

Vierde college algoritmiek

1 maart 2013

Complexiteit, Brute Force en
Exhaustive Search

Analyseren van algoritmen:

- Hoe werkt het algoritme?
- Werkt het op alle toegestane invoer correct?
- Hoeveel resources gebruikt het algoritme?
 - Processortijd
 - Geheugen

Uiteraard hangt de doorlooptijd van een algoritme af van de invoer. Sommige invoeren kosten meer tijd dan andere. Dit kan verschillende oorzaken hebben. Stel dat we een algoritme hebben dat controleert of een array allemaal verschillende getallen bevat. Dan hangt de doorlooptijd o.a. af van:

- De grootte van de invoer: 3 of 300 getallen
- De instantie (soort invoer): 5,5,5,5,5 of 1,2,3,4,5

Vaak zijn we geïnteresseerd in de **orde van grootte** van de looptijd: hoe neemt deze toe voor grotere invoer (zeg, langere rijtjes)?

We kunnen een algoritme testen door de doorlooptijd voor een groot aantal instanties te meten en uit te zetten tegen de invoergrootte n

Wat zijn nadelen van een dergelijke benadering?

Een andere methode om de looptijd van een algoritme te analyseren is om de **tijdcomplexiteit** van dat algoritme te bepalen: een functie die voor een algoritme bepaalt hoeveel werk er gedaan moet worden voor invoer ter grootte n in

- het slechtst mogelijke scenario
- het best mogelijk scenario
- het gemiddelde scenario (we praten dan over de te verwachte hoeveelheid werk, gemiddeld over alle mogelijke invoer)

Complexiteit (= tijdcomplexiteit) van een algoritme:

- = hoeveelheid werk verricht door het algoritme
- hangt meestal af van de grootte van de invoer: hoe groter de invoer, hoe groter de complexiteit
- wordt bepaald door het aantal keer dat de **basisoperatie** wordt uitgevoerd
- het belangrijkste is de (asymptotische) groei
- wordt vaak uitgedrukt in **O-notatie** (orde van grootte)
- hangt vaak ook af van het soort invoer: **worst case, best case, average case**

Voorbeeld 1:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals  
// uitvoer: de grootste waarde
```

```
max := a[0];  
for  $i := 1$  to  $n - 1$  do  
    if (  $a[i] > \text{max}$  ) then  $\leftarrow$  basisoperatie  
        max :=  $a[i]$ ;  
    fi  
od  
return max;
```

Complexiteit: $C(n) = n - 1 \in \Theta(n)$

Voorbeeld 2:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals
// uitvoer: true als alle  $n$  waarden verschillen

  for  $i := 0$  to  $n - 2$  do
    for  $j := i + 1$  to  $n - 1$  do
      if (  $a[i] = a[j]$  ) then  $\leftarrow$  basisoperatie
        return false; fi
    od
  od
return true;
```

Best case complexiteit: $B(n) = 1 \in \Theta(1)$

Worst case complexiteit:

$$W(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n - 1 - i) = \frac{1}{2}n(n - 1) \in \Theta(n^2)$$

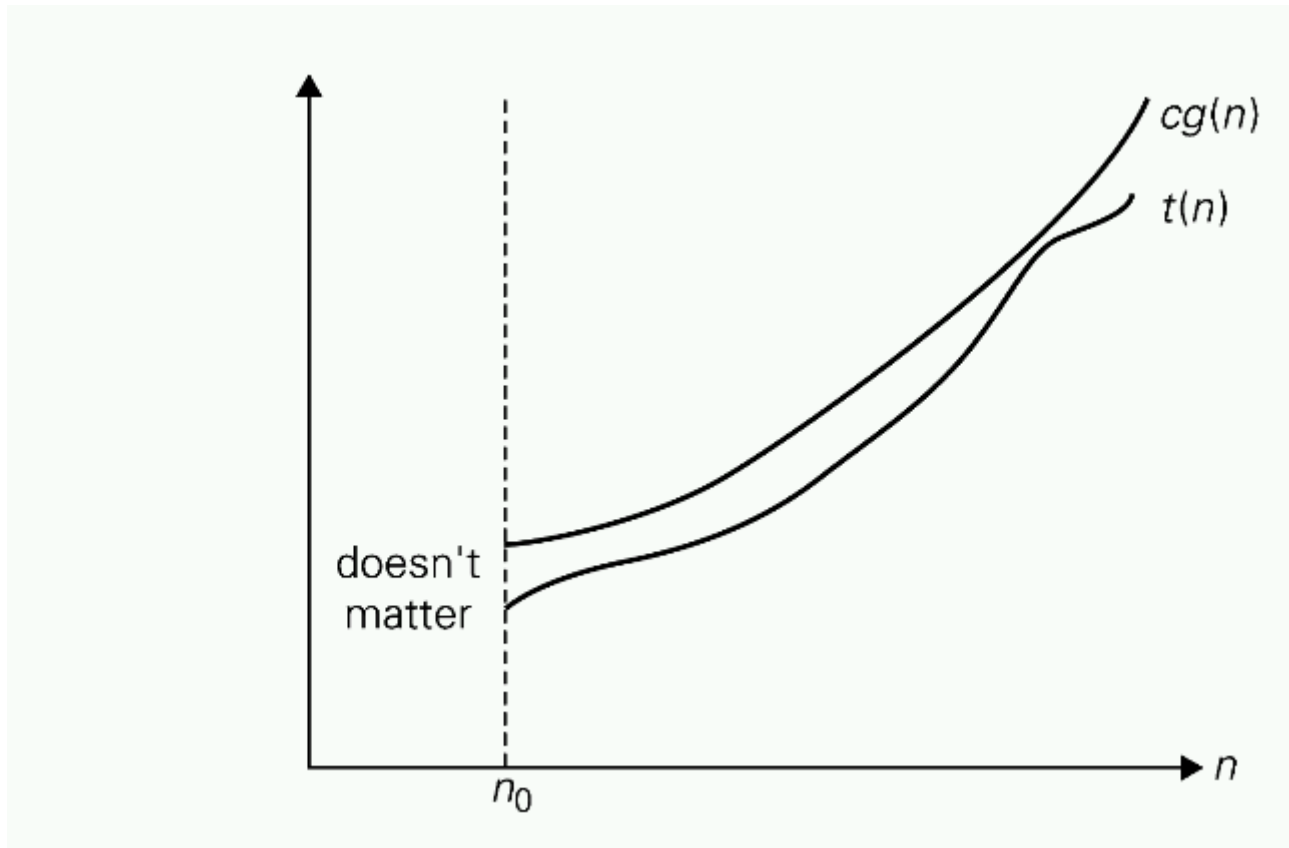
O-notatie beschrijft het asymptotisch gedrag:

$$f \in O(g) \iff \exists c > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0: \\ f(n) \leq c \cdot g(n)$$

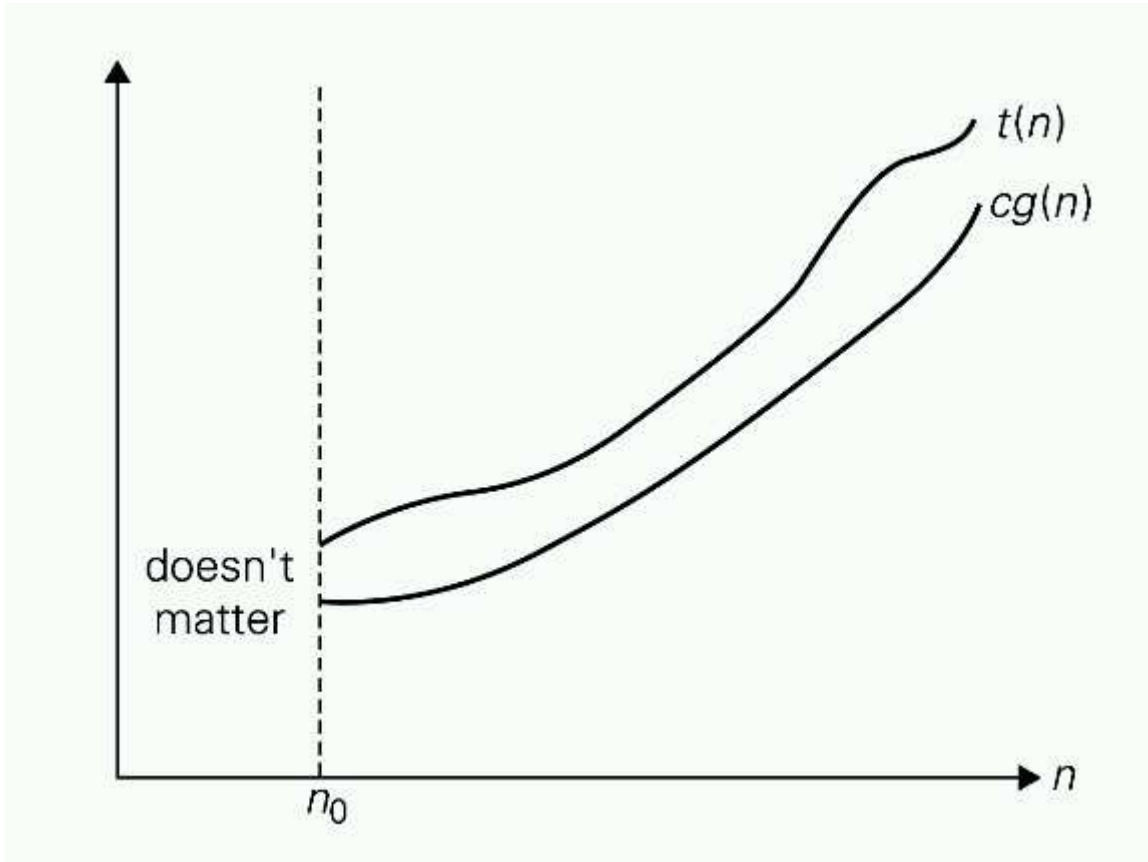
$$f \in \Omega(g) \iff \exists c' > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0: \\ f(n) \geq c' \cdot g(n)$$

$$f \in \Theta(g) \iff \exists c_1, c_2 > 0 \text{ en } \exists n_0 \geq 0 \text{ zodat } \forall n > n_0: \\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

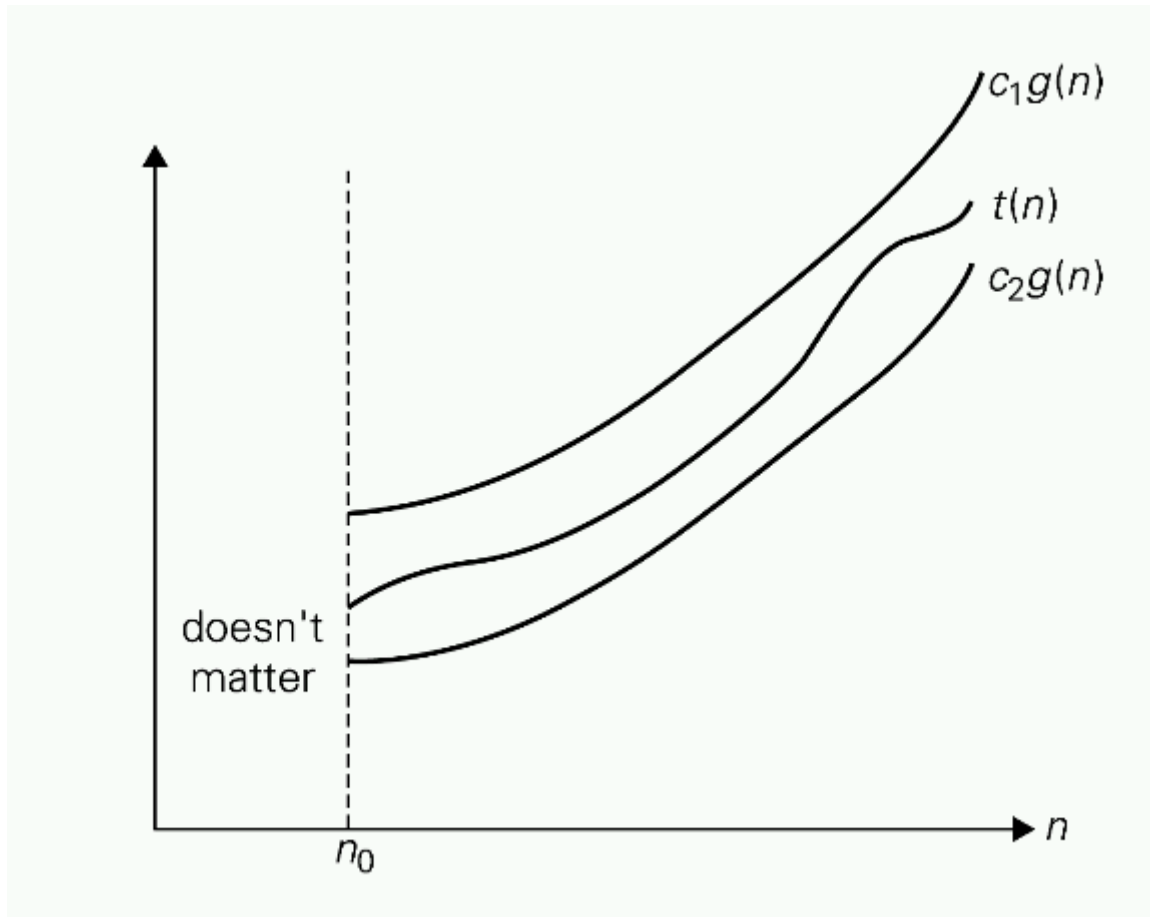
Aangezien zowel f als g in onze toepassingen de complexiteit van een algoritme voorstelt is hier steeds $f > 0$ en $g > 0$.



$t \in O(g)$: $t(n)$ groeit niet sneller dan $g(n)$



$t \in \Omega(g)$: $t(n)$ groeit minstens zo snel als $g(n)$



$t \in \Theta(g)$: $t(n)$ groeit even snel als $g(n)$

Stelling:

$$(1) \quad 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \iff f \in \Theta(g)$$

f en g zijn van dezelfde orde (groeien even snel)

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f \in O(g), \text{ maar } f \notin \Theta(g)$$

f gaat echt minder snel naar ∞ dan g

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff g \in O(f) \text{ maar } g \notin \Theta(f)$$

f gaat echt sneller naar ∞ dan g

| | | | | | |
|--------------------|------------|------------|-------------|-------------|----------------|
| N | 10 | 50 | 100 | 300 | 1000 |
| $\log_2 N$ | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 |
| $5N$ | 50 | 250 | 500 | 1500 | 5000 |
| $N \cdot \log_2 N$ | 33 | 282 | 665 | 2469 | 9966 |
| N^2 | 100 | 2500 | 10.000 | 90.000 | 7 cijfers |
| N^3 | 1000 | 125.000 | 7 cijfers | 8 cijfers | 10 cijfers |
| 2^N | 1024 | 16 cijfers | 31 cijfers | 91 cijfers | 302 cijfers |
| $N!$ | 7 cijfers | 65 cijfers | 161 cijfers | 623 cijfers | onvoorstelbaar |
| N^N | 11 cijfers | 85 cijfers | 201 cijfers | 744 cijfers | onvoorstelbaar |

Ter vergelijking:

het aantal protonen in het heelal is een getal met 79 cijfers

het aantal microseconden sinds de Big Bang heeft 24 cijfers

(1) $n(n - 2) \in O(n^3)$; $n(n - 2) \in O(n^2)$; $n(n - 2) \in \Omega(n^2)$

(2) $n \in O(n^2)$, maar NIET $n \in \Theta(n^2)$

(3) $2^n \in O(3^n)$, maar NIET $2^n \in \Theta(3^n)$

(4) $(n^2 + 1)^{10} \in \Theta(n^{20})$

(5) $\sqrt{10n^2 + 7n + 3} \in \Theta(n)$

(6) $2n \log_2(n + 2)^2 + (n + 2)^2 \log_2(n/2) \in \Theta(n^2 \log_2 n)$

(7) $2^{n+1} + 3^{n-1} \in \Theta(3^n)$

(8) $\lfloor \log_2 n \rfloor \in \Theta(\log_2 n)$; $\log_{10} n \in \Theta(\log_2 n)$

(9) $2^n \in O(n!)$, maar NIET $2^n \in \Theta(n!)$

De volgende naamgeving wordt meestal gehanteerd:

| | |
|-----------------------------|-------------------|
| 1 | constant |
| $\log n$ | logaritmisch |
| n | lineair |
| $n \log n$ | n -log- n |
| n^2 | kwadratisch |
| n^α ($\alpha > 1$) | polynomiaal |
| 2^n | exponentieel |
| $n!$, n^n , ... | superexponentieel |

Voorbeeld 3:

```
// invoer: array  $a[0 \dots n - 1]$  bestaande uit  $n$  reals en  
//          een reeel getal  $k$   
// uitvoer: index  $i$  waarvoor  $a[i] = k$ ;  $-1$  als deze niet  
//          bestaat
```

```
 $i := 0$  ┌→ basisoperatie  
while (  $i < n$  and  $a[i] \neq k$  ) do  
     $i := i + 1$ ; od  
if (  $i < n$  )  
    return  $i$ ; fi  
return  $-1$ ;
```

best case/worst case/average case: ...

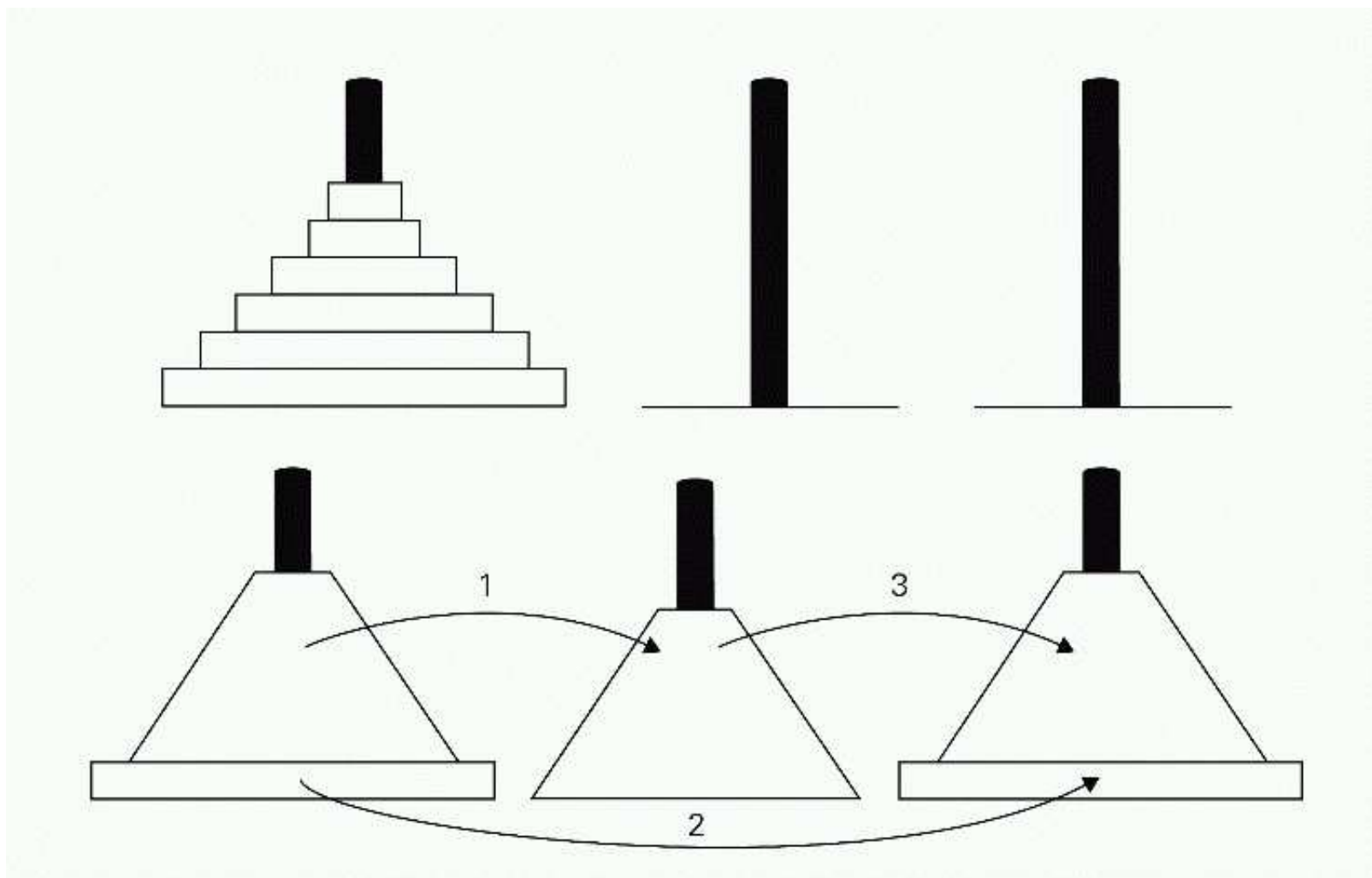
Recursief algoritme voor de berekening van $n!$:

```
int faculteit ( int n ) { // gebruikt:  $n! = n \cdot (n - 1)!$ 
    if ( n == 0 )
        return 1;
    else
        ↴————— basisoperatie
        return n*faculteit(n-1);
} // faculteit
```

$M(n)$ = aantal vermenigvuldigingen (= aantal recursieve aanroepen - 1) voldoet aan de **recurrente betrekking**:

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(n) = M(n - 1) + 1 \quad \text{voor } n > 0 \end{cases}$$

Oplossing: $M(n) = n \longrightarrow$ complexiteit faculteit is $\Theta(n)$.



Recursieve oplossing van de Torens van Hanoi

Een recursief algoritme voor het probleem van de Torens van Hanoi (zie [Programmeermethoden](#)):

```
// zet toren van n stuks (optimaal) van a naar b via c
// print de zetten
void zet (int n, int a, int b, int c) {
    if ( n > 0 ) {
        zet (n-1, a, c, b);
        cout << "zet van " << a << "naar " << b << endl;
        zet (n-1, c, b, a);
    } // if
} // zet
```

- n (het aantal schijven) is een maat voor de grootte van de invoer
- het verzetten van een schijf is de basisoperatie

Laat $M(n)$ = aantal zetten (= aantal recursieve aanroepen - 1), dan voldoet $M(n)$ aan de **recurrente betrekking**:

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(n) = 2M(n-1) + 1 \quad \text{voor } n > 0 \end{cases}$$

Oplossing (zie college):

$$M(n) = 2^n - 1 \longrightarrow \text{complexiteit zet is } \Theta(2^n).$$

Brute force: a straightforward approach, usually directly based on the problem statement and definitions.

Ofwel: los een probleem op via de meest voor de hand liggende (recht-toe-recht-aan) methode, meestal door eenvoudigweg de definitie van een oplossing te gebruiken. Vaak ook: alle mogelijkheden proberen.

Voorbeeld 1: vind de grootste gemene deler van twee getallen m en n door van alle mogelijke integers ≥ 2 (en $\leq \min(m, n)$) te proberen of ze zowel m als n delen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 2: los de DONALD + GERALD = ROBERT puzzel op door alle $9!$ (er was al gegeven dat $D = 5$) mogelijke antwoorden te proberen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 3: zoek een gegeven X in een array van n stuks door er van links naar rechts doorheen te lopen en X met alle n te vergelijken.

Zoek herhaald de volgende in grootte (hier de kleinste van de rest) en zet die op de juiste positie in het array. Dit sorteert het array oplopend.

```
for  $i := 0$  to  $n - 2$  do  
     $\text{min} := i$ ;  
    for  $j := i + 1$  to  $n - 1$  do  
        if  $A[j] < A[\text{min}]$  then  
             $\text{min} := j$ ;  
        fi  
    od  
    wissel( $A[i], A[\text{min}]$ );  
od
```

Aantal vergelijkingen: $\frac{1}{2}n(n - 1)$.

Probleem: bereken de waarde van het polynoom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ in het punt $x = x_0$ (Levitin, opgave 3.1.4)

Brute force algoritme (uit de definitie):

```
p := 0;
for i := n downto 0 do
  macht := 1;
  for j := 1 to i do
    macht := macht * x; // bereken  $x^i$ 
  od
  p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Complexiteit (aantal $*$ / $+$): $\Theta(n^2)$

Slimmer: we kunnen de efficiëntie eenvoudig flink verbeteren door van rechts naar links te evalueren en de x^i handiger te berekenen:

```
p := a[0];
macht := 1;
for i := 1 to n do
    macht := macht * x;
    p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Complexiteit: $\Theta(n)$;

Preciezer: $\#(*) = 2n$; $\#(+)$ = n

Dit kan nog beter (methode van Horner), echter niet in orde van grootte.

Gegeven een patroon (= string van m karakters) en een tekst (= string van $n \geq m$ karakters). **Gevraagd** de index van de beginpositie in de tekst waar het patroon voorkomt.

Brute force algoritme: patroon v.l.n.r. langs de tekst schuiven en steeds de overeenkomstige karakters uit tekst en patroon vergelijken

```
for  $i := 0$  to  $n - m$  do
   $j := 0$ ;
  while  $j < m$  and patroon[ $j$ ] = tekst[ $i + j$ ] do
     $j := j + 1$ ;
  od
  if  $j = m$  then
    return  $i$ ;
  fi
od
return  $-1$ ; // geen match gevonden
```

De werking van het algoritme geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld:

```

N O B O D Y - N O T I C E D - H I M
N O T
  N O T
    N O T
      N O T
        N O T
          N O T
            N O T

```

Het aantal vergelijkingen dat dit algoritme doet hangt af van de tekst en het patroon. In de **worst case** worden $m * (n - m + 1)$ vergelijkingen gedaan. Dit komt voor wanneer in elke i -stap het patroon helemaal (dus m vergelijkingen) vergeleken wordt met de tekst. De **complexiteit** van het algoritme is dus $O(n * m)$.

Opgave: geef een tekst en een patroon waarvoor het algoritme $m * (n - m + 1)$ vergelijkingen doet.

Opmerking: het kan beter (Boyer-Moore, Knuth-Morris-Pratt), maar voor “gewone-taal” teksten is het algoritme zo slecht nog niet.

Gegeven n punten $p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_n = (x_n, y_n)$.

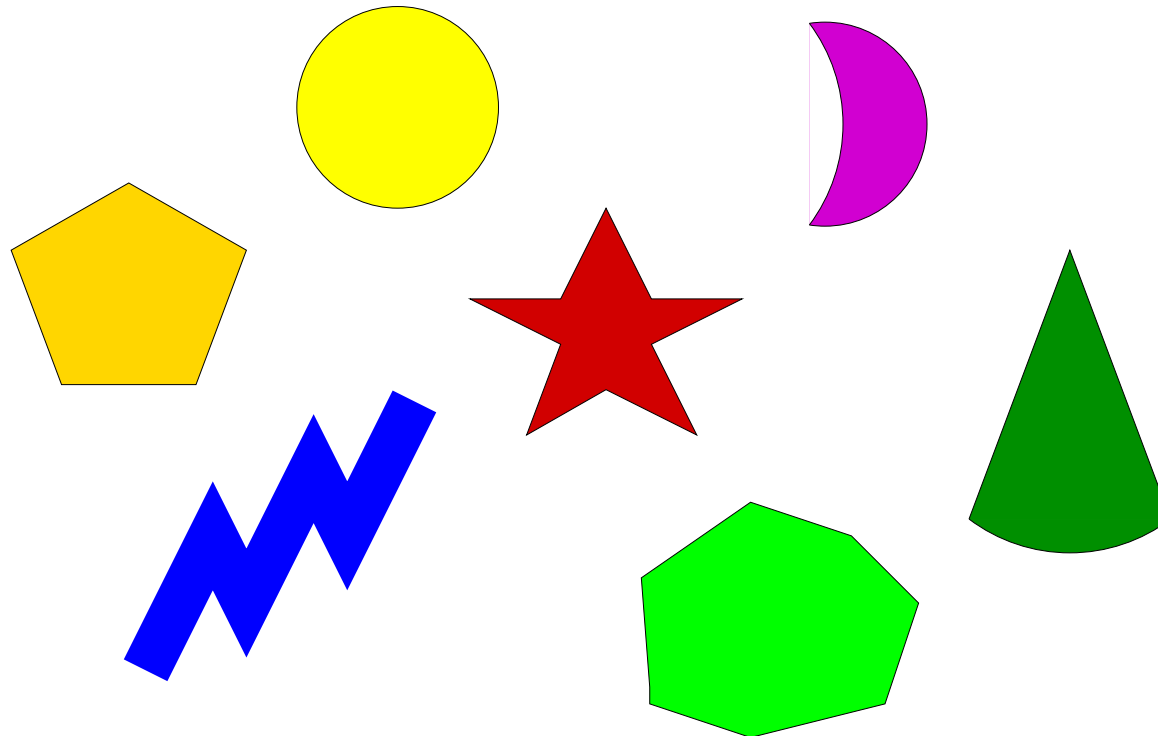
Gevraagd het/een tweetal punten dat het dichtst bij elkaar ligt. Afstandsmaat: $d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Brute force algoritme: alle paren (p_i, p_j) (met $i < j$) aflopen en hun onderlinge afstanden $d(p_i, p_j)$ vergelijken.

```
dmin := ∞;
for i := 1 to n - 1 do
  for j := i + 1 to n do
    d := (x_i - x_j)2 + (y_i - y_j)2;
    if d < dmin
      dmin := d; k := i; l := j;
    fi // (p_k, p_l) voorlopig closest pair
  od
od
```

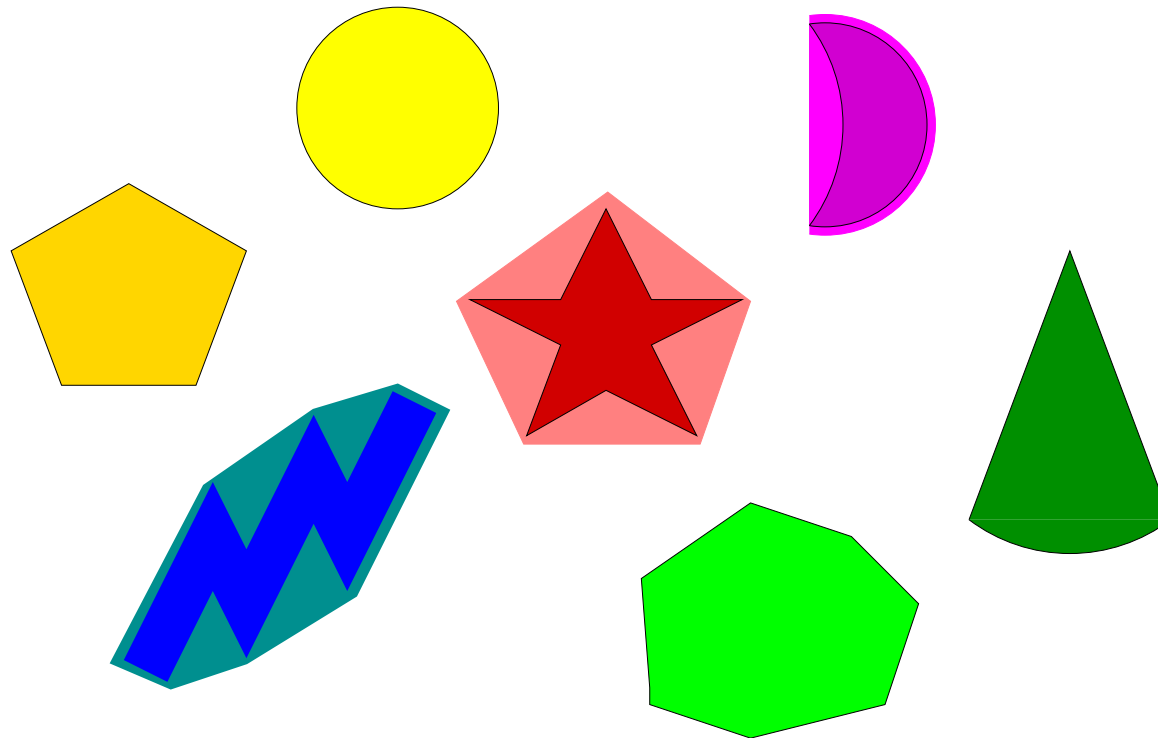
Complexiteit: $\frac{1}{2}n(n - 1) = \Theta(n^2)$

Een verzameling punten in het platte vlak heet **convex** als voor elk tweetal punten uit die verzameling geldt dat het verbindend lijnstuk ook weer in die verzameling ligt.



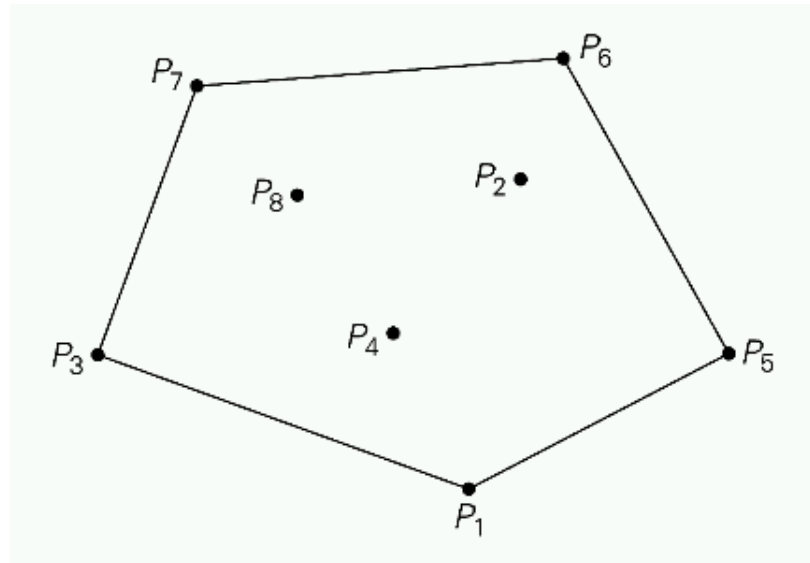
Convexe en niet-convexe vormen

De **convex hull** (convex omhulsel) van een verzameling S van punten in \mathbf{R}^2 is de kleinste convexe verzameling die S bevat.



Convexe omhulsels

Stelling: de convex hull van een verzameling S van $n > 2$ punten in \mathbf{R}^2 (niet alle op één lijn) is een convexe veelhoek (polygoon) met als hoekpunten enkele punten uit S .



De convex hull van de verzameling $\{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ is de convexe veelhoek met hoekpunten P_1, P_5, P_6, P_7 en P_3

We baseren ons brute force algoritme op de volgende observatie: een lijnstuk P_iP_j maakt deel uit van de rand van de convex hull van $\{P_1, P_2, \dots, P_8\}$ d.e.s.d.a. alle andere punten van de verzameling aan een en dezelfde kant van de lijn door P_i en P_j liggen.

Brute force: Ga voor elk tweetal punten $P_i = (x_i, y_i)$ en $P_j = (x_j, y_j)$ na of alle andere punten aan dezelfde kant van de lijn $(y_j - y_i)x + (x_i - x_j)y = x_iy_j - y_ix_j$ liggen. Zo ja, dan is P_iP_j dus deel van de convex hull.

Complexiteit: $O(n^3)$

Opmerking: het kan veel beter, namelijk $O(n \lg n)$

Brute force:

- **Voordelen:**

- algemeen toepasbaar
- eenvoudig
- levert voor een aantal belangrijke problemen (zoeken, patroonherkenning) een zeer behoorlijk algoritme op

- **Nadelen:**

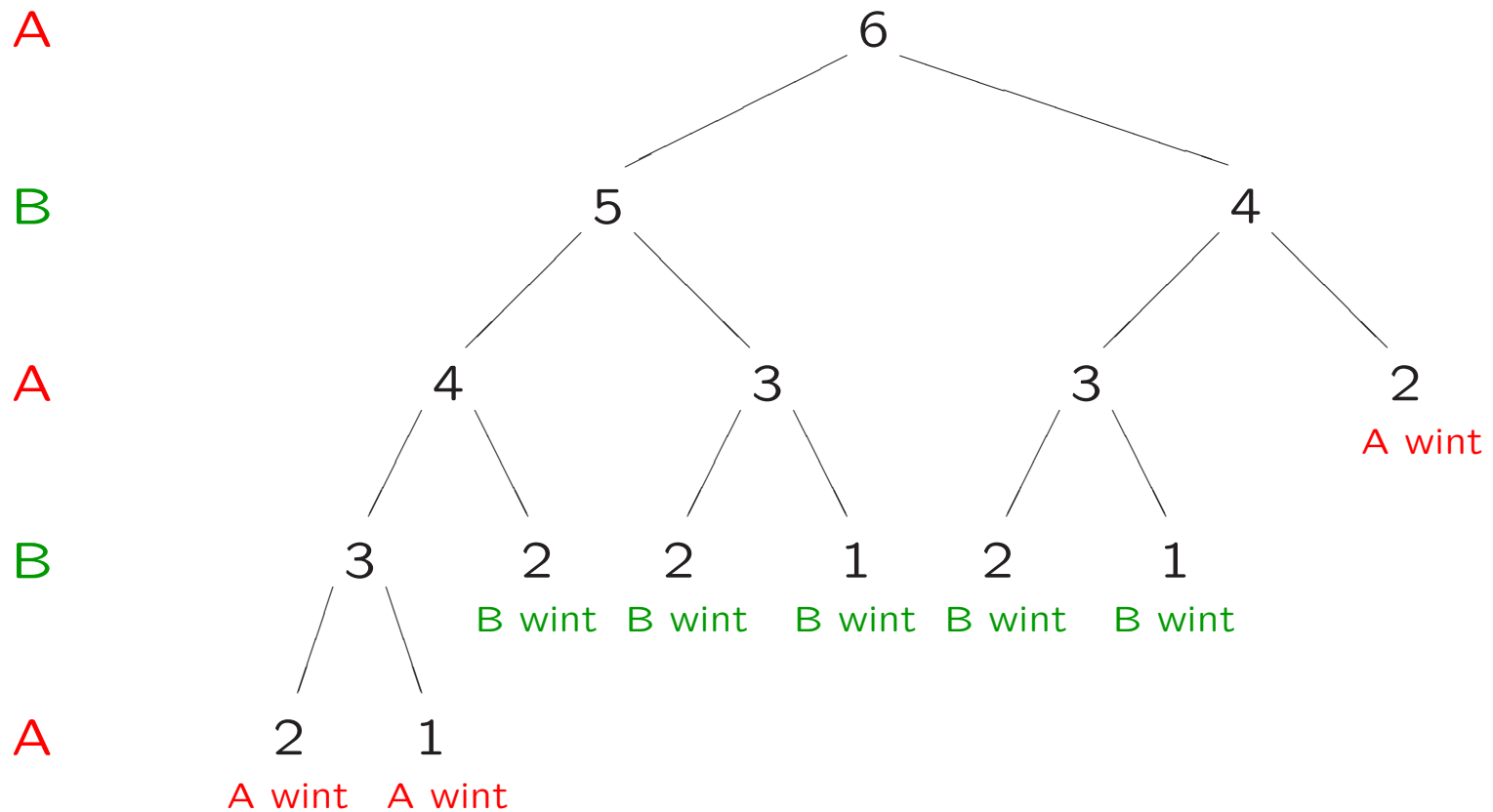
- levert meestal geen efficiënt algoritme op
- soms onacceptabel langzaam

Exhaustive search: brute force benadering voor problemen die te maken hebben met het vinden van een element met een speciale eigenschap binnen een verzameling van bijv. permutaties of deelverzamelingen of toestanden of ...

Methode:

- . construeer op een systematische manier alle kandidaat-oplossingen
- . evalueer elk van deze mogelijke oplossingen
- . retourneer de kandidaatoplossing met de gevraagde eigenschap (als die bestaat) (*)

(*) soms, zoals bij optimalisatieproblemen, *moet* je daartoe alle kandidaatoplossingen gezien hebben



Exhaustive search: doorloop (*als het ware*) de hele spelboom om te bepalen of een stand winnend is. Alle toestanden/alle spelverlopen worden zo bekeken.

Belangrijke observatie:

een stand is **winnend** voor degene die aan de beurt is,
dan en slechts dan als ten minste één van zijn directe
vervolgstanden **niet winnend** is voor de tegenstander

\Rightarrow RECURSIE

```
winnend(stand)::  
  
  if eindstand(stand) then  
    // makkelijk; bijv return false;  
  else  
    for alle mogelijke zetten i do  
      kopie := stand;  
      doezet(kopie,i);  
      if not winnend(kopie) then  
        return true;  
    od  
    return false;  
  fi
```

Zie ook Programmeermethoden (college over recursie)

Gebruik een kopie en doe daarin de zetten:

```
bool nimwinst (int stand) {
    int lucifer, kopie;
    if ( stand == 0 )
        return false;
    // tegenstander heeft zojuist de laatste lucifers gepakt
    else {
        // directe vervolgstanden aflopen
        for ( lucifer = 1; lucifer <= 2; lucifer++ ) {
            kopie = stand; // maak een kopie
            kopie -= lucifer; // doe een zet in de kopie
            if ( !nimwinst (kopie) ) {
                return true;
            }
        }
        return false;
    } // else
}
```

Met terugzetten:

```
bool nimwinst (int stand) {
    int lucifer;
    if ( stand == 0 )
        return false;
    // tegenstander heeft zojuist de laatste lucifers gepakt
    else {
        // directe vervolgstanden aflopen
        for ( lucifer = 1; lucifer <= 2; lucifer++ ) {
            stand -= lucifer; // doe een zet
            if ( !nimwinst (stand) ) {
                stand += lucifer; // terugzetten
                return true;
            }
            stand += lucifer; // terugzetten
        }
        return false;
    } // else
}
```

- **Lezen/leren bij dit college:**
Paragraaf 2.1–3, 2.6–7 (lezen), 3 inl., 3.1–3
- **Werkcollege** programmeeropdracht 1:
donderdag 7 maart 2013, 13:45–15:30,
in computerzaal 306-308
- **Volgend college:**
vrijdag 8 maart 2013, 11:15–13:00, zaal 412
- Het onderwerp complexiteit en recursie (Levitin 2.4 en sheets 18-21) slaan we over.

Gegeven heel veel platte stenen, die aan de ene kant zwart zijn en aan de andere kant wit. Iemand legt, zonder dat jij het ziet (je hebt een blinddoek voor je ogen), de stenen op de tafel neer. Je krijgt van die persoon te horen dat er precies 50 stenen met de witte kant boven liggen; de andere hebben de zwarte kant boven.

Jij moet, nog steeds geblinddoekt, de stenen in twee groepen verdelen, zodat in beide groepen evenveel stenen met de witte kant boven liggen.

Vraag: hoe kun je dat voor elkaar krijgen?