

Antwoorden opgaven werkcollege 11

Opgave 65

Zie uitwerking website voor de reductie. Toon zelf aan dat $TSP \in \mathcal{NP}$. Bekijk de slides van college 11 en antwoorden10 (werkcollege 10) voor een paar voorbeelden.

Opgave 66

a. Te bewijzen is dat VertexCover (VC) in $\mathcal{NP}$ zit. Hiertoe geven we een niet-deterministisch polynomiaal algoritme A voor VC. De invoer x voor dit algoritme is een graaf $\mathcal{G} = (V, E)$, tezamen met een geheel getal $k \leq |V|$, dus $x = \langle \mathcal{G}, k \rangle$. Eventueel (is hieronder niet gedaan) mogen we wel veronderstellen dat het aantal knopen van V bekend is en dat $V = \{1, 2, \dots, n\}$. In dat geval wordt in stap (1) uit Fase 2 getest of alle s_i tussen 1 en n zitten en dat levert $O(|s|)$ op.

Globaal idee: gok een string s en controleer of die een correcte vertex cover voorstelt. Als die controle polynomiaal kan, zit VC in $\mathcal{NP}$.

1. Fase 1 (gokfase)
Er wordt een string s gegenereerd, hierna te interpreteren als een rij integers.
// Hopelijk stelt dit een deelverzameling van de knopen ter grootte $\leq k$
// voor die een vertex cover is voor $\mathcal{G}$.
2. Fase 2 (verificatiefase)
Er wordt in (1), (2) en (3) gecontroleerd of s een deelverzameling van V is, bestaande uit $\leq k$ knopen.

- (1) controleer dat alle s_i in V zitten: s aflopen en elke s_i vergelijken met V , dus $O(|s| \cdot |V|) \subseteq O(|s| \cdot |x|)$.
- (2) controleer dat alle s_i verschillend zijn: s aflopen en voor elke s_i nagaan dat alle s_j die erna komen niet gelijk zijn aan s_i , dus $O(|s|^2)$.
- (3) controleer dat s hooguit k waarden bevat: s doorlopen, tellen en vergelijken met k , dus $O(|s|)$.

Als aan (1), (2) en (3) voldaan is stelt s inderdaad een deelverzameling van de knopen voor ter grootte $\leq k$. Nu nog controleren dat s een vertex cover is.

- (4) controleer dat van elke tak uit E ten minste een der uiteinden in s zit: loop alle takken (u, v) af ($O(|E|)$) en kijk voor elk van deze takken of u in s voorkomt en zo niet of v in s voorkomt ($O(|s|)$ per tak). Zo ja, dan de volgende tak, zo nee dan stop en retourneer False. Dit is in totaal $O(|E| \cdot |s|) \subseteq O(|x| \cdot |s|)$.

Als alle vier controles positief zijn wordt True geretourneerd, anders wordt (zodra een test niet klopt) False geretourneerd of gaat het programma in een oneindige loop (of zo).

Fase 2 geeft dus True d.e.s.d.a. s een vertex cover van $\mathcal{G}$ bestaande uit $\leq k$ knopen voorstelt.

3. Fase 3 (uitvoerfase)

Als Fase 2 True oplevert wordt “ja” uitgevoerd, anders geen uitvoer.

Er geldt nu: het antwoord van A voor invoer x is “ja” $\iff$ er is een executie van A die “ja” oplevert $\iff$ er bestaat een string s waarop A in Fase 2 True oplevert $\iff$ er bestaat een string s die een vertex cover bestaande uit $\leq k$ knopen voorstelt¹ $\iff \mathcal{G}$ heeft een vertex cover ter grootte $\leq k$ $\iff x$ is een ja-instantie.

Het algoritme A geeft derhalve voor elke invoer x het juiste antwoord.

En verder: A is polynomiaal begrensd.

Namelijk: voor een ja-executie (dus met x een ja-instantie, en s een goede string) stelt s een deelverzameling van de knopen voor, dus dan is $|s| \leq |V| \leq |x|$. Derhalve is Fase 1 dan $O(|x|)$ en de verificatiefase $O(|x|^2)$. Dus voor elke invoer x waarvoor het antwoord van A “ja” is, is er een executie (namelijk die corresponderend met een goede string s) die dat in $O(|x|)$ (Fase 1) + $O(|x|^2)$ (Fase 2) $\subseteq O(|x|^2)$ stappen doet, in totaal polynomiaal in $|x|$.

b. We moeten laten zien dat de beschreven transformatie polynomiaal is. Laat $x = \langle \mathcal{G}, k \rangle$. We kiezen hier een lineaire representatie van de graaf, dus achter elkaar eerst de knopen, dan alle takken (of andersom; zie verderop). We construeren nu $\overline{\mathcal{G}}$ als volgt:

- kopieer alle knopen; $O(|V|) \subseteq O(|x|)$
- ga alle paren knopen af ($O(|V|^2)$), kijk in E of de corresponderende tak voorkomt ($O(|E|)$ per knoop) en voeg de takken die niet voorkomen in $\mathcal{G}$ toe² aan $\overline{E}$; $O(|V|^2 \cdot |E|) \subseteq O(|x|^3)$
- tevens $|V| - k$ berekenen; $O(1)$.

De hele constructie kan dus in $O(|x|^3)$ stappen.

Als we beide grafen in de adjacencymatrix representatie veronderstellen en we nemen aan (dat mag) dat $V = \{1, 2, \dots, n\}$, dan komt de transformatie neer op het kopiëren van $\mathcal{G}$ en het vervolgens doorlopen van de adjacencymatrix waarbij we enen in nullen veranderen en andersom. Dat kan in $O(|x|)$ stappen.

Hoe dan ook is de constructie van $T(x)$ uit x polynomiaal.

c. We bewijzen hier dat de reductie-eigenschap geldt.

$\Rightarrow$: Stel dat $\langle \mathcal{G}, k \rangle$ een ja-instantie is van Kliek. Dan heeft $\mathcal{G}$ dus een kliek $V' \subseteq V$ bestaande uit $\geq k$ knopen.

¹merk op: voor nee-instanties kan er nooit zo'n string bestaan

²Als we voor een lineaire representatie van de graaf kiezen, en de takkenverzameling is een rij van paren knopen en daarachter staan de knopen, kan (vooraan) toevoegen in $O(1)$ tijd

Bewering: dan is $V \setminus V'$ een vertex cover voor $\overline{\mathcal{G}}$. Duidelijk: $V \setminus V'$ heeft precies het gevraagde aantal knopen, namelijk $\leq |V| - k$. De vertex cover eigenschap is als volgt in te zien. Neem een willekeurige tak (u, v) uit $\overline{E}$, dan zit per definitie (u, v) niet in E . Daaruit volgt dat u en v niet allebei in V' kunnen zitten, want V' is een klik in $\mathcal{G}$. Derhalve zit ten minste een van u en v in $V \setminus V'$. Dit bewijst dat $V \setminus V'$ een vertex cover is.

$\Leftarrow$: Stel nu dat $\langle \overline{\mathcal{G}}, |V| - k \rangle$ een ja-instantie is van VC. Dan is er een verzameling $V'' \subseteq V$ die een vertex cover is voor $\overline{\mathcal{G}}$ met hooguit $|V| - k$ knopen. Dat betekent dat voor elke tak $(u, v) \in \overline{E}$ geldt dat ten minste een van u of v in V'' zit.

Bewering: dan is $V \setminus V''$ een klik in $\mathcal{G}$ met –uiteraard– ten minste $|V| - |V''| + k = k$ knopen. De klik-eigenschap is als volgt in te zien. Neem twee willekeurige knopen u en v in $V \setminus V''$. Beide knopen zitten dus *niet* in V'' . Aangezien V'' een vertexcover is moet van elke tak uit $\overline{E}$ ten minste één van de uiteinden in V'' zitten. Dit betekent samen dus dat de tak (u, v) niet in $\overline{E}$ zit, en derhalve $(u, v) \in E$. Kortom, voor elk tweetal knopen u en v in $V \setminus V''$ geldt dat $(u, v) \in E$. $V \setminus V''$ is dus een klik in $\mathcal{G}$ met ten minste k knopen.

Opgave 67

Zie uitwerking website