

(Beknopte) antwoorden opgaven werkcollege 5

Opgave 7

a. zie college 5

b. zie college 5

c. We bekijken rijtjes die bestaan uit de getallen 1 t/m n , allemaal verschillend. Het is nuttig om eerst eens te kijken voor kleine n . Ga bijvoorbeeld voor $n = 3$ na welke van de 6 mogelijke rijtjes het worst case aantal vergelijkingen oplevert. Kijk ook even naar $n = 4$, met 24 mogelijke rijtjes. Zoek voor algemene n ook eens naar een worst case rijtje dat niet omgekeerd gesorteerd is! Voor $n = 5$ is dat bijvoorbeeld 5, 1, 4, 3, 2, maar er zijn er (veel) meer.

Op college zagen we al dat de worst case voorkomt dan en slechts dan als voor elke i geldt dat $A[j] > A[i]$ voor $j = i, i - 1, \dots, 2$ (de x in regel 4 van Insertion sort is immers gelijk aan $A[i]$). Dat wil zeggen dat voor elke i geldt dat $A[i]$ ofwel de kleinste is van zichzelf + alles wat ervoor staat (dan is de vergelijking $A[1] > x$ True en wordt gewisseld), ofwel de op een na kleinste (dan is de vergelijking $A[1] > x$ False). Als we bij de laatste ronde ($i = n$) beginnen staan de eerste $n - 1$ elementen al goed; in het ergste geval is $A[n]$ het kleinste of het op een na kleinste element, dus in dit geval is $A[n] = 1$ of $A[n] = 2$. Voor elk van beide gevallen ($A = A[1], A[2], \dots, A[n - 1], 1$ en $A = A[1], A[2], \dots, A[n - 1], 2$) bekijken we ronde $n - 1$. Voor een worst case geval geldt dan wederom: $A[n - 1]$ is de kleinste van zichzelf + alles wat ervoor staat of de een na kleinste daarvan. Van achter naar voren redenerend zijn er dus telkens 2 mogelijkheden. Dit leidt tot $2 * 2 * \dots * 2 = 2^{n-1}$ ($n - 1$ keer, want zodra ronde $i = 2$ bekeken is ligt het worst case rijtje vast).

Extra

Opgave: stel dat $A[i]$ en $A[i + k]$ ($k > 0$) verkeerd om staan en dat we die verwisselen. Hoeveel inversies worden dan ten minste respectievelijk ten hoogste opgeheven?¹

Merk op dat het verwisselen van $A[i]$ en $A[i + k]$ alleen effect zou kunnen hebben op inversies tussen elementen op posities ℓ met $i < \ell < i + k$ en het element op plek i danwel plek $i + k$. Dat zijn $k - 1$ elementen. Onderscheid nu de onderstaande drie gevallen en kijk wat er in elk van die gevallen gebeurt als $A[i]$ en $A[i + k]$ worden verwisseld. Er kunnen dan inversies worden opgeheven of juist ontstaan.

(1) $A[\ell] > A[i] > A[i + k]$

(2) $A[i] > A[\ell] > A[i + k]$

(3) $A[i] > A[i + k] > A[\ell]$

Je vindt dan in geval (2) dat het aantal inversies per ℓ met 2 afneemt, en dat het aantal inversies in de gevallen (1) en (3) gelijk blijft. Dat betekent dat er in totaal

¹zie sheet 14 van college 5

ten minste 1 (namelijk $(A[i], A[i+k])$ zelf) en ten hoogste $(k-1) \cdot 2 + 1 = 2k-1$ inversies worden opgeheven.

Opgave 2c tentamen 20/6/24

Zie uitwerking website

Opgave 14

a. Oplossing: $3 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = 3 + \sum_{i=1}^{n-1} i = 3 + \frac{1}{2}n(n-1)$. Zie werkcollege.

e. Oplossing: $(n+1)!$ zonder aanpassing. Met aanpassing: $\frac{(n+1)!}{2}$.

Afleiding + inductiebewijs:

We vullen de uitdrukking herhaald in zichzelf in. $T(n) = (n+1) \cdot T(n-1) = (n+1) \cdot n \cdot T(n-2) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot T(n-3) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot T(n-4) = \dots = (\text{vermoeden}) (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-\ell+2) \cdot T(n-\ell) = (\text{gebruik dat } T(0) = 1, \text{ dus kies } \ell = n) (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot T(0) = (n+1)!$

Vervolgens bewijzen we door middel van volledige inductie dat $T(n)$, de oplossing van de recurrente betrekking, gelijk is aan $(n+1)!$ voor alle $n \geq 0$.

Basisgeval: Voor $n = 0$ hebben we dat $(0+1)! = 1! = 1$, en dat moest ook volgens de recurrente betrekking.

Inductieaanname: neem nu aan dat de gelijkheid geldt voor alle $0 \leq n < N$. Dan moeten we bewijzen dat de gelijkheid ook voor N geldt, dus dat $T(N)$, zoals gedefinieerd door de recurrente betrekking, gelijk is aan $(N+1)!$

We gebruiken hieronder eerst de recurrente betrekking, dan de inductieaanname (want $N-1 < N$), en vervolgens is het een kwestie van verder uitschrijven.

Bewijs: $T(N) = (N+1) \cdot T(N-1) = (N+1) \cdot N! = (N+1)!$ QED

In het geval dat $T(1) = 1$ de beginconditie is, leidt bovenstaande afleiding tot: $T(n) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-\ell+2) \cdot T(n-\ell) = (\text{gebruik dat } T(1) = 1, \text{ dus kies } \ell = n-1) (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot T(1) = \frac{1}{2} \cdot (n+1)!$

Het inductiebewijs gaat verder analoog aan dat hierboven.

g. Oplossing: $\sqrt{n} \log_4 n$

Afleiding + inductiebewijs:

We vullen de uitdrukking herhaald in zichzelf in.

$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n} = 2 \cdot (2 \cdot T(\frac{n}{4^2}) + \sqrt{\frac{n}{4}}) + \sqrt{n} = 2^2 \cdot T(\frac{n}{4^2}) + 2 \cdot \sqrt{\frac{n}{4}} + \sqrt{n} = 2^2 \cdot T(\frac{n}{4^2}) + 2\sqrt{n} = 2^2 \cdot (2 \cdot T(\frac{n}{4^3}) + \sqrt{\frac{n}{4^3}}) + 2\sqrt{n} = 2^3 \cdot T(\frac{n}{4^3}) + 3\sqrt{n} = (\text{vermoeden}) 2^\ell \cdot T(\frac{n}{4^\ell}) + \ell \cdot \sqrt{n}$.

Gebruik nu dat $T(1) = 0$ en dat $n = 4^k$, dus kies $\ell = k = \log_4(n)$ en vul dit in. Dit geeft de vermoedelijke oplossing $T(n) = 2^k \cdot T(1) + k \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n} \log_4 n$.

We moeten nu bewijzen we met behulp van volledige inductie dat $T(n)$, de oplossing van de recurrente betrekking, gelijk is aan $\sqrt{n} \log_4 n$ voor alle viermachten ≥ 1 .

Basisgeval: Voor $n = 1$ hebben we $\sqrt{1} \cdot \log_4(1) = 1 \cdot 0 = 0$, en dat klopt met de recurrente betrekking. Dus het basisgeval is correct.

Inductieaanname: neem nu aan dat de gelijkheid geldt voor alle viermachten $1 \leq n < N$, met N ook een viermacht.

Dan gaan we bewijzen dat de gelijkheid tevens voor N geldt, dus dat $T(N)$, zoals gedefinieerd door de recurrente betrekking, gelijk is aan $\sqrt{N} \log_4 N$.

We gebruiken hieronder eerst de recurrente betrekking, dan de inductieaanname (want $\frac{N}{4}$ is een viermacht $< N$), en vervolgens is het een kwestie van verder uitschrijven.

Bewijs: $T(N) = 2 \cdot T(\frac{N}{4}) + \sqrt{N} = 2 \cdot \sqrt{\frac{N}{4}} \log_4(\frac{N}{4}) + \sqrt{N} = \sqrt{N}(\log_4 N - \log_4 4) + \sqrt{N} = \sqrt{N}(\log_4 N - 1) + \sqrt{N} = \sqrt{N} \log_4 N - \sqrt{N} + \sqrt{N} = \sqrt{N} \log_4 N$.

QED