

Complexiteit

Uitwerkingen Opgaven

opgave 65

HC2 is het probleem te bepalen of een ongerichte graaf een Hamiltoncircuit heeft. We bewijzen $\text{HC2} \leq_P \text{TSP}$. Voorgestelde reductie: $\mathcal{G} \xrightarrow{T} \langle \mathcal{G}', c, 0 \rangle$ met $\mathcal{G}'$ en c zoals in de opgave. Te bewijzen:

(1) T is polynomiaal begrensd, ofwel de constructie van $T(\mathcal{G})$ uit $\mathcal{G}$ kan in een polynomiaal aantal stappen.

(2) $\mathcal{G}$ is ja-instantie van HC2 $\iff T(\mathcal{G})$ is ja-instantie van TSP, ofwel:

$\mathcal{G}$ heeft een Hamiltonkring $\iff \mathcal{G}'$ heeft een Hamiltonkring met totaalgewicht ≤ 0

(1) De $|V|$ knopen van $\mathcal{G}$ kopiëren en alle mogelijke takken aanbrengen (dat zijn er $O(|V|^2)$, dus $O(|V|^2)$ werk). Dan voor elke tak (i, j) het bijbehorende gewicht bepalen: in $\mathcal{G}$ kijken of er een tak tussen i en j zit (dat is bijvoorbeeld $O(|E|)$ bij gebruik van de adjacency-list¹: buurlijst van i aflopen en kijken of j daarin zit). Zo ja, dan wordt het gewicht 0, anders 1. Gewichten bepalen is zo dus $O(|V|^2 \cdot |E|) \subseteq O(|\mathcal{G}|^3)$. Totale hoeveelheid werk is dan $O(|\mathcal{G}|^3)$, dus polynomiaal.

(2) Te bewijzen: $\mathcal{G}$ heeft een Hamiltonkring $\iff \mathcal{G}'$ heeft een Hamiltonkring met totaalgewicht ≤ 0 .

“ $\implies$ ”: Stel $\mathcal{G}$ heeft een Hamiltonkring H . Elke tak uit H zit per definitie in E , dus (is zeker een tak in $\mathcal{G}'$ omdat $\mathcal{G}'$ volledig is en) heeft gewicht 0 in $\mathcal{G}'$. Verder worden alle knopen worden precies één keer aangedaan omdat H een Hamiltonkring is in $\mathcal{G}$, die dezelfde knoopverzameling heeft als $\mathcal{G}'$. Derhalve is H een Hamiltonkring in $\mathcal{G}'$ ($\mathcal{G}'$ is volledig) met totaalgewicht 0.

“ $\impliedby$ ”: Stel $\mathcal{G}'$ heeft een Hamiltonkring H' met totaalgewicht ≤ 0 . Omdat de gewichten op de takken van $\mathcal{G}'$ altijd 0 of 1 zijn, kan H' alleen maar takken bevatten met gewicht $= 0$, met andere woorden alle takken uit H' zitten ook in E . Derhalve is H' ook een Hamiltonkring in $\mathcal{G}$.

¹ $O(1)$ als we de adjacencymatrix gebruiken