

Antwoorden opgaven werkcollege 2

Opgave 6

Zie uitwerking website

Opgave 8

Opmerking: we veronderstellen altijd short circuiting, tenzij anders vermeld. Dat betekent hier dus dat de tweede test uit regel (4) niet meer gedaan wordt als de eerste test False oplevert, dus als $Kmin > Min$ is.

a. Werking: Min loopt uiteindelijk van 1 tot en met n . Voor elke waarde van Min wordt de eerstvolgende waarde kleiner dan $A[Min]$ opgezocht en verwisseld met $A[Min]$. Vervolgens loop je weer vanaf $Min + 1$ naar rechts totdat je een waarde kleiner dan (de nieuwe) $A[Min]$ tegenkomt. Merk op dat op de weg terug naar rechts eigenlijk nutteloze vergelijkingen worden gedaan, want je weet al dat alles tot de positie waar je vandaan kwam groter is dan $A[Min]$.

Het beste geval krijg je wanneer je nooit opnieuw met $Kmin$ op positie $Min + 1$ hoeft te beginnen dus ook nooit de overbodige vergelijkingen hoeft te doen. In dat geval is voor elke Min $A[Kmin] \geq A[Min]$ voor alle $Kmin > Min$ en wordt Min vervolgens met 1 opgehoogd. Er wordt dan niet gewisseld, dus het array blijft ongewijzigd. Dus het beste geval komt voor als voor elke $i = 1, \dots, n - 1$ (het geval $Min = n$ levert geen vergelijkingen op) $A[i]$ kleiner of gelijk is aan alles wat erachter staat. Met andere woorden, dan en slechts dan als A oplopend gesorteerd is.

Het aantal vergelijkingen is in dat geval: $n - 1 + n - 2 + n - 3 + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n - 1) \in \Theta(n^2)$.

b. In het ergste geval moet voor elke Min zo vaak mogelijk opnieuw (op positie $Min + 1$) worden begonnen, waardoor het ophogen van Min zo lang mogelijk wordt uitgesteld. Regel (8) moet dus zo vaak mogelijk worden uitgevoerd voor elke Min . Dit gebeurt precies als voor elke Min geldt dat elk element $A[Kmin^*]$ met $Kmin^* > Min$ een verwisseling oplevert (dus d.e.s.d.a. $A[Min] > A[Kmin^*]$). Na verwisseling van $A[Min]$ met $A[Kmin^*]$ loop je dan weer vanaf positie $Min + 1$ naar $A[Kmin^*]$ op positie $Kmin^*$ (die zijn allemaal kleiner of gelijk aan de nieuwe $A[Min]$) en $A[Kmin^* + 1]$ moet dan opnieuw kleiner zijn dan $A[Min]$, waarop verwisseling plaatsvindt, enzovoort. Er moet dus voor elke Min gelden dat de waarde die op dat moment op plek Min staat wordt verwisseld met het volgende (nog niet bekeken) element $A[Kmin^* + 1]$ dat rechts van positie Min staat. Dit betekent dat elk element dat aan het begin van de ronde met de nieuwe (net opgehoogde) Min rechts van $A[Min]$ staat kleiner moet zijn dan zijn voorganger en zo dus steeds verwisseld wordt met de waarde die op dat moment op positie Min staat. Dit betekent voor ronde 1 al dat (let op de verwisselingen!) voor de oorspronkelijke A moet gelden dat $A[1] > A[2] > A[3] > \dots > A[n]$, m.a.w. dat A aflopend gesorteerd is. Hiermee wordt ook in de volgende ronden weer het maximale aantal vergelijkingen gedaan (ga dit na!). Merk op: na de eerste ronde staat de kleinste waarde vooraan en is de oorspronkelijke A feitelijk een positie naar rechts opgeschoven.

In ronde 1 doen we aldus $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{1}{2}n(n - 1)$ vergelijkingen om uiteindelijk het kleinste element te vinden en vooraan te plaatsten, plus nog eens $n - 1$ om de binnenste loop voor de laatste keer te doorlopen. In ronde 2 doen we $1 + 2 + \dots + n - 2 = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ vergelijkingen, plus $n - 2$ voor de laatste doorloop. In totaal wordt dat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i(i-1) + \sum_{i=1}^{n-1} i &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i(i-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i + \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n i^2 + \Theta(n^2) \in \Theta(n^3) \end{aligned}$$

Als je de formule voor $\sum_{i=2}^n i^2$ gebruikt (hoofdstuk 2 dictaat) kun je het antwoord ook exact uitrekenen.

Opgave 10

Een paar observaties: $\Theta(\lg n) = \Theta(\ln n) = \Theta(\log_3 n)$; $O(1) \subseteq O(\sqrt{n}) \subseteq O(n) \subseteq O(n \lg n) \subseteq O(n^{1+\epsilon}) \subseteq O(n^2) \subseteq O(n^3)$ dit zijn alle echte inclusies; $\Theta(n + 9) = \Theta(n)$, $\Theta(n^3 + n^7 + 8) = \Theta(n^7)$, $\Theta(n^2 + \lg n) = \Theta(n^2)$; $2^{\lg n} = n$, $4^{\lg n} = 2^{2 \lg n} = n^2$; $n^p \in O(a^n)$, maar niet omgekeerd (gebruik standaardlimiet); $O(\ln \ln n) \subseteq O(\sqrt{\lg n}) \subseteq O(\lg n) \subseteq O(\lg^2 n) \subseteq O(\sqrt{n})$ echte inclusies; gebruik hier en daar standaardlimieten; $O((\frac{3}{2})^n) \subseteq O(2^n) \subseteq O(e^n)$ echte inclusies; $O(n2^n) \subseteq O(e^n)$ standaardlimiet gebruiken; $\Theta(\lg(n!)) = \Theta(n \lg n)$ college/dictaat hoofdstuk 2; $n! \in O((n+1)!)$ maar niet omgekeerd; $a^n \in O(n!)$, $n2^n \in O(n!)$ niet omgekeerd; $3^n \in O(2^{2^n})$ en niet omgekeerd.

Opgave 17

a. De formulering uit de opgave suggereert dat alle $A[i]$ verschillend zijn, want er staat *het* maximum. Dat nemen we hier dus dan ook aan.

Het aantal toekenningen is altijd ten minste 1 (regel (1)), en in het beste geval blijft het daar ook bij, dus 1 toekenning. Dan moet de test in regel (3) dus altijd ($i \geq 2$) False opleveren, en dit gebeurt dan en slechts dan als $A[1] > A[i]$ voor alle $2 \leq i \leq n$.

b. In het slechtste geval wordt juist voor elke $i = 2, \dots, n$ regel (4) uitgevoerd, dus in regel (3) is de vergelijking voor elke i true. Dat geeft $1 + n - 1 = n$ toekenningen. Het komt voor d.e.s.d.a. $A[1] < A[2]$, $A[2] < A[3]$, $\dots$, $A[n-1] < A[n]$, met andere woorden d.e.s.d.a. A oplopend gesorteerd is.

Opgave 20

Zie uitwerking website