Derde huiswerkopgave Complexiteit 2019
Inleveren: dinsdag 23 april 2019
Geprinte versie → kamer 159 of (werk)college
Maak de uitwerking in LaTeX!

Geef een *duidelijke* toelichting/uitleg bij al je antwoorden!

Gegeven een array A dat $4n$ ($n \geq 1$) verschillende getallen bevat. Verder geldt (*): de eerste helft van A is *aflopend* gesorteerd, en hetzelfde geldt voor de tweede helft.
Voorbeeldrijtje voor $n = 2$: $12, 8, 5, 2, 13, 10, 7, 4$ (dus 8 getallen).
Probleem: vind het n-de getal in grootte van de in totaal $4n$ elementen van A.
Als $n = 1$ wordt dus de grootste waarde gevraagd van 4 getallen, als $n = 2$ de op een na grootste van 8 getallen (in ons voorbeeld: 12), etcetera.

a. (6 punten)
Geef een algoritme in pseudocode dat de n-de in grootte vindt met precies n arrayvergelijkingen. Het algoritme moet gebaseerd zijn op arrayvergelijkingen. *Hint*: denk aan merge.

b. (6 punten)
Teken de beslissingsboom corresponderend met het algoritme uit **a** voor $n = 4$.

c. (5 punten)
Welke getallen uit A zijn zeker *niet* de n-de in grootte? Hoeveel array-elementen zijn *wel* kandidaat n-de in grootte?

d. (10 punten)
Toon aan met behulp van een *beslissingsboomargument* dat elk algoritme dat dit probleem oplost en dat gebaseerd is op arrayvergelijkingen ten minste $1 + \lceil \lg n \rceil$ vergelijkingen moet doen in de worst case. Leg duidelijk uit.

e. (4 punten)
Kunnen we uit **a** en **d** de conclusie trekken dat het algoritme uit **a** niet optimaal is? Motiveer je antwoord.

f. (4 punten)
We laten nu eis (*) vallen, dus we bekijken het probleem van het vinden van het n-de getal in grootte voor willekeurige arrays bestaande uit $4n$ verschillende getallen. Welke ondergrens op het aantal arrayvergelijkingen in de worst case levert een beslissingsboomargument in dit algemenere geval op?

g. (6 punten; deze opgave staat los van de rest)
Stel nu dat we een array A hebben met $m = 2^k$ ($k \geq 2$) elementen, waarvan de eerste helft aflopend gesorteerd is en hetzelfde geldt voor de tweede helft. Het array moet aflopend gesorteerd worden. Hoeveel arrayvergelijkingten doet de sorteermethode mergesort (verstandig aangepast om aflopend te sorteren) op zo'n array in de worst case? Geef het antwoord uitgedrukt in m en leg uit hoe je eraan komt.