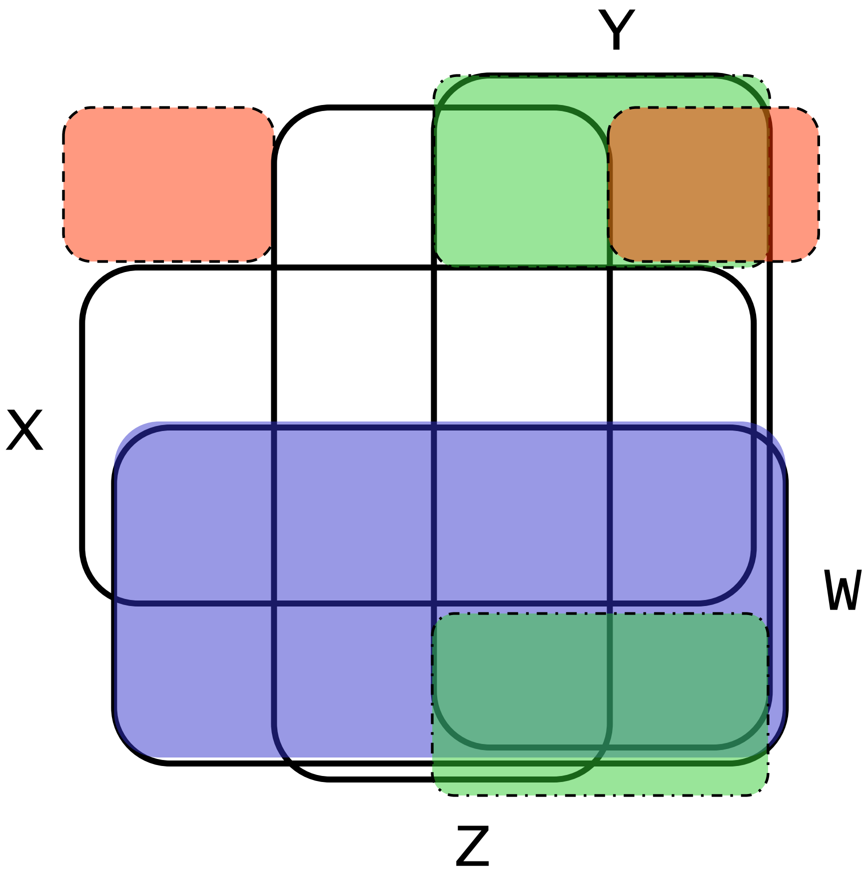
$$F = W'X'Z' + X'Y + W$$

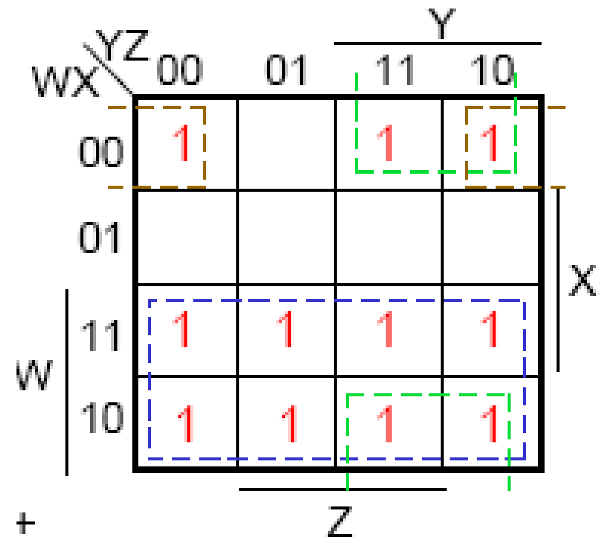
Karnaugh-map
Venn-diagram

Hiermee wil ik illustreren dat een Karnaugh-diagram gezien kan worden als een gestructureerd Venn diagram (in dit geval met vier verzamelingen).

De énen van Karnaugh zijn min of meer de arceringen in het Venn diagram.

$F = (W^c \cap X^c \cap Z^c) \cup (X^c \cap Y) \cup W$

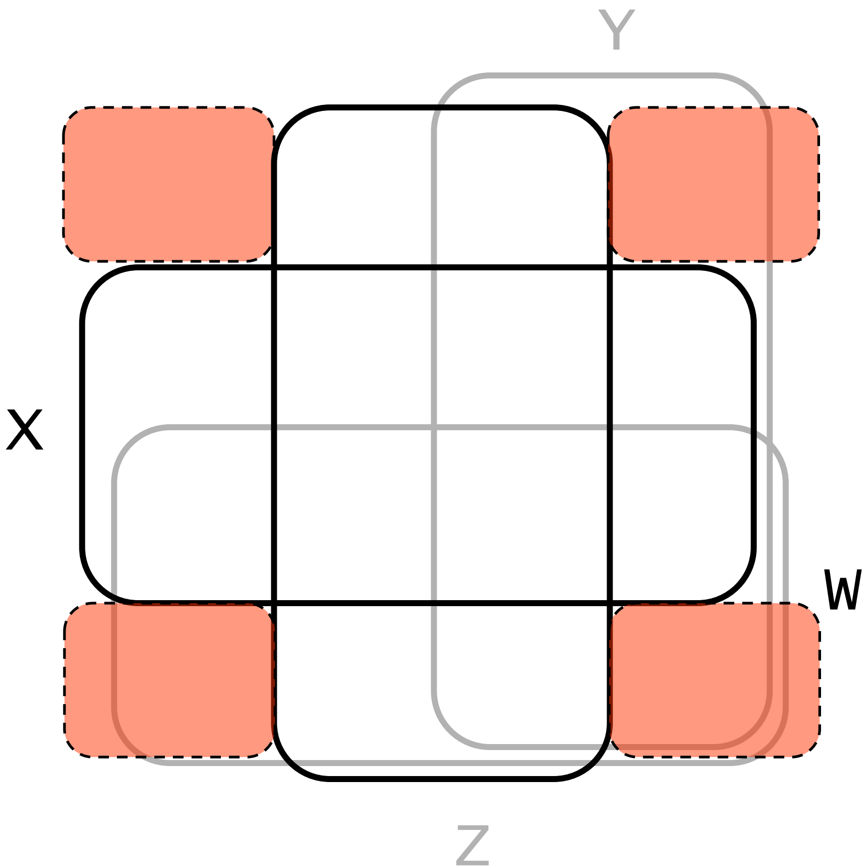


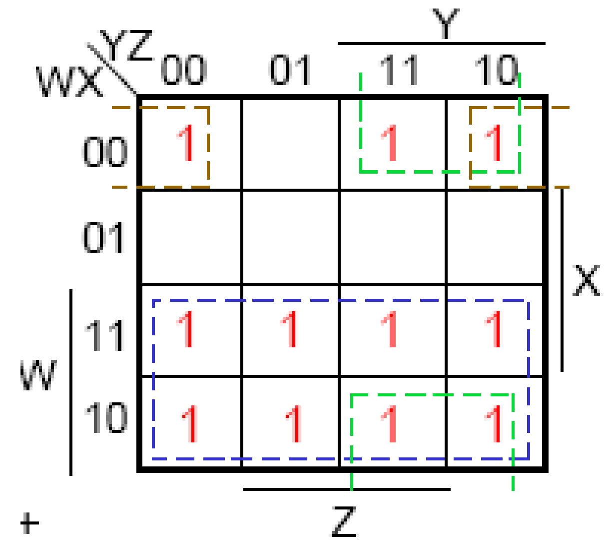


$F = W'X'Z' + X'Y + W$

Karnaugh-map
Venn-diagram

$F = (\ X^c \cap Z^c) \cup (X^c \cap Y) \cup W$





$F = \cancel{W}'X'Z'+X'Y+W$

Karnaugh-map
Venn-diagram

Volgens mij kan het net iets eenvoudiger.

operaties $\cap$ $\cup$ ^{c} constanten U $\varnothing$

commutativiteit •

$(A \cap B) = (B \cap A)$

$(A \cup B) = (B \cup A)$

distributiviteit •

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

éénelement

$A \cup \varnothing = A \qquad A \cup U = U$

complementregels •

$A \cap A^c = \varnothing \qquad A \cup A^c = U$

commutativiteit •

associativiteit

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

distributiviteit •

complementregels •

absorptie

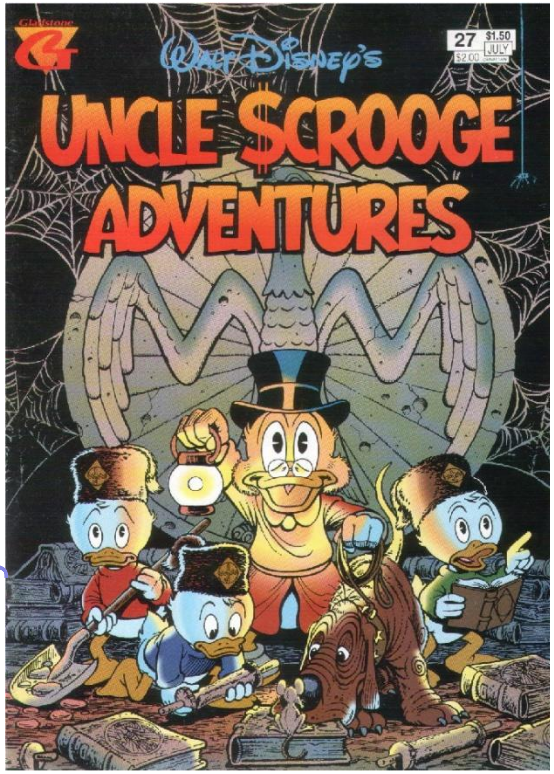
$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

verzamelingen, schakelalgebra, delers(kgv,ggd)

hieruit volgen <u>alle</u> andere regels,
inclusief DeMorgan, Schaum Theorem 15.4 !!

de verdwenen bibliotheek van Alexandrië



©Disney

http://en.wikipedia.org/wiki/Guardians_of_the_Lost_Library