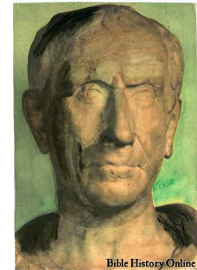


Zevende college algoritmiek

27 maart 2015

Verdeel & Heers

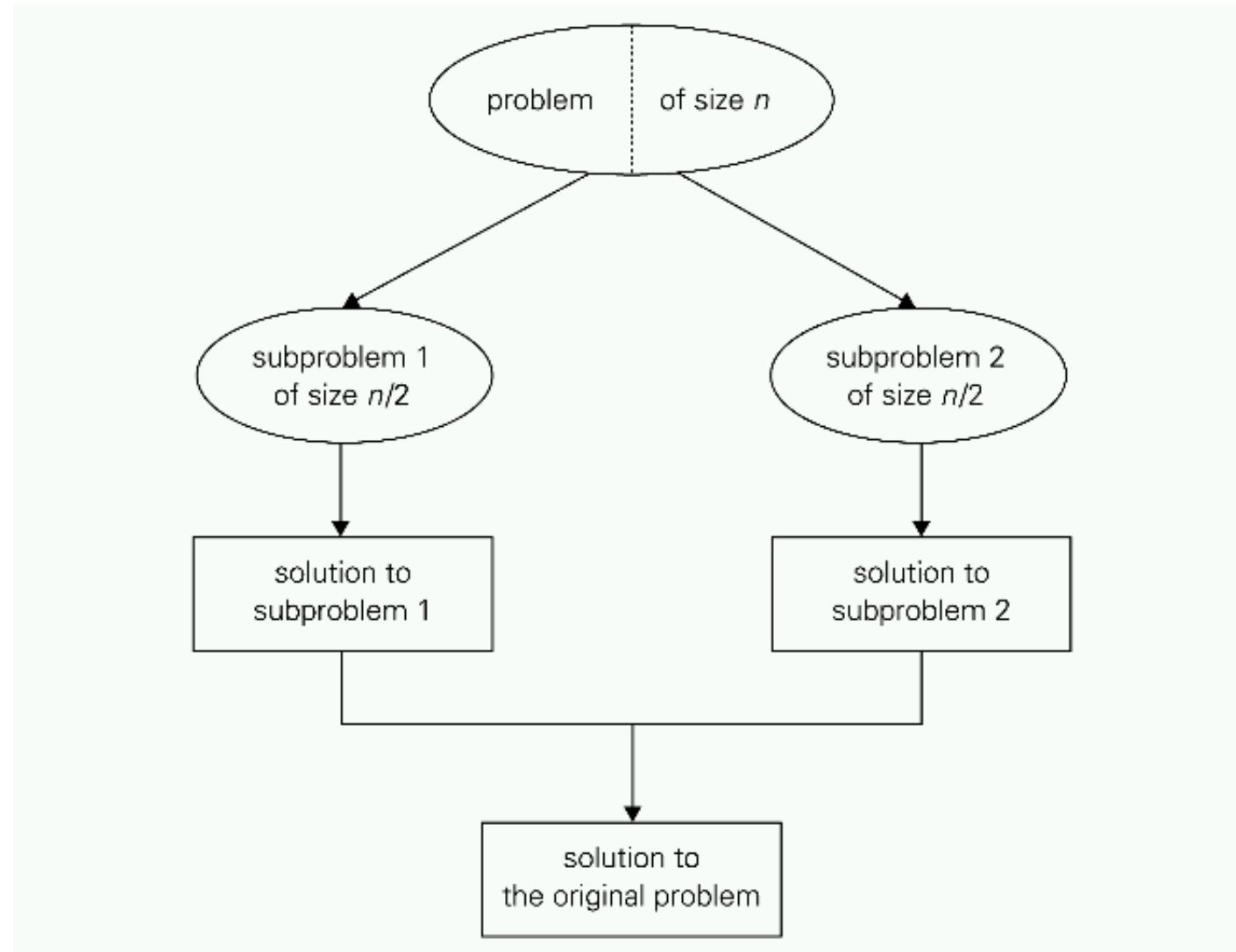
Divide and Conquer



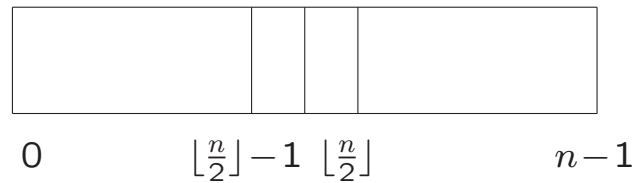
1. Verdeel een instantie van het probleem in twee of meer kleinere instanties van hetzelfde probleem
2. Los de kleinere instanties op: meestal **recursief**
3. Combineer deze twee oplossingen tot een oplossing van de oorspronkelijke (grotere) instantie

Opmerking: meestal wordt een probleeminstantie in twee ongeveer gelijke delen verdeeld.

Verdeel
en
heers
(vaak:
verdelen in
twee gelijke
delen)



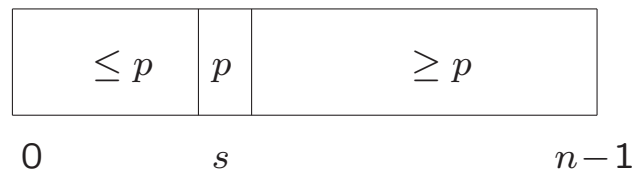
De methode verdeel en heers levert goede sorteeralgoritmen op. Zie het college van vorige week.



Mergesort

Mergesort

Mergesort



Quicksort

Quicksort

Quicksort

Mergesort:

- worst case complexiteit: $\Theta(n \log n)$
- extra geheugen: $O(n)$

Quicksort:

- worst case complexiteit: $\Theta(n^2)$ voor (o.a.) het reeds gesorteerde rijtje
- average case complexiteit: $\Theta(n \log n)$
- extra geheugen: in situ

Vermenigvuldiging van grote integers:

Het voor de hand liggende algoritme gebruikt voor de vermenigvuldiging van twee getallen bestaande uit n -cijfers (digits) n^2 digit-vermenigvuldigingen.

Voorbeeld ($n = 3$):

$$876 * 543 =$$

$$\begin{aligned} & (8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) * (5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) = \\ & 8 * 5 \cdot 10^4 + (8 * 4 + 7 * 5) \cdot 10^3 + (8 * 3 + 7 * 4 + 6 * 5) \cdot 10^2 \\ & \quad + (7 * 3 + 6 * 4) \cdot 10^1 + 6 * 3 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Vermenigvuldiging van grote integers:

Het kan echter op magische wijze beter (althans voor zeer grote getallen) via **divide and conquer**. Gebruik een generalisatie van de volgende truc (met $n = 2$):

$$c = a * b = (a_1 10^1 + a_0) * (b_1 10^1 + b_0) = c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0$$

$$c_2 = a_1 * b_1$$

$$c_0 = a_0 * b_0$$

$$c_1 = (a_1 + a_0) * (b_1 + b_0) - (c_2 + c_0)$$

Voor $n = 2$ zijn hier dus 3 i.p.v. 4 digit-vermenigvuldigingen gebruikt!

Voorbeeld $n = 8$:

$$87593264 * 49367251 =$$

$$(8759 \cdot 10^4 + 3264) * (4936 \cdot 10^4 + 7251) = c_2 10^8 + c_1 10^4 + c_0$$

$$c_2 = 8759 * 4936$$

$$c_0 = 3264 * 7251$$

$$c_1 = 8759 * 7251 + 3264 * 4936 =$$

$$(8759 + 3264) * (4936 + 7251) - (c_2 + c_0)$$

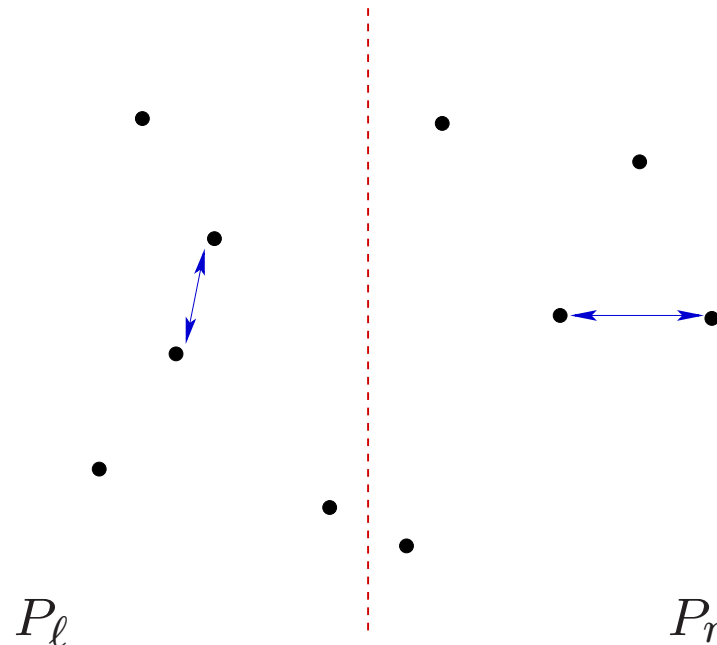
Het vermenigvuldigen van twee getallen bestaande uit $n = 2^k$ bits is zo teruggebracht tot 3 keer hetzelfde probleem voor $n/2 = 2^{k-1}$. Als $M(n)$ het aantal digitvermenigvuldigingen is voor $n = 2^k$, dan voldoet $M(n)$ aan:

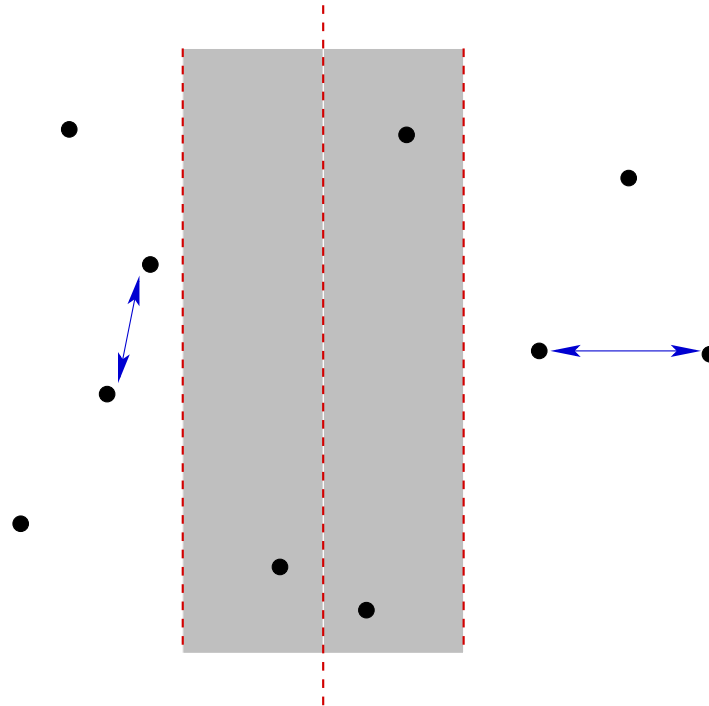
$$M(n) = 3 * M(n/2) \text{ als } n > 1; M(1) = 1,$$

en vinden we: $M(n) = n^{\lg 3} < n^{\lg 4} = n^2$.

Divide and Conquer:

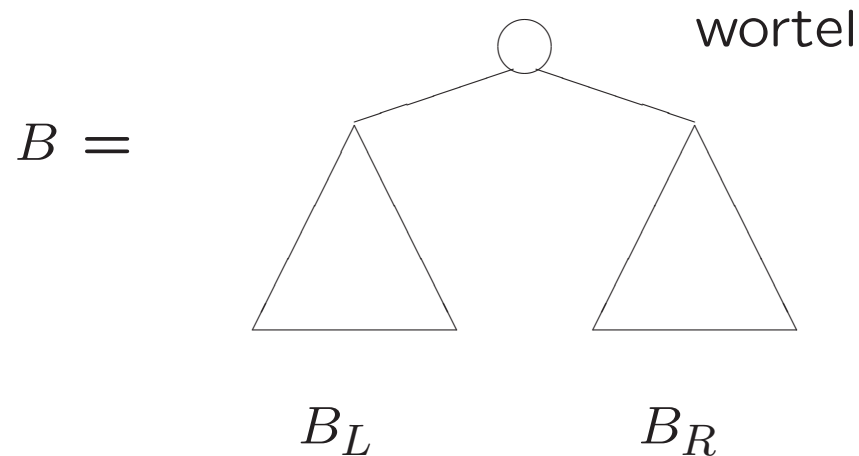
Verdeel de verzameling van n punten in twee verzamelingen P_ℓ en P_r van elk $\frac{n}{2}$ punten door een geschikte verticale lijn te trekken. Los beide deelproblemen (recursief) op en laat d de kleinst voorkomende afstand zijn tussen punten van P_ℓ resp. P_r .





Controleer of er binnen de strip ter breedte $2d$ rondom de scheidslijn tussen P_ℓ en P_r puntenparen (p, p') zijn met $p \in P_\ell$ en $p' \in P_r$ en onderlinge afstand kleiner dan d . Hiervoor blijken slechts $O(n)$ puntenparen bekeken te moeten worden. Dit levert een $O(n \lg n)$ algoritme op.

Een binaire boom B wordt **recursief** gedefinieerd als ofwel leeg, ofwel bestaande uit een knoop (de wortel) en twee disjuncte subbomen B_L en B_R die beide ook weer een binaire boom zijn: de **linkersubboom** en de **rechtersubboom**.



Bij (veel) problemen met binaire bomen ligt oplossen via divide & conquer dus voor de hand.

De **hoogte** van een binaire boom is het hoogste niveau dat voorkomt, waarbij de wortel per definitie op niveau 0 zit.

Voor de hoogte van een binaire boom B geldt dus:

$$\text{hoogte}(B) = 1 + \max \{ \text{hoogte}(B_L), \text{hoogte}(B_R) \}$$

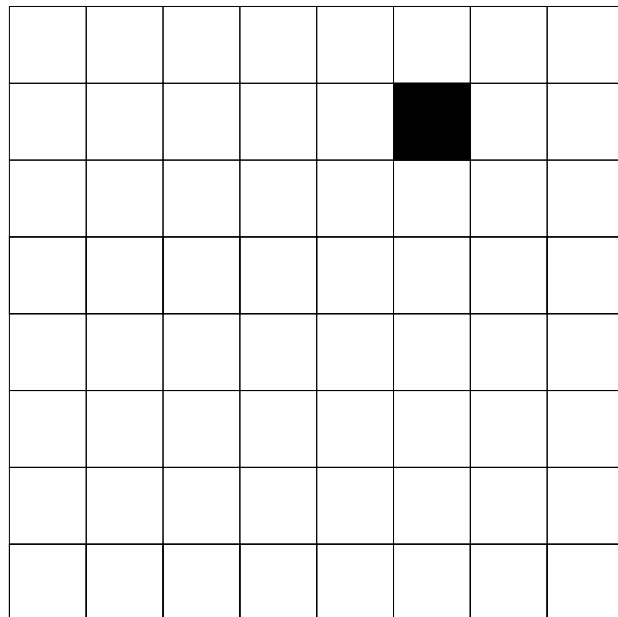
Verdeel en heers algoritme in C++:

```
int hoogte(knoop* root) {  
    if ( root == NULL )        // lege boom  
        return -1;  
    else  
        return (1+max(hoogte(root->links),hoogte(root->rechts)));  
} // hoogte
```

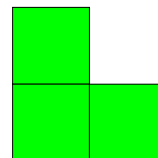
Zie verder college 2 en bijbehorende werkcollege.

Nog een leuk voorbeeld van de methode Divide and Conquer is de Tromino puzzel, Levitin 5.1.11.

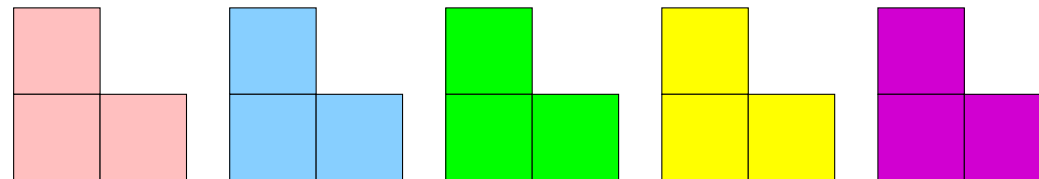
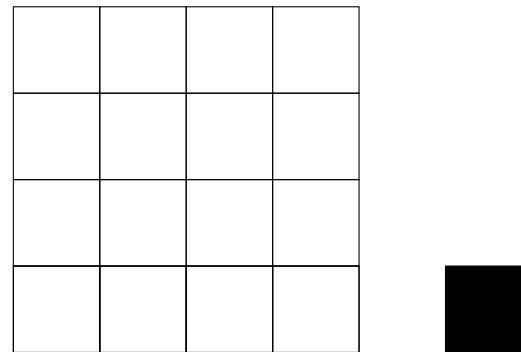
Bedek een $2^n \times 2^n$ schaakbord –waaruit één vakje mist– met tromino's.



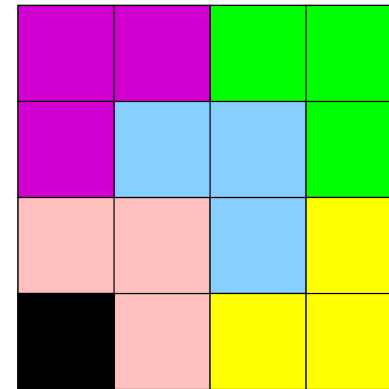
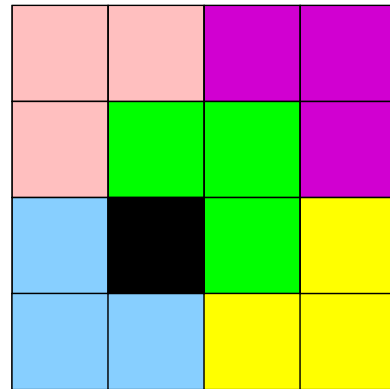
Het 8x8 geval



Het 4x4 geval: gegeven een 4x4 bord waaruit één vakje mist. Bedek het bord volledig (behalve het missende vakje), dus met 5 tromino's.

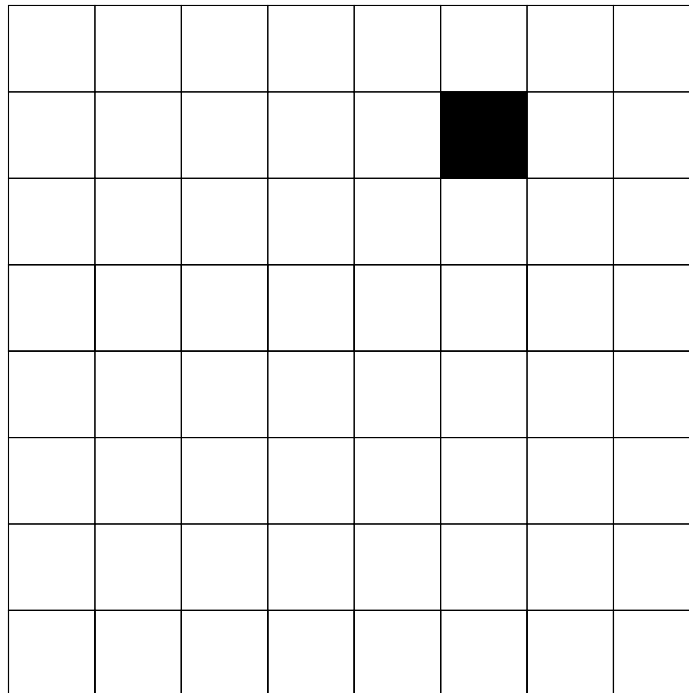


Het 4x4 geval: twee probleeminstanties met oplossing (= bedekking)

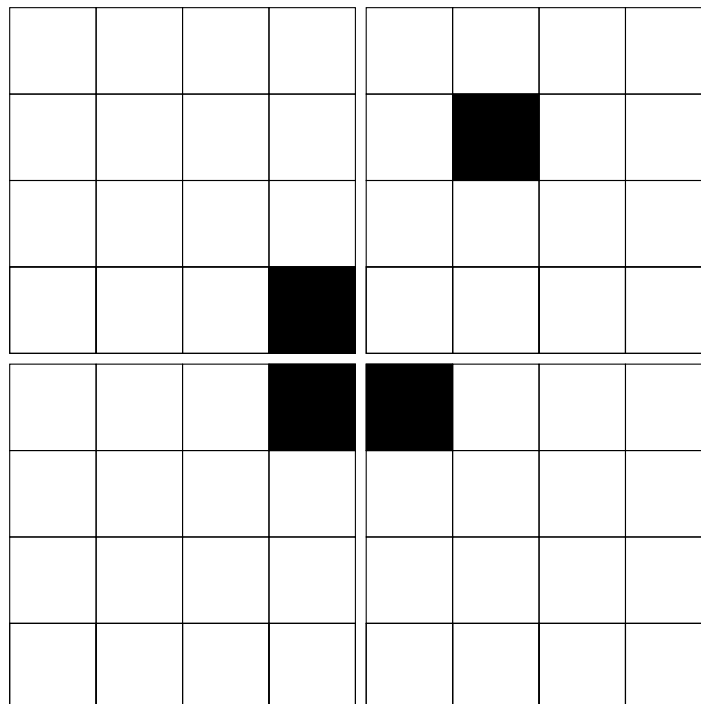


Het 8x8 geval: hoe vinden we een (de?) bedekking met tromino's?

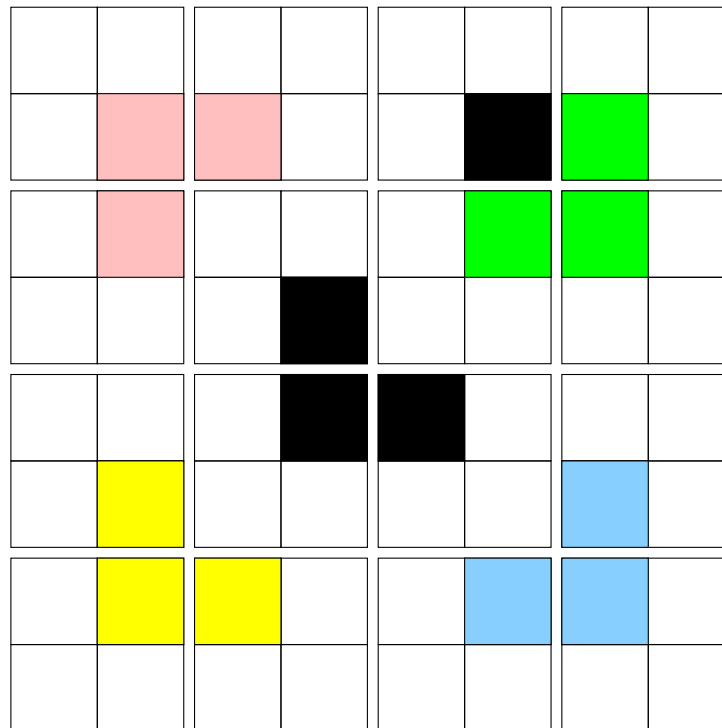
Bijvoorbeeld voor dit bord:



Leg een tromino in het midden, zodat in elk kwart één stuk mist of bedekt is. Het probleem is nu teruggebracht tot vier keer hetzelfde probleem, maar dan voor 4x4 borden.



Doe weer hetzelfde (recursie!) met de 4x4 borden.



Dit **divide and conquer** algoritme kun je op elk $2^n \times 2^n$ bord toepassen.

- Voor welke waarden van m zijn $m \times m$ schaakborden zeker niet te bedekken met tromino's?
- Geef een bedekking van het 5×5 schaakbord met het lege vakje bijvoorbeeld in het midden van de meest linker kolom.
- Geef een bedekking van het 8×8 bord van sheet 15, anders dan die is gevonden met behulp van het divide and conquer algoritme.

Decrease and Conquer

1. Reduceer een instantie van het probleem tot een kleinere instantie van hetzelfde probleem
2. Los de kleinere instantie op: vaak **recursief**
3. Breid de oplossing van de kleinere probleeminstantie uit tot een oplossing van de oorspronkelijke instantie

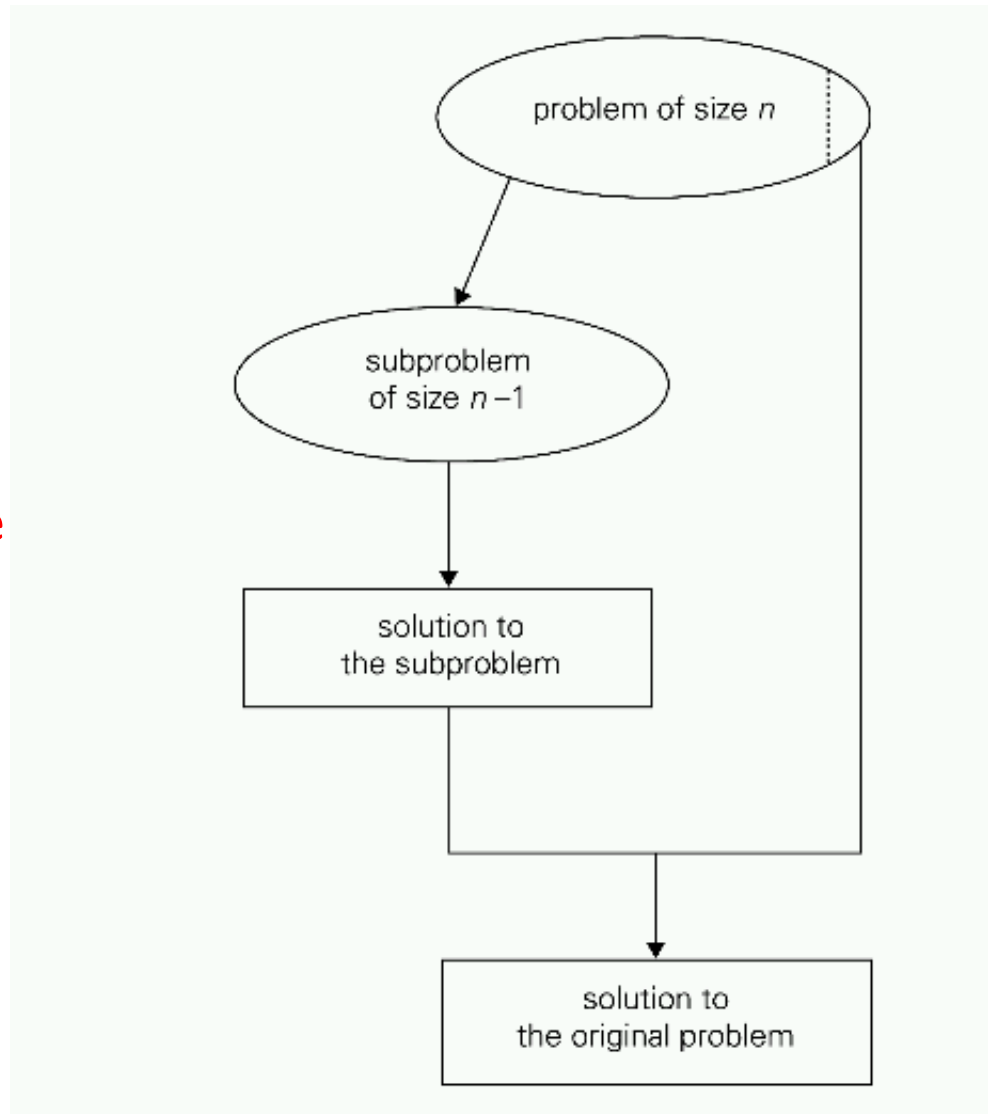
In het boek wordt onderscheid gemaakt tussen:

Decrease by one

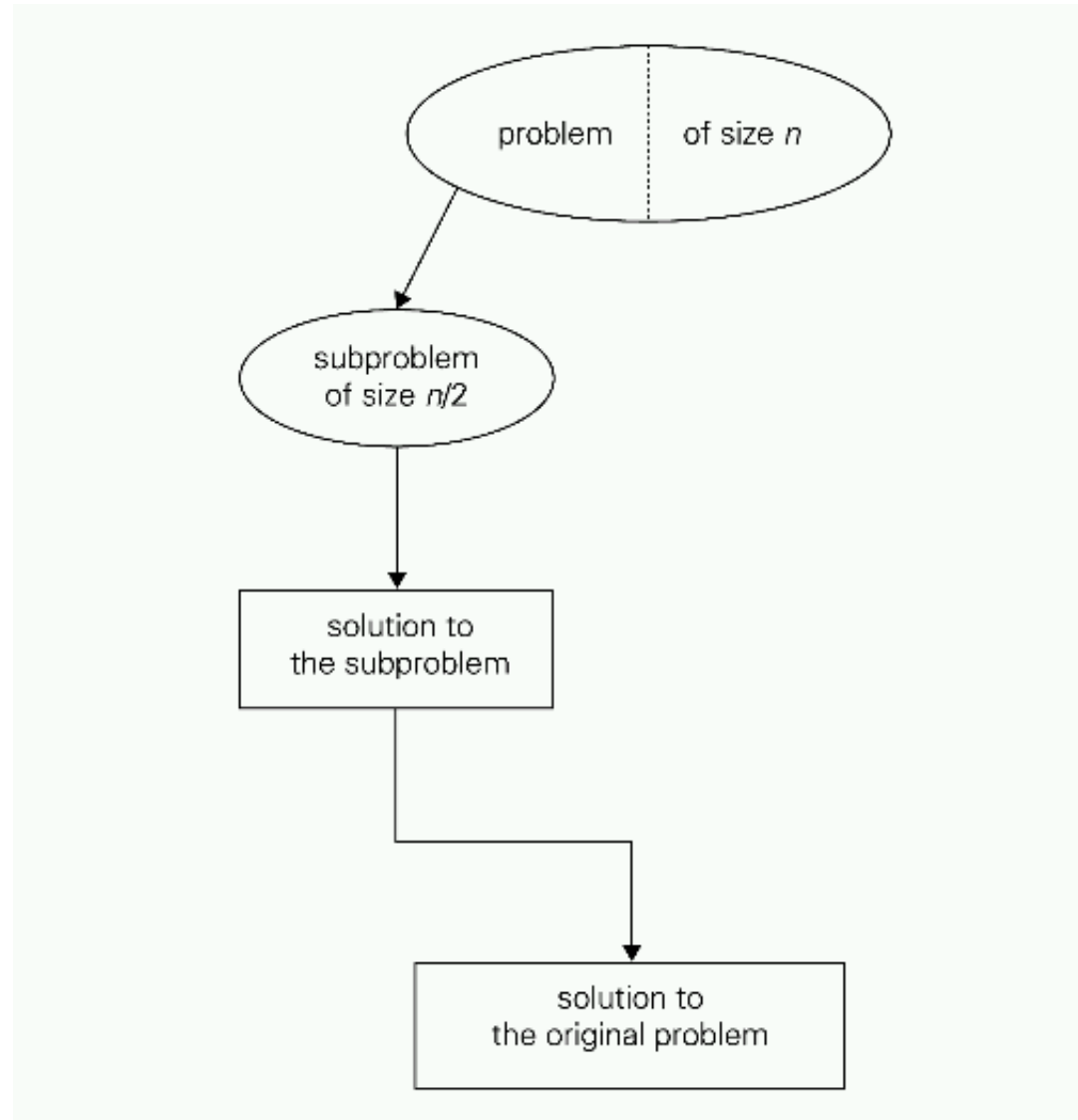
Decrease by a constant factor

Variable-size decrease

Decrease
by one



Decrease by a constant factor (decrease by half)



Insertionsort($A[0 \dots m - 1]$)::

if $m > 1$

Insertionsort($A[0 \dots m - 2]$); **DECREASE** by one

Voeg $A[m - 1]$ op de juiste plek in; **& CONQUER**

fi .

Invoegen van $A[m - 1]$ in het reeds gesorteerde voorstuk $A[0] \dots A[m - 2]$ door van rechts naar links $A[m - 1]$ te vergelijken met $A[i]$. Deze recursieve versie komt overeen met de iteratieve versie zoals bij **Programmeermethoden** behandeld (zie ook Levitin):

$A[0] \leq A[1] \leq \dots \leq A[i] \leq A[i + 1] \leq \dots \leq A[m - 3] \leq A[m - 2] || A[m - 1] \dots$

kleiner of gelijk $A[m - 1]$ \uparrow groter dan $A[m - 1]$

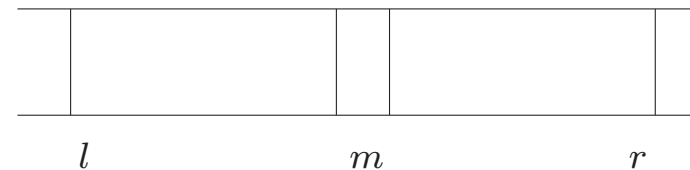
hier invoegen

Binair zoeken is een voorbeeld van decrease and conquer, **decrease by a constant factor**. Hier de iteratieve versie.

// invoer: oplopend gesorteerd array $A[0..n - 1]$, te zoeken waarde K
 // uitvoer: positie van K in A (-1 als K niet in A zit)

```

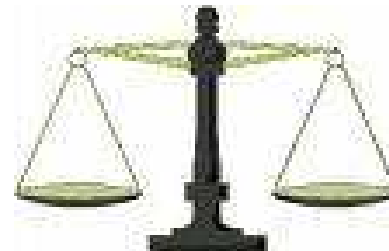
    l := 0; r := n - 1;
    while l ≤ r do
        m := ⌊ $\frac{l+r}{2}$ ⌋;
        if K = A[m] then // gevonden
            return m;
        else if K < A[m] then // links verder zoeken
            r = m - 1;
        else // rechts verder zoeken
            l = m + 1; fi
    fi
od
return -1;
    
```



altijd links óf rechts verdergaan

Fake coin probleem

Gegeven n identiek uitziende munten. Eén ervan is vals. Bekend is dat de valse munt lichter is dan de andere. Tevens is een balans beschikbaar. Bepaal door weging de valse munt.



Decrease by a constant factor (hier decrease-by-half): verdeel de munten in twee stapels van $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en —indien n oneven— een losse munt. Als de twee stapels even zwaar zijn (best case) is de losse munt de valse. Zo niet, dan bevindt de valse zich in de lichtste van de twee stapels.

Recurrente betrekking voor het aantal wegingen dat nodig is in de **worst case** om de valse munt te ontdekken:

$$W(n) = W(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 \text{ als } n > 1, W(1) = 0$$

Oplossing: $W(n) = \lfloor \lg n \rfloor$. (notatie: $\lg n = \log_2 n$)

Zie Levitin excercise 4.5.10 voor een efficiënter decrease by a constant factor algoritme.

Decrease-by-half

Vermenigvuldig twee positieve gehele getallen n en m op basis van:

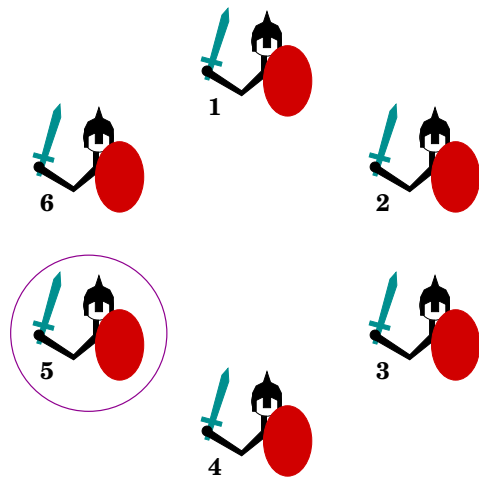
$$n * m = \frac{n}{2} * 2m \quad \text{als } n \text{ even}$$

$$n * m = \frac{n-1}{2} * 2m + m \quad \text{als } n \text{ oneven}$$

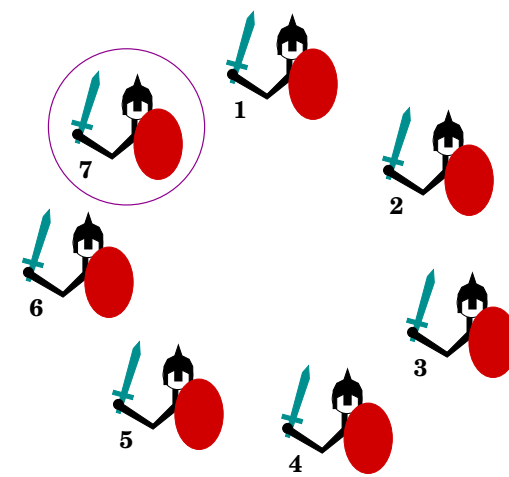
$$1 * m = m$$

Zie Levitin 4.4: Russian Peasant Multiplication

Josephus probleem: gegeven n personen, genummerd 1 t/m n , die in een cirkel staan. Elimineer, te beginnen bij persoon 2, telkens elke tweede persoon, totdat er nog maar één persoon, $J(n)$, over is. Bepaal wie deze overlevende is.



Josephus 6



Josephus 7

Decrease by a constant factor: maak één doorgang door de cirkel. Er zijn dan nog $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ overlevenden in de cirkel over, dus hetzelfde probleem maar gehalveerd.

Recurrente betrekking:

$$\begin{cases} J(1) & = 1 \\ J(2k) & = 2J(k) - 1 \\ J(2k + 1) & = 2J(k) + 1 \end{cases}$$

Oplossing:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

- **Lezen/leren bij dit college:**
Paragrafen 4 incl., 4.1, 4.4, 5.2-5 (geen Strassen, convex hull)
- **Werkcollege:**
donderdag 2 april 2015 in 302/304, 306/308:
tweede programmeeropdracht
donderdag 9 april in zaal B2 (opgaven op papier)
- **Tweede programmeeropdracht:**
zie <http://keep.liacs.leidenuniv.nl/~graafjmde/ALGO/>
- **Deadline** programmeeropdracht 2:
dinsdag 28 april 2015, 10:00 uur
- **Volgend college:**
vrijdag 10 april 2015, 11:15–13:00, zaal B2:
Dynamisch programmeren