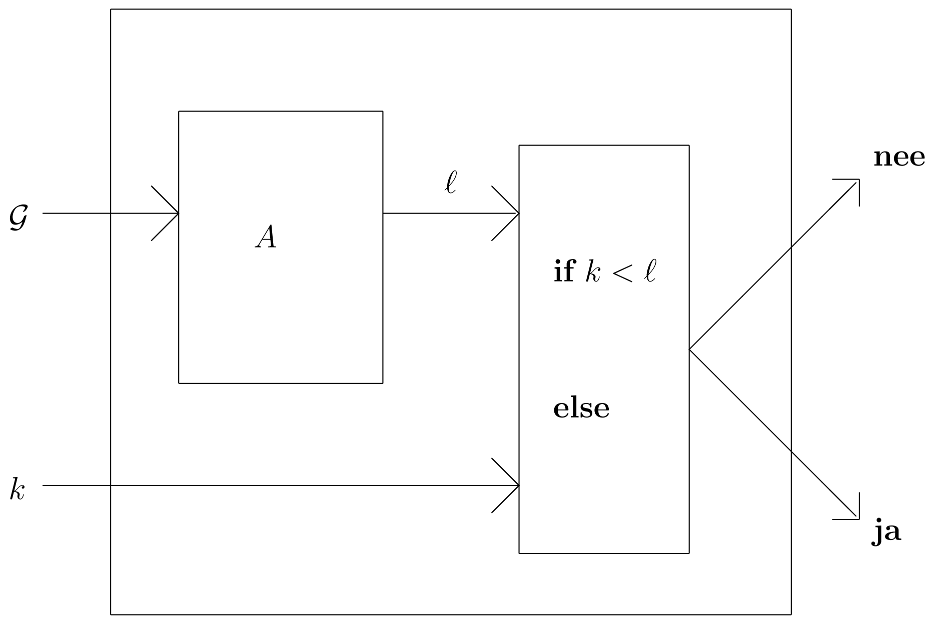
Opmerking: we bekijken als het gaat om $\mathcal{NP}$ en $\mathcal{NPC}$ altijd beslissingsproblemen. Dit is zeker relevant want er geldt: als het beslissingsprobleem (BP) exponentieel is, dan is het optimalisatieprobleem (OP) dat ook. Dit volgt uit: OP polynomiaal dan BP polynomiaal. Vandaar dat we willen dat de beslissingsproblemen daaraan voldoen.

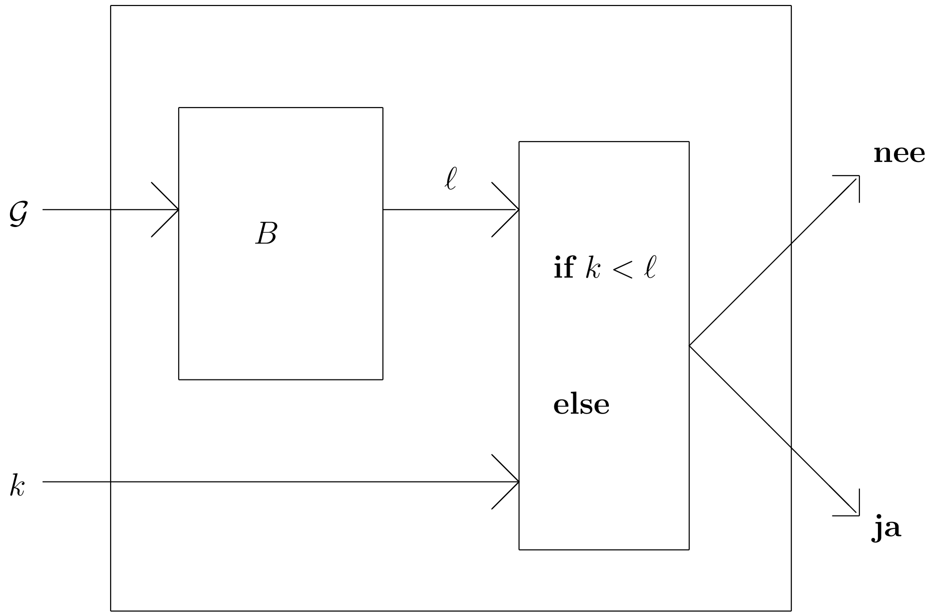
a. Graafkleuringsprobleem Kleur:
Optimalisatieprobleem: Gegeven een ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$. Gevraagd een kleuring van $\mathcal{G}$ met zo weinig mogelijk kleuren.
Beslissingsprobleem: Gegeven een ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$ en een geheel getal $k > 0$. Bestaat er een kleuring van $\mathcal{G}$ die hooguit k kleuren gebruikt (ofwel, is $\mathcal{G}$ k-kleurbaar) ?

Stel dat er een algoritme A bestaat dat het optimalisatieprobleem oplost in polynomiale tijd, dat wil zeggen: voor elke invoergraaf $\mathcal{G}$ bepaalt A in een polynomiaal aantal stappen een minimale kleuring, en dus ook het minimale aantal kleuren ℓ nodig om de knopen van de graaf te kleuren. Onderstaand algoritme lost nu in polynomiale tijd het beslissingsprobleem op. Het gebruikt A en vervolgens vergelijkt het ℓ met k. Aangezien er kennelijk geen kleuring met minder dan ℓ kleuren bestaat is het antwoord 'nee' als $k < \ell$ en anders 'ja' (namelijk de minimale kleuring gevonden door A voldoet). Het algoritme is ten duidelijkste polynomiaal, omdat A dat is.



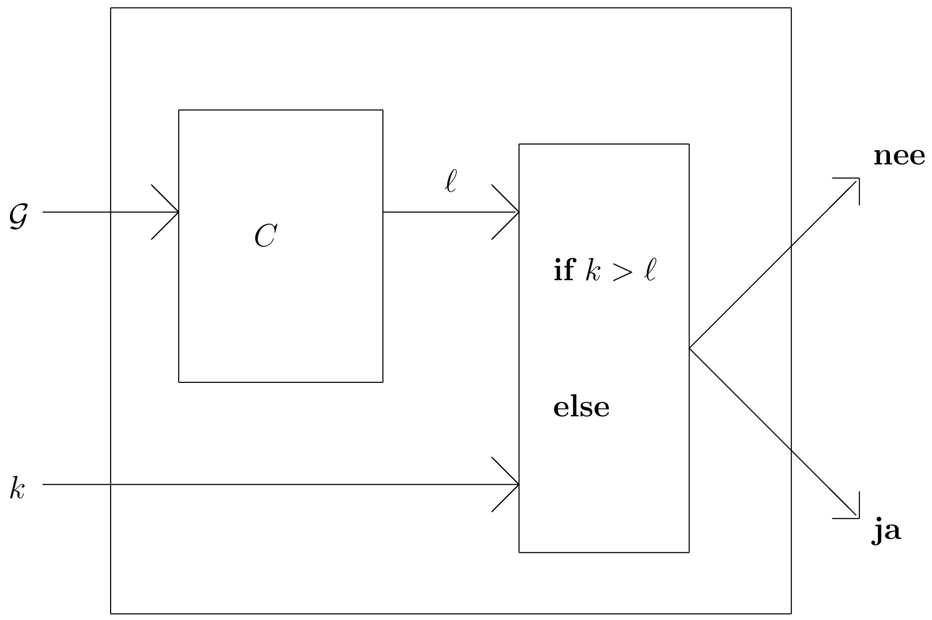
b. Handelsreizigersprobleem TSP:
Optimalisatieprobleem: Gegeven een volledige, ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$ met gewichten op de takken. Gevraagd wordt een Hamiltonkring in $\mathcal{G}$ met minimaal totaalgewicht.
Beslissingsprobleem: Gegeven een volledige, ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$ met gewichten op de takken, en een geheel getal $k \geq 0$. Bestaat er in $\mathcal{G}$ een Hamiltonkring met totaalgewicht $\leq k$?

Stel dat er een algoritme B bestaat dat het optimalisatieprobleem oplost in polynomiale tijd, dat wil zeggen: voor elke volledige, gewogen invoergraaf $\mathcal{G}$ bepaalt B in een polynomiaal aantal stappen een minimale Hamiltonkring, en dus ook het minimale totaalgewicht ℓ. Onderstaand algoritme lost nu in polynomiale tijd het beslissingsprobleem op. Het gebruikt B en vervolgens vergelijkt het ℓ met k. Aangezien er kennelijk geen Hamiltonkring met gewicht minder dan ℓ bestaat is het antwoord 'nee' als $k < \ell$ en anders 'ja' (namelijk de minimale Hamiltonkring gevonden door B voldoet). Het algoritme is ten duidelijkste polynomiaal, omdat B dat is.



c. Kliek:
Optimalisatieprobleem: Gegeven een ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$. Gevraagd wordt een kliek met zo veel mogelijk knopen (een maximale kliek).
Beslissingsprobleem: Gegeven een ongerichte graaf $\mathcal{G} = (V, E)$ en een geheel getal k $(0 \leq k \leq |V|)$. Bestaat er in $\mathcal{G}$ een kliek ter grootte ten minste k?

Stel dat er een algoritme C bestaat dat het optimalisatieprobleem oplost in polynomiale tijd, dat wil zeggen: voor elke invoergraaf $\mathcal{G}$ bepaalt C in een polynomiaal aantal stappen een maximale kliek, en dus ook de maximaal mogelijke grootte van een kliek in $\mathcal{G}$ hebben: ℓ is het aantal knopen van een maximale kliek. Onderstaand algoritme lost nu in polynomiale tijd het beslissingsprobleem op. Het gebruikt C en vervolgens vergelijkt het ℓ met k. Aangezien er kennelijk geen kliek met meer dan ℓ knopen bestaat is het antwoord 'nee' als $k > \ell$ en anders 'ja' (namelijk de maximale kliek gevonden door C voldoet). Het algoritme is ten duidelijkste polynomiaal, omdat C dat is.


$\mathcal{G}$
C
ℓ
if $k > \ell$
else
k
nee
ja