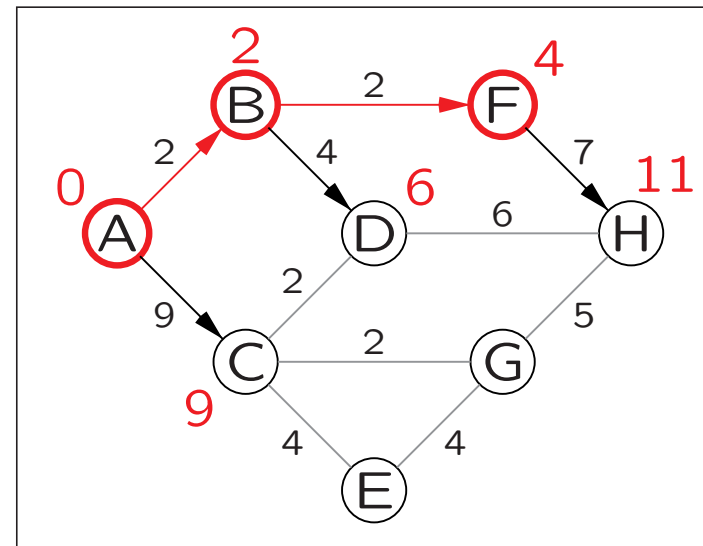
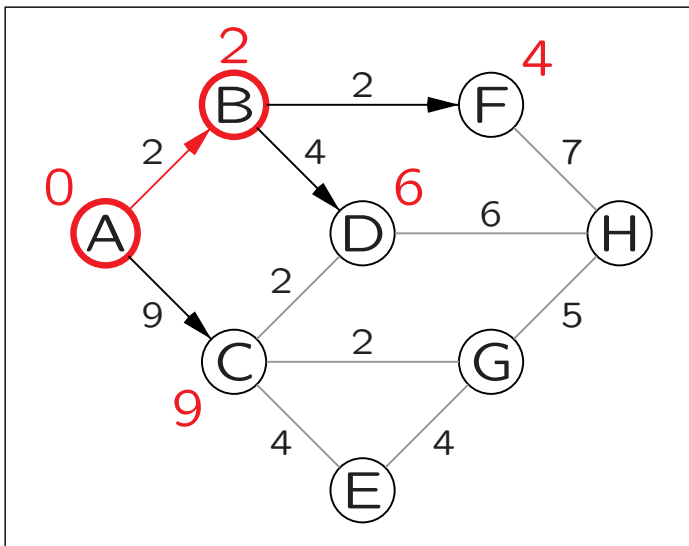
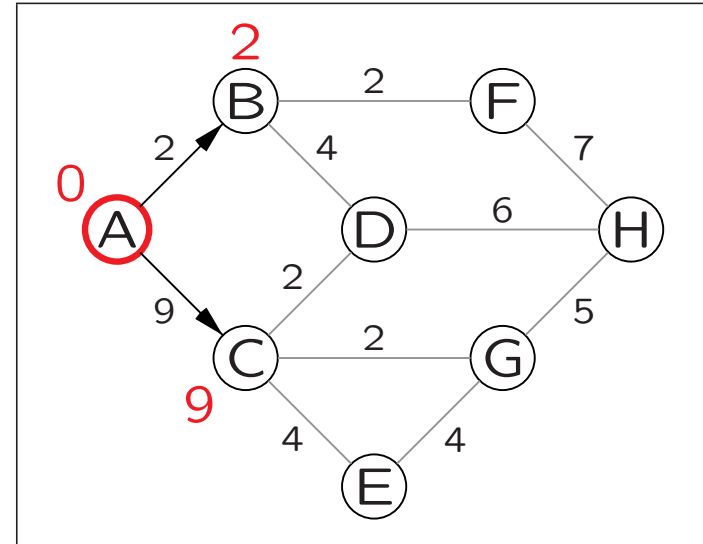
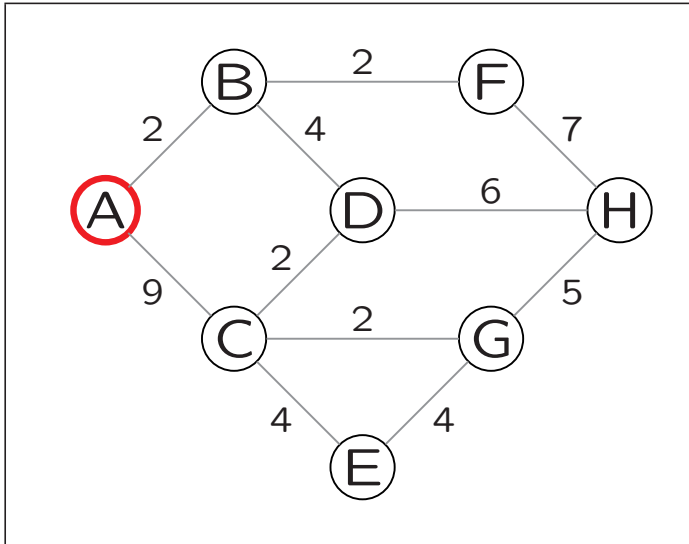
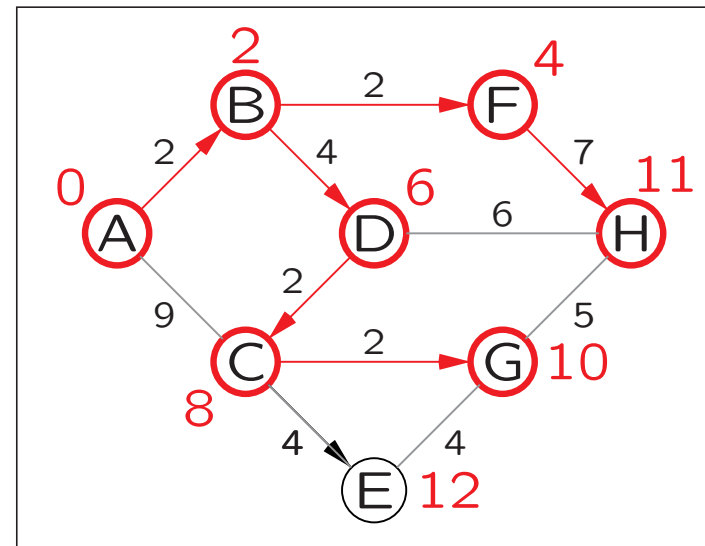
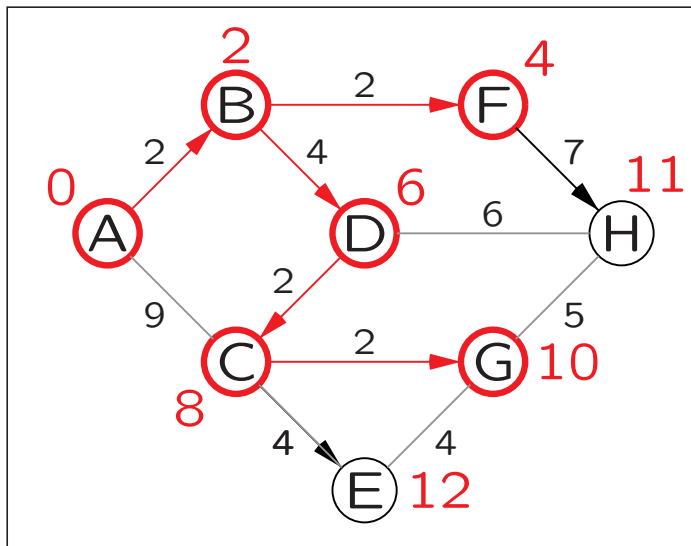
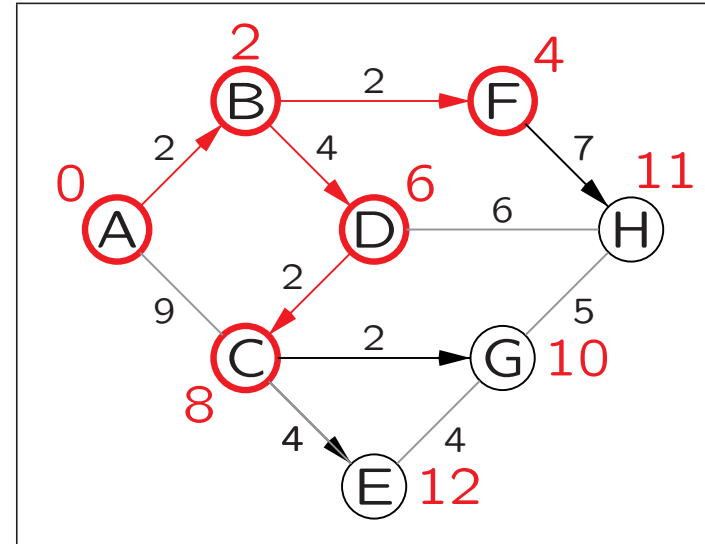
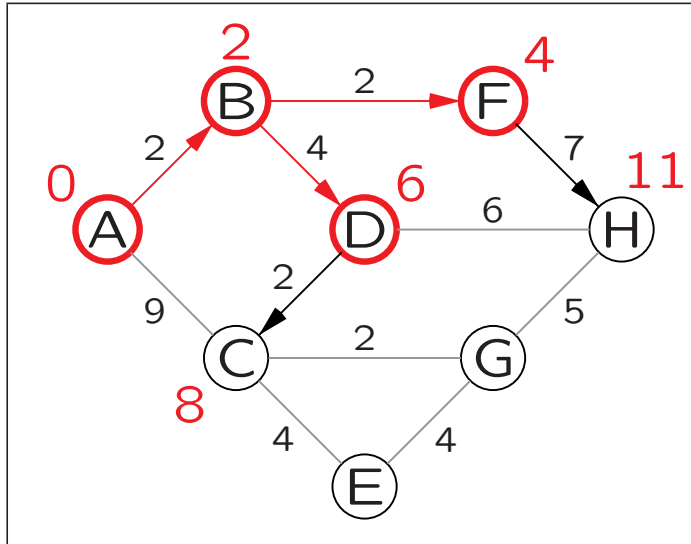


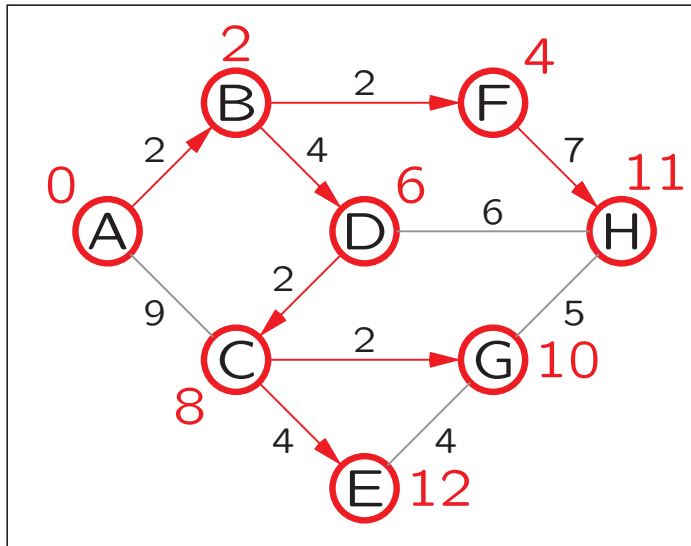
Elfde college algoritmiek

29 april 2016

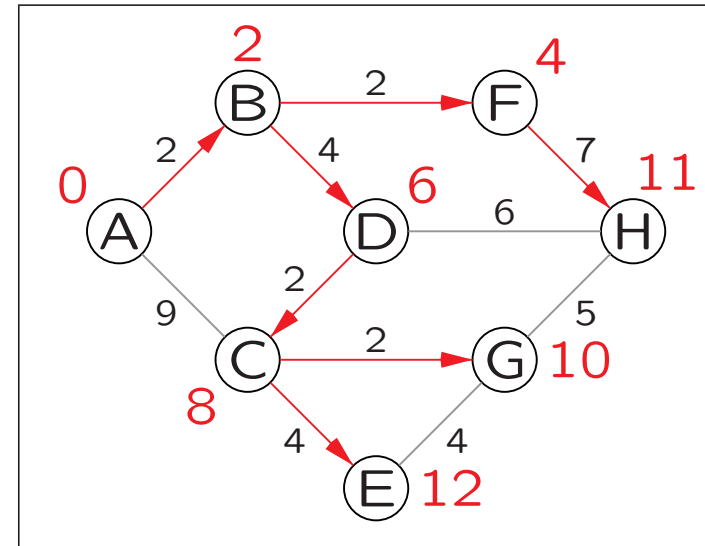
Algoritme van Dijkstra,
Branch & Bound







Het algoritme is klaar:
alle knopen gehad



Alle kortste paden vanuit
A met hun lengtes

```
// invoer: samenhangende gewogen graaf  $G = (V, E)$  en startknoop  $s$   
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit  $s$  bevat;  
// na afloop is  $\text{pad}[v] =$  de lengte van een kortste pad van  $s$  naar  $v$ 
```

```
for  $v \in V$  do  
     $\text{pad}[v] := \infty$ ;  
od  
 $\text{pad}[s] := 0$ ;  
 $U := \emptyset$ ;  
  
while ( $U \neq V$ ) do  
    vind knoop  $v^* \in V \setminus U$  met  $\text{pad}[v^*]$  minimaal;  
     $U := U \cup \{v^*\}$ ;  
    for alle knopen  $v$  aangrenzend aan  $v^*$  do  
        if  $\text{pad}[v^*] + \text{gewicht}(v^*, v) < \text{pad}[v]$  then  
             $\text{pad}[v] := \text{pad}[v^*] + \text{gewicht}(v^*, v)$ ;  
        fi  
    od  
od
```

Complexiteit...

- In het algoritme bevat U steeds alle knopen waarvan de definitieve kortste afstand vanaf s reeds bepaald is. Voor deze knopen geeft het label $\text{pad}[v]$ al de definitieve kortste afstand aan. **Moet bewezen worden.**
- Voor de andere knopen w geldt na elke ronde (= doorgang door de while):

$$(\#) \text{pad}[w] = \min_{u \in U} \{ \text{pad}[u] + \text{gewicht}(u, w) \}^*$$

Dit volgt direct uit het algoritme.

- De volgende dichtstbijzijnde knoop v^* wordt gekozen uit de knopen uit $V \setminus U$ die direct grenzen aan U . Nadat deze gekozen is worden de labels aangepast, zodat $(\#)$ ook geldt voor de nieuwe U .
- Het is niet zo moeilijk dit algoritme aan te passen zodat ook de kortste paden zelf worden berekend. Sla direct na het aanpassen van het label van knoop v de nieuwe kandidaattak (v^*, v) op:

```
if  $\text{pad}[v^*] + \text{gewicht}(v^*, v) < \text{pad}[v]$  then  
     $\text{pad}[v] := \text{pad}[v^*] + \text{gewicht}(v^*, v);$   
    nieuwe kandidaattak voor  $v$ :  $(v^*, v)$   
fi
```

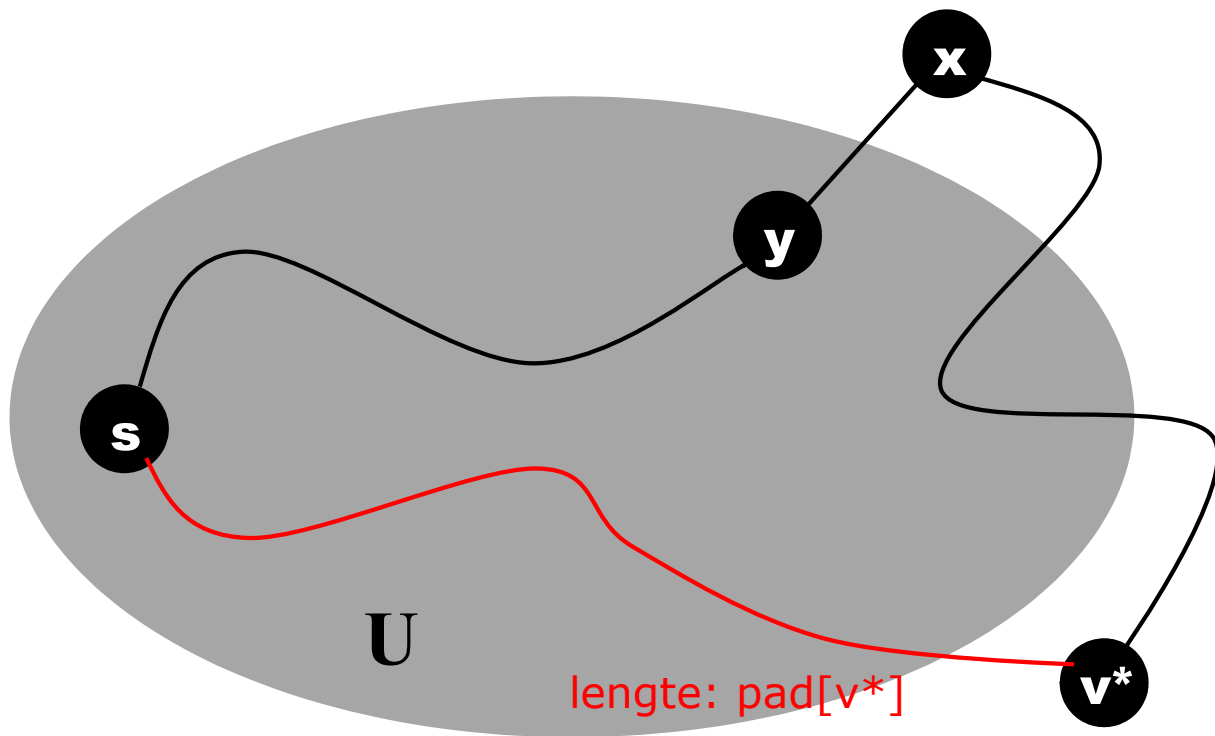
*Dit betekent dat $\text{pad}[w]$ voor deze knopen $w \notin U$ de lengte van een kortste pad van s naar w aangeeft via uitsluitend knopen van U .

Na elke ronde (dus ook na de laatste, wanneer $U = V$) van het algoritme van Dijkstra geldt:

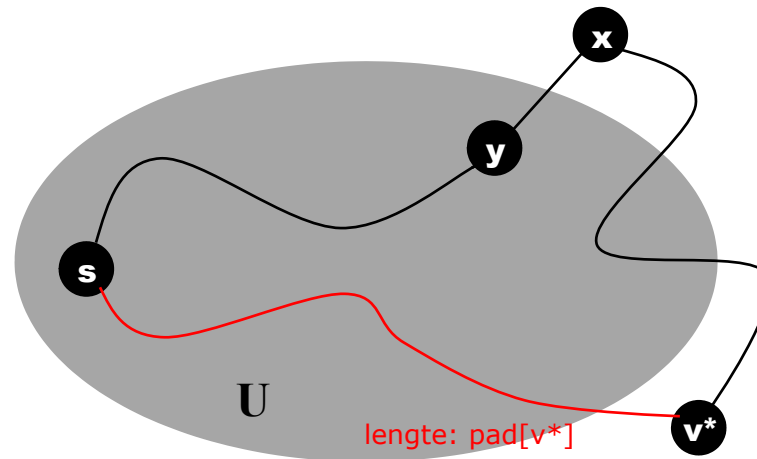
- U bevat alle knopen waarvan de definitieve kortste afstand vanaf s reeds bepaald is. Voor elke $v \in U$ geeft het label $\text{pad}[v]$ die kortste afstand aan.

Om dit te bewijzen moet je laten zien dat:

- wanneer v^* wordt toegevoegd aan U , $\text{pad}[v^*]$ inderdaad de lengte van het kortste pad van s naar v^* bevat



Bekijk, behalve het **pad ter lengte $\text{pad}[v^*]$** van s naar v^* via U een willekeurig ander pad van s naar v^* . Stel dat x de eerste knoop op dat pad is buiten U , en y de laatste knoop daarvóór. (Deze x kán gelijk zijn aan v^* .) Zij $d(s, y, x, v^*)$ de lengte van dat pad.



Dan geldt: $d(s, y, x, v^*) \geq d(s, y, x) \geq \text{pad}[x] \geq \text{pad}[v^*]$ omdat respectievelijk alle gewichten van de takken ≥ 0 zijn, ($\#$) geldt voor x en v^* gekozen was in deze ronde als “minimale” knoop.

Backtracking

- bouwt een oplossing component voor component op
- kijkt tijdens de stap-voor-stap constructie of de deeloplossing die bekeken wordt nog aan de gestelde restricties/eisen voldoet (kan voldoen)
- zo niet, breidt dan de deeloplossing niet verder uit en herziet de laatste keuze (backtrack!)
- houdt (alleen) het pad corresponderend met de (deel)oplossing die 'nu' wordt uitgebreid bij
- spaart soms veel werk uit vergeleken met exhaustive search
- toepasbaar op allerlei problemen waarbij oplossingen stap voor stap gegenereerd kunnen worden
- werking te beschrijven m.b.v. een state space tree

Optimalisatieprobleem: er wordt een oplossing gezocht met minimale of maximale

Terminologie:

- De functie/waarde die ge-optimaliseerd moet worden heet wel de **objectfunctie** (bijvoorbeeld de lengte van een Hamiltonkring)
- Een oplossing die voldoet aan de restricties van het probleem heet **feasible** (toelaatbaar)
- Een **optimale** oplossing is een/de toelaatbare oplossing met de beste waarde van de objectfunctie

Backtracking en optimalisatieproblemen

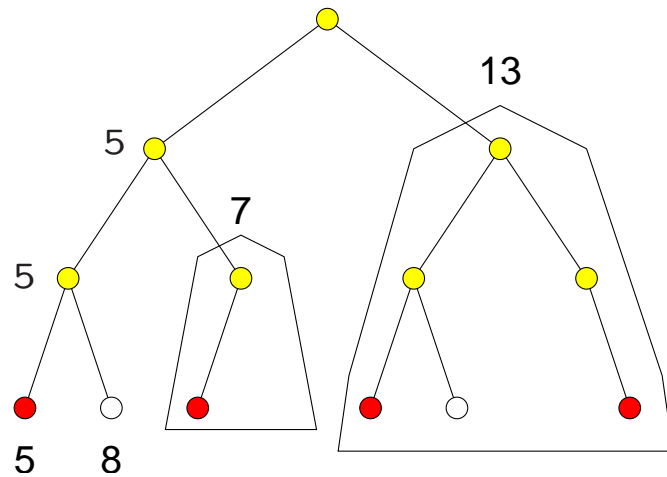
- Bij een minimalisatieprobleem kun je bijv. ook stoppen met uitbreiden wanneer je deeloplossing al een grotere waarde van de te optimaliseren functie heeft dan de huidige beste oplossing (die wordt dus bijgehouden/opgeslagen) en alleen maar nog groter kan worden. (Iets dergelijks bij een maximalisatieprobleem.)
- Als je snel een (bijna) optimale oplossing vindt, kunnen verdere deeloplossingen eerder worden afgekapt en ben je dus sneller klaar.
- Backtracking is het efficiëntst wanneer *een* oplossing gezocht wordt, dus voor optimalisatieproblemen is backtracking niet bij voorbaat de meest geschikte oplossingsmethode.

Assignmentproblem (toewijzingsprobleem)

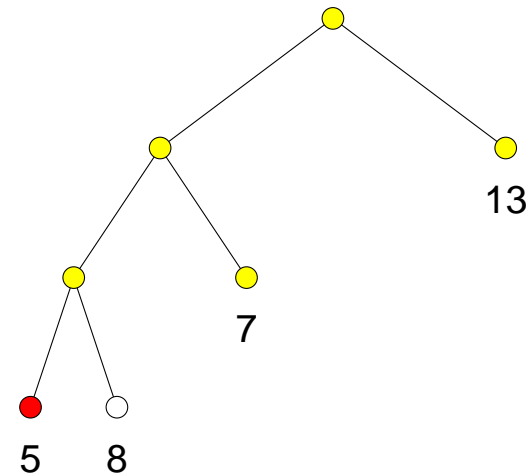
Gegeven n personen en n taken (jobs). Persoon i kan taak j doen voor $\text{kosten}[i][j]$ euro. **Gevraagd**: de/een toewijzing van de personen aan de jobs (één persoon per job en één job per persoon) met **minimale kosten**.

Voorbeeld:

	W	X	Y	Z
Alice	9	2	7	8
Bob	6	4	3	7
Carol	5	8	1	8
David	7	6	9	4



state space tree



gesnoeide boom

Witte knopen corresponderen met toelaatbare oplossingen; rode knopen met niet-toelaatbare oplossingen; de waarden bij de bladeren geven de waarde van de objectfunctie van de bijbehorende oplossing; de waarden bij de andere knopen geven een ondergrens op de te verwachten waarde van de objectfunctie; bij de knoop met grens 13 kan met een gesnoeid worden, die met 7 wordt nog bekeken, maar leidt tot een niet-toelaatbare oplossing

	W	X	Y	Z
Alice	9	2	7	8
Bob	6	4	3	7
Carol	5	8	1	8
David	7	6	9	4

Een ondergrens voor de kosten van een optimale oplossing:

(a) neem uit elke rij de kleinste waarde en tel die bij elkaar op: $2 + 3 + 1 + 4 = 10$

(b) neem uit elke kolom de kleinste waarde en tel die bij elkaar op: $5 + 2 + 1 + 4 = 12$

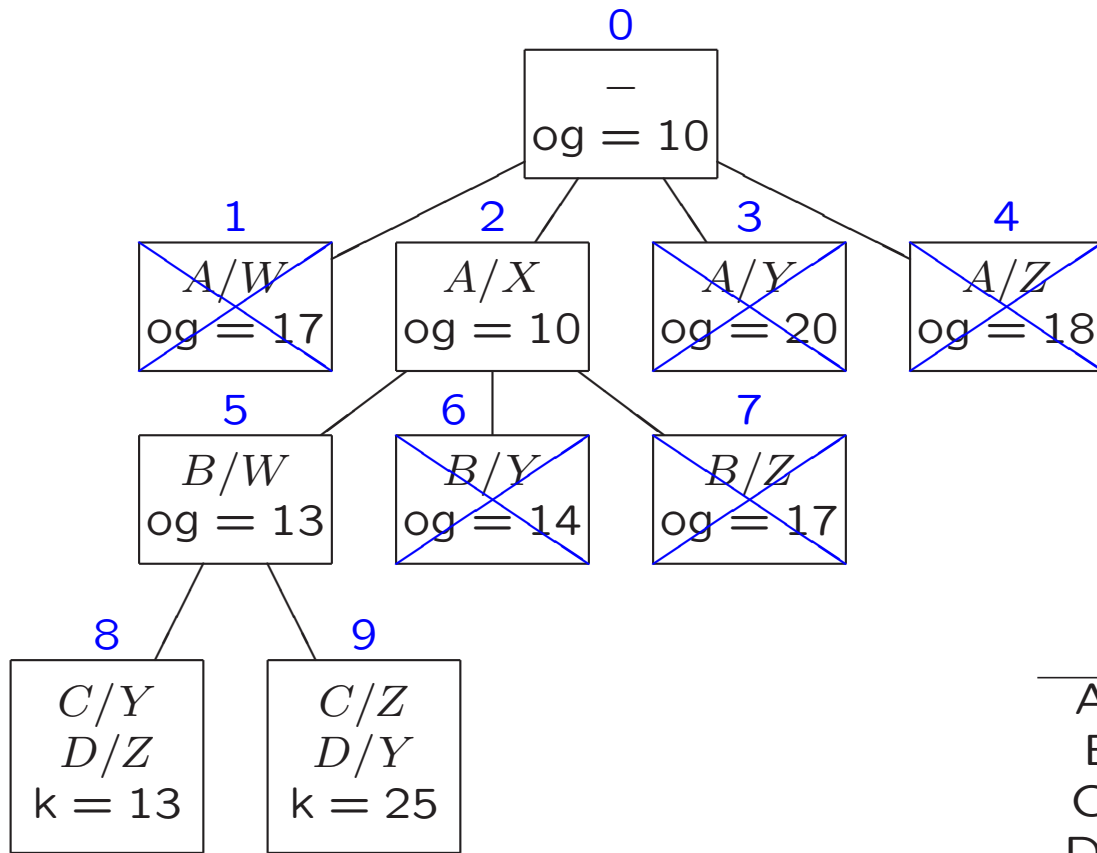
We genereren oplossingen door de personen een voor een aan een job te koppelen, en gebruiken daarbij de ondergrens volgens suggestie (a).

De **optimale oplossing** heeft totale kosten **13**:

Alice job X; Bob job W; Carol job Y; David job Z

Voor een willekeurige knoop/deeloplossing berekenen we de ondergrens op de te verwachten waarde van de objectfunctie door uit elke verdere rij de kleinste waarde van de nog beschikbare jobs te nemen en deze op te tellen bij de waarde van de deeloplossing. Voor de deeloplossing(en) die Alice aan job W koppelt zal die ondergrens bijvoorbeeld $9 + 3 + 1 + 4 = 17$ zijn. (Analoog voor kolommen: kies uit elke verdere kolom de kleinste waarde van de nog beschikbare personen(*).)

De volgorde waarin de knopen van de state space tree worden uitgebreid laten we afhangen van de berekende ondergrens. We kiezen de knopen met de beste (=laagste) ondergrens als eerste: dit lijkt de meest veelbelovende knoop. Deze strategie heet wel de **best-fit-first branch-and-bound**.



	W	X	Y	Z
Alice	9	2	7	8
Bob	6	4	3	7
Carol	5	8	1	8
David	7	6	9	4

Opgave: los het probleem op met de ondergrenzen berekend volgens (*).

Branch & bound

- is alleen toepasbaar op **optimalisatieproblemen**
- genereert oplossingen stap voor stap en houdt de tot dusver gevonden beste oplossing bij
- gebruikt voor elke deeloplossing (= knoop in de state space tree) een of andere **ondergrens** (minimalisatieprobleem) resp. **bovengrens** (maximalisatieprobleem) op de te verwachten waarde van de object-functie, met als doel
 - van deeloplossingen te kunnen bepalen dat ze niet verder bekeken hoeven te worden: **snoeien** (*)
 - de **zoekvolgorde** in de zoekruimte (state space tree), dus de volgorde waarin knopen worden gegenereerd en verder bekeken, te leiden (**)

(*) zou bij backtracking ook kunnen, maar (**) niet of nauwelijks

Een branch and bound algoritme breidt een knoop (deeloplossing) niet verder uit als

- de waarde van de ondergrens (bovengrens) bij die knoop niet beter is dan de waarde van de tot dusver gevonden beste oplossing: als ondergrens \geq tot dusver gevonden minimale waarde, dan snoeien
- de deeloplossing niet meer voldoet aan de restricties (of niet meer uit te breiden is tot een toelaatbare oplossing)
- er nog maar één volledige, toelaatbare oplossing mogelijk is bij de deeloplossing (i.h.b. als deeloplossing zo'n volledige oplossing *is*); de waarde van deze ene oplossing wordt met beste oplossing tot nu toe vergeleken; update zonodig beste oplossing.

De volgorde waarin de knopen (deeloplossingen) worden uitgebreid hangt direct af van de berekende grenzen:

- er worden meerdere deeloplossingen tegelijk bijgehouden, dit in tegenstelling tot backtracking
- in elke stap wordt een van al deze deeloplossingen gekozen, en daarvan worden alle 1-staps-uitbreidingen (kinderen in de state space tree) bekeken en geëvalueerd (d.w.z. ondergrens/bovengrens bepaald)
- zinloze uitbreidingen worden meteen verworpen
- meestal wordt de deeloplossing gekozen die het meest veelbelovend lijkt: **best-fit-first branch-and-bound**
- bij minimalisatieproblemen (resp. maximalisatieproblemen) kiezen we de knoop met de laagste ondergrens (resp. hoogste bovengrens) als eerste

Los het toewijzingsprobleem op voor onderstaand voorbeeld met behulp van

1. backtracking (snoeien op de kosten van deeloplossingen (*))
2. branch and bound

en vergelijk de hoeveelheid snoeiwerk bij beide methoden, alsmede de volgorde waarin de knopen van de state space tree worden bekeken.

	W	X	Y	Z
Alice	4	7	3	5
Bob	6	2	9	1
Carol	3	9	5	3
David	1	1	1	8

(*) overigens kun je bij backtracking ook ondergrenzen berekenen zoals bij B&B, en die gebruiken om te snoeien; B&B vindt een optimale oplossing echter i.h.a. eerder

Gegeven n objecten, met gewicht w_1, \dots, w_n en waarde v_1, \dots, v_n , en een knapzak met capaciteit W .

Gevraagd: de meest waardevolle deelverzameling der objecten die in de knapzak past (dus met totaalgewicht $\leq W$).

Voorbeeld:

item	w	v	v/w
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

Maximaal gewicht $W = 10$

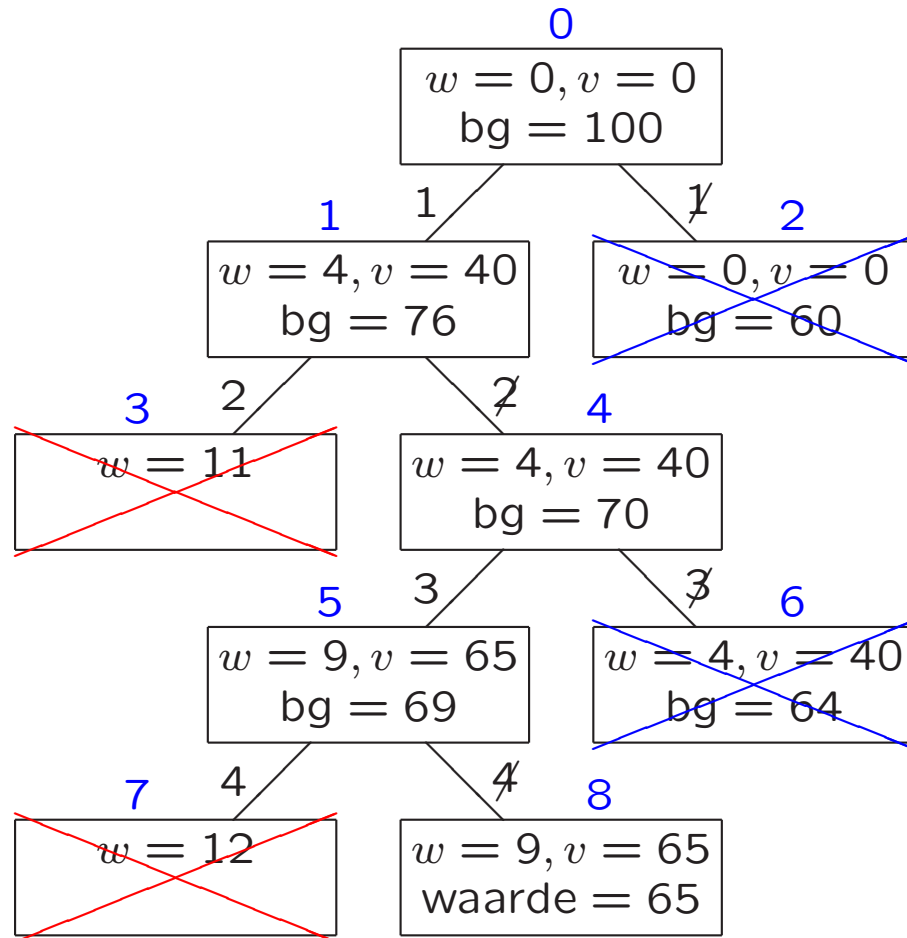
item	w	v	v/w
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

Opbouwen van de oplossing: in de i -de stap wordt object i wel of niet gekozen,

Een bovengrens voor de waarde van een optimale oplossing:

- Bij aanvang: $W * (v_1/w_1) = 100$;
- Na de i -de stap: $v + (W - w) * (v_{i+1}/w_{i+1})$, met v de totaalwaarde van de reeds gekozen objecten en w het totaalgewicht daarvan.

De optimale oplossing heeft gewicht 9 en waarde 65: $\{1, 3\}$.



item	w	v	v/w
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

$W = 10$

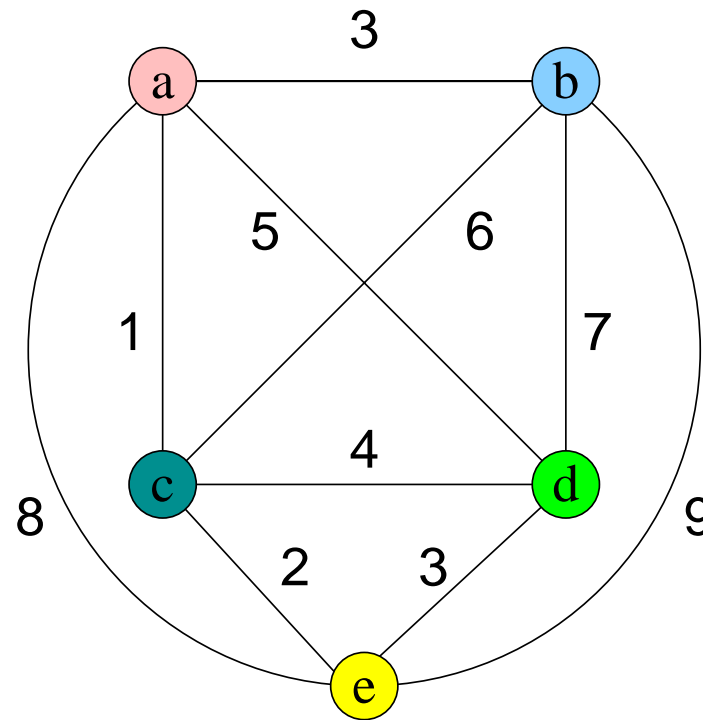
Zie ook exercise 12.2.5, Levitin.

Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

Gegeven n steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn.

Gevraagd: de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.

Ofwel: vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (complete) graaf. Het gaat hier om een ongerichte graaf.

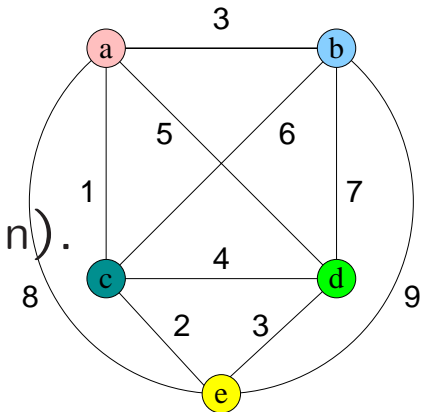


De optimale oplossing heeft lengte 16: a, b, d, e, c, a

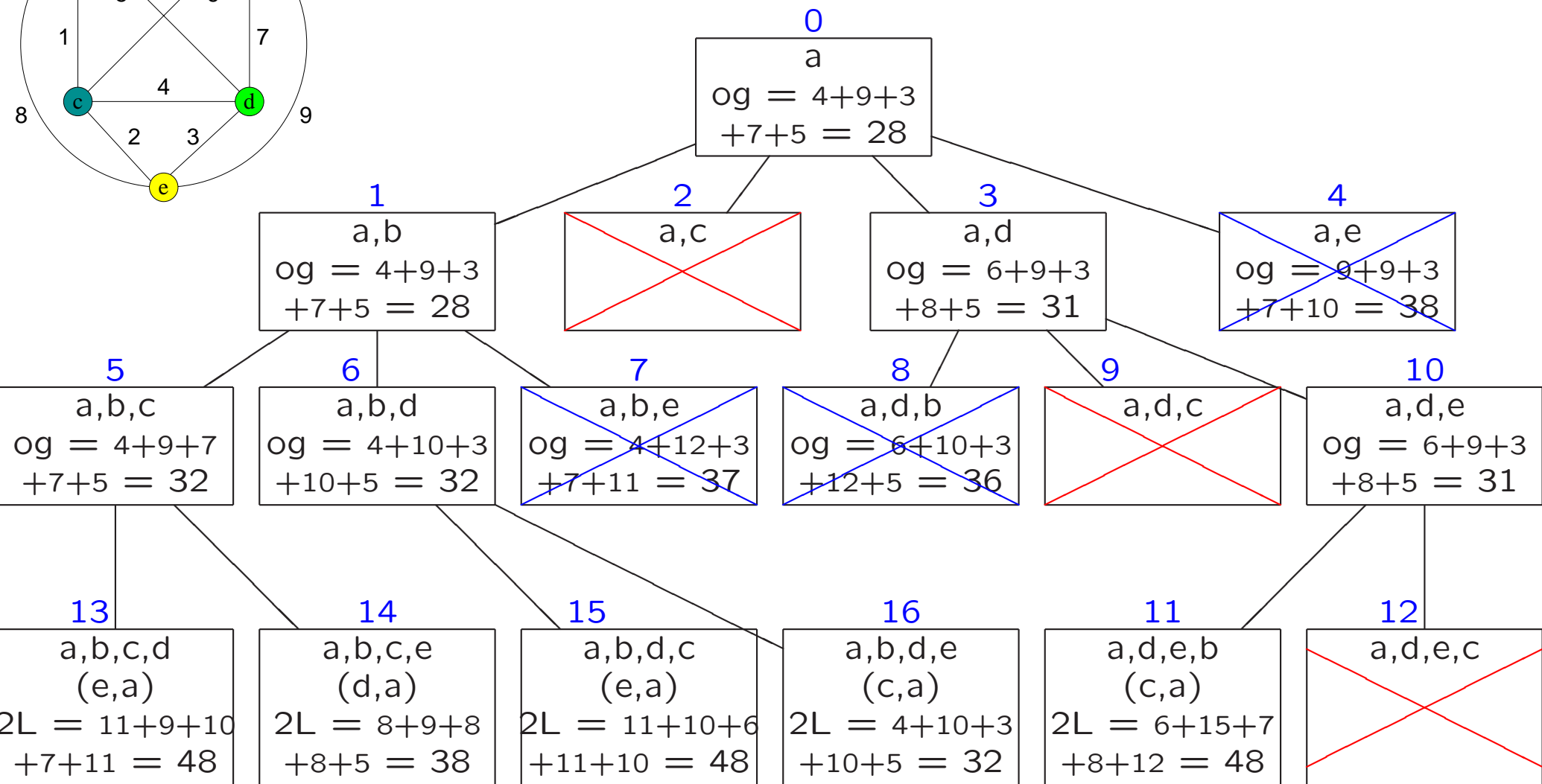
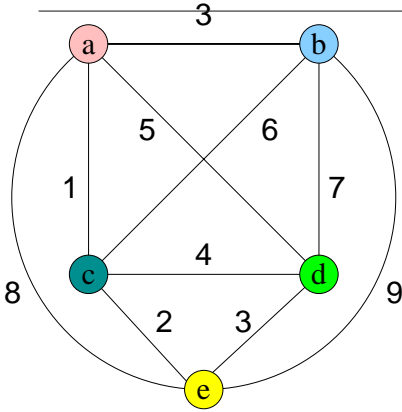
Mogelijke ondergrenzen voor de kosten van een optimale oplossing...

Mogelijke ondergrenzen voor de kosten van een optimale oplossing:

- eenvoudig: $n \times$ kortste afstand tussen twee knopen;
 $5 \times 1 = 5$ bij aanvang (analoog als reeds takken gekozen zijn).
- iets beter: de lengtes van de n kortste takken gesommeerd;
 $1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 13$ bij aanvang (analoog als reeds takken gekozen zijn).
- nog beter: som over alle knopen i van de afstanden van knoop i tot de twee dichtstbijzijnde knopen (inclusief al gekozen takken), en dat gedeeld door 2(*);
 $((1 + 3) + (3 + 6) + (1 + 2) + (3 + 4) + (2 + 3))/2 = 14$ bij aanvang.
 Opmerking: delen door 2 is niet nodig; je kunt ook $2 \times$ lengte minimaliseren (*).



tree



De volgende versnellingen zijn mogelijk:

- bekijk alleen Hamiltonkringen startend in a
immers, de kring c, d, e, a, b, c is hetzelfde als de kring a, b, c, d, e, a (en als d, e, a, b, c, d en e, a, b, c, d, e en als b, c, d, e, a, b).
- bekijk alleen situaties waarbij b wordt bezocht voor c
de kring a, c, d, b, e, a is dezelfde kring als a, e, b, d, c, a maar in omgekeerde volgorde. Beide hebben dezelfde lengte (want **deze graaf** is ongericht).

Zie vorige sheet: deeloplossingen beginnend met a, c zijn *ontoelaatbaar* (infeasible) na uitbreiding komt c voor b.

Deze knoop hoeft dus ook niet verder bekeken te worden; bijbehorende oplossingen komen we elders wel tegen. Bijv.: a, c, e, b, d, a vinden we terug als a, d, b, e, c, a, dus via knoop a, d.

- **Lezen/leren bij dit college:**
paragraaf 9.3, slides, paragraaf 12.2
- **Werkcollege:**
donderdag 12 mei 2016, 13:45–15:30, in zaal B01/B02
- **Opgaven:**
zie <http://www.liacs.leidenuniv.nl/~graafjmde/ALGO/>
- **Volgend college:**
vrijdag 13 mei 2016