Tweede college algoritmiek

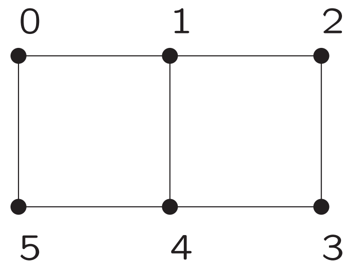
15 februari 2013

Grafen en bomen

Een graaf G wordt gedefinieerd als een paar (V, E), waarbij V een eindige verzameling is van knopen (vertices) en E een verzameling van paren van knopen: de takken/pijlen (edges). Een tak/pijl (u, v) verbindt de knopen u en v met elkaar.

Terminologie:

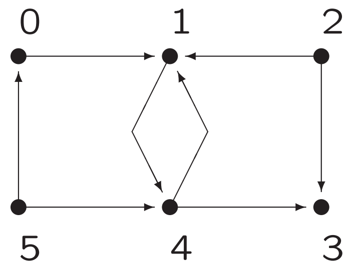
- ongerichte/gerichte graaf
- gewogen graaf
- paden en cykels/kringen
- samenhangend
- acyclisch



1.

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$

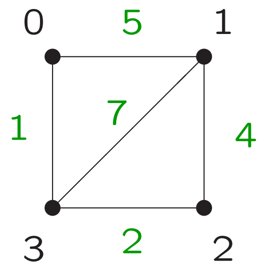
$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 0), (4, 1)\}$



2.

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$

$E = \{(0, 1), (2, 1), (2, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 0), (4, 1), (1, 4)\}$



3.

$V = \{0, 1, 2, 3\};$

$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (0, 3), (1, 3)\}$

Adjacency matrix: de **gerichte** graaf wordt gerepresenteerd door een tweedimensionaal array `int inhoud[n][n]` (n het aantal knopen), waarbij `inhoud`$[i][j]$ aangeeft of er een pijl van i naar j gaat. (Analoog ongerichte grafen; zie college 1.)

Adjacency list: de **gerichte** graaf wordt gerepresenteerd door een eendimensionaal array `buur* inhoud[n]` (n het aantal knopen), waarbij `inhoud`$[i]$ de ingang is tot een lijst van knopen waarvoor er een pijl is van i naar die knoop. De buurlijst bevat dus alle uitgaande pijlen uit i. (Analoog ongerichte grafen; zie college 1.)

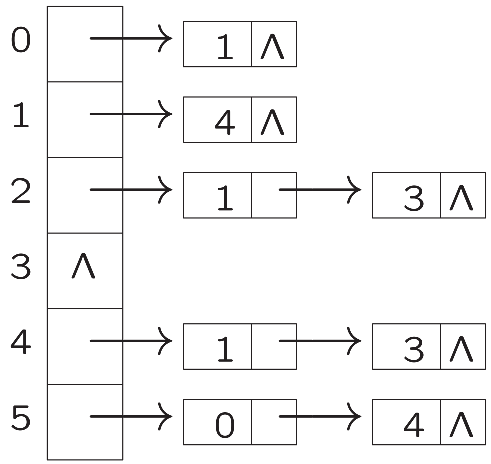
Adjacency list representatie in C++:

```
struct buur {
  int knoopnummer;
  buur* volgende;
}
buur* inhoud[n];
```

Adjacency matrix en adjacency list voor voorbeeldgraaf **2**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adjacency matrix



adjacency list

Geef een algoritme dat de pijl (i, j) in een gegeven gerichte graaf omdraait. Neem aan dat de omgekeerde pijl (j, i) nog niet bestaat.

```
// het array graaf (buur* graaf[n]) bevat de gerichte graaf
buur* hulp = graaf[i]; buur* vorige = NULL;
while ( hulp->knoopnummer != j ) { // knoop j zoeken
    vorige = hulp; hulp = hulp->volgende;
}
// haal buurknoop j uit lijst
if ( vorige == NULL ) { // j is de eerste buur van i
   graaf[i] = hulp->volgende;
}
else { // j is niet de eerste buur van i
   vorige->volgende = hulp->volgende;
}
delete hulp;  // gooi buur j weg
// voeg nu i vooraan in de buurlijst van j toe
hulp = new buur;
hulp->knoopnummer = i; hulp->volgende = graaf[j];
graaf[j] = hulp;
```

Gegeven een adjacency list representatie van een gerichte graaf: hoeveel stappen kost het om het aantal uitgaande pijlen van iedere knoop te vinden? En het aantal inkomende pijlen?

En nu dezelfde vraag, maar voor een adjacency matrix representatie?

Hoeveel stappen kost het om te testen of van de ene knoop een pijl loopt naar de andere bij een adjacency list respectievelijk een adjacency matrix representatie?

Hoeveel ruimte neemt een adjacency list in beslag? En een matrix?

- Een pad van u naar v is een rij knopen waarvoor geldt dat tussen elk tweetal opeenvolgende knopen uit die rij een tak zit (resp. een pijl loopt van de ene naar de volgende knoop; dan: gericht pad).

- De lengte van een pad $=$ het aantal takken op dat pad $=$ het aantal knopen - 1.

- Als alle knopen verschillend zijn heet het pad **enkelvoudig**.

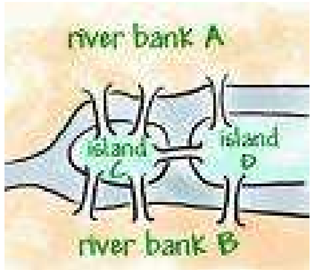
- Een kring in een ongerichte graaf is een pad met minstens 3 knopen, dat begint en eindigt in dezelfde knoop en dat geen enkele tak meer dan één keer bevat.

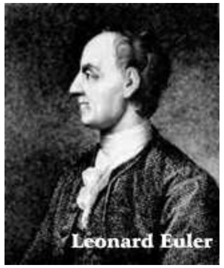
- Een ongerichte graaf heet samenhangend als er tussen elk tweetal knopen u en v een pad loopt.

- Een graaf die geen kringen bevat heet acyclisch.

Twee zeer bekende graafproblemen:

Koningsberger bruggen probleem





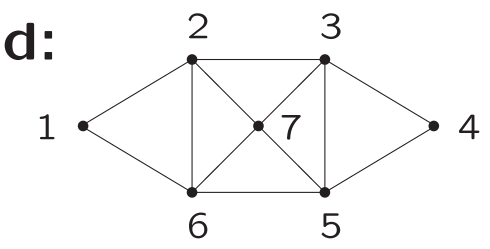
Vierkleurenprobleem

Hoezo **graaf**problemen?

Definitie: een wandeling (pad) in een ongerichte graaf die terugkeert in zijn beginpunt en die *alle* takken precies één keer doorloopt heet een Eulerkring*. Analoog: Eulerpad.

Probleem. Gegeven een ongerichte graaf $\mathcal{G}$. Heeft $\mathcal{G}$ een Eulerkring?

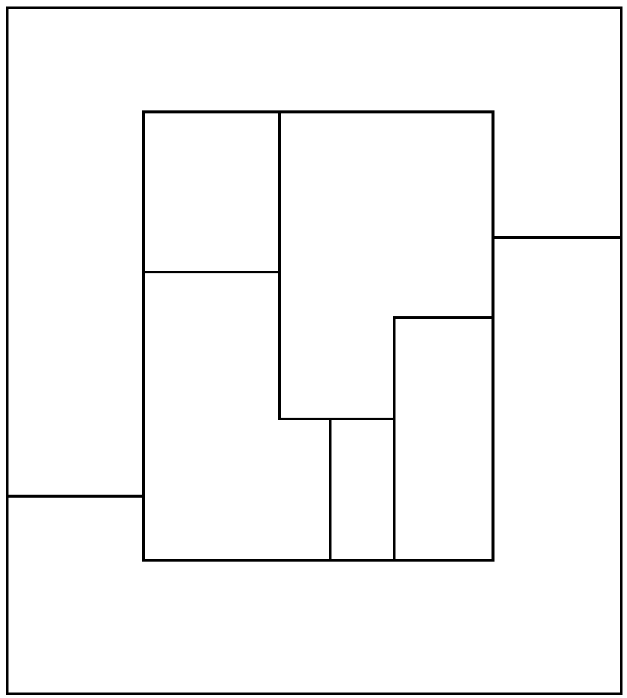
Voorbeeld:



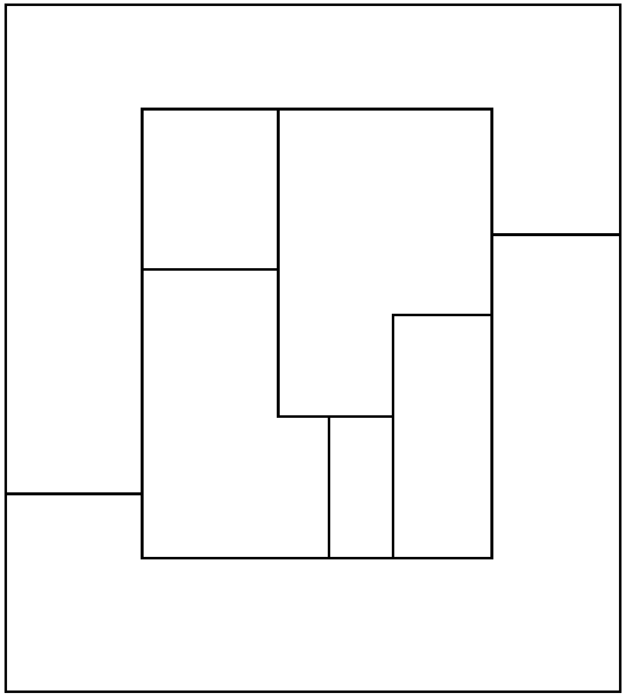
Voor deze graaf is 1 2 3 4 5 3 7 5 6 7 2 6 1 een Eulerkring.

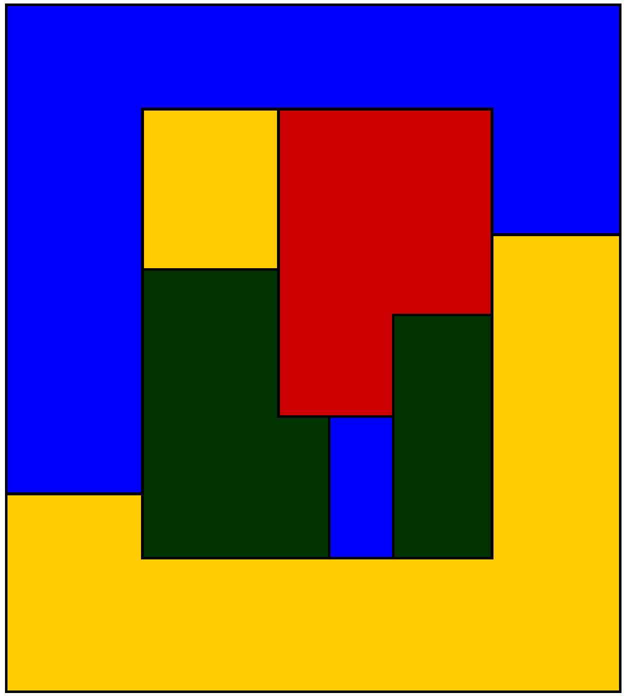
* Een kring is een pad met minstens 3 knopen dat begint en eindigt in dezelfde knoop en dat geen enkele tak meer dan één keer doorloopt.

Kleur de landkaart met maximaal vier kleuren onder de restrictie dat buurlanden een verschillende kleur hebben:



Kleuring van de landkaart met maximaal vier kleuren onder de restrictie dat buurlanden een verschillende kleur hebben:

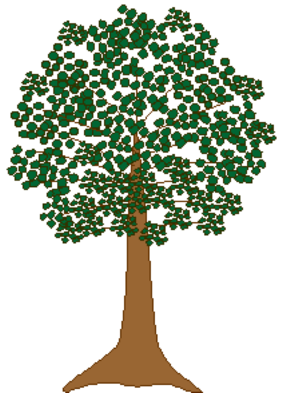




Definitie: een boom is een samenhangende (= uit één stuk bestaande) ongerichte graaf zonder cykels (= kringen).

Wijs een speciale knoop aan, de *wortel*. Teken de wortel bovenaan en alle paden vanuit de wortel naar beneden: dit geeft een hiërarchische structuur die lijkt op een stamboom. Dit heet ook wel een georiënteerde boom. Meestal spreken we gewoon van een boom.

Stamboomterminologie: kind $\longleftrightarrow$ ouder, afstammeling $\longleftrightarrow$ voorouder.

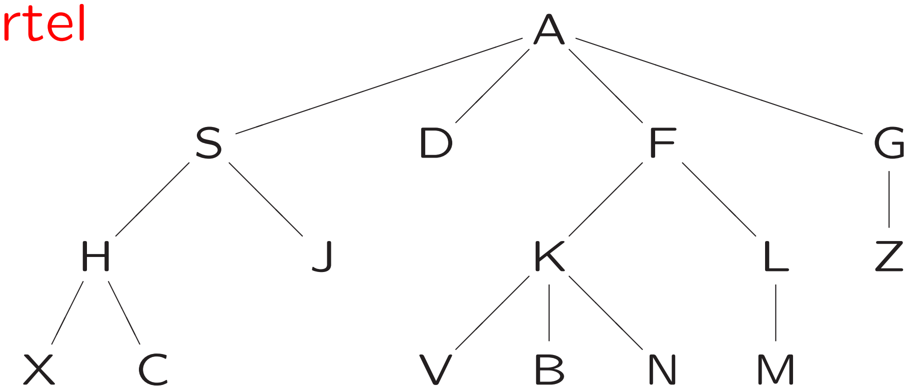


In een georiënteerde boom hebben we dus ouder-kind relaties tussen knopen.

Voorbeeldboom

Terminologie: takken, knopen, niveau, hoogte, wortel, bladeren $\longleftrightarrow$ interne knopen

wortel

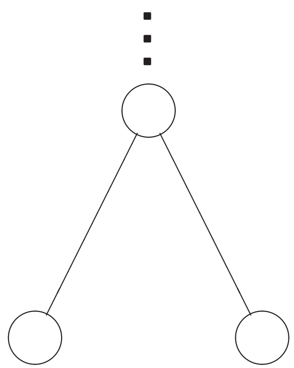


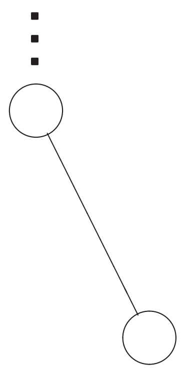
bladeren

De wortel (hier A) is de *enige* ingang tot de boom.

- Een acyclische graaf die niet samenhangend is heet een bos. Het is namelijk een collectie bomen.
- Voor bomen geldt: aantal takken = aantal knopen - 1.
- Een geordende boom is een boom waarin van elke knoop de kinderen geordend zijn: oudste kind, een na oudste kind, . . ., jongste kind.
- Onderstaande bomen zijn als georiënteerde bomen wel gelijk, maar als geordende georiënteerde bomen niet:

Een binaire boom is een boom waarin elke knoop ofwel nul, ofwel één ofwel twee kinderen heeft; als een knoop twee kinderen heeft dan is het ene kind het **linkerkind**, het andere het **rechterkind**; als een knoop één kind heeft, dan is dit ofwel een linkerkind, ofwel een rechterkind.



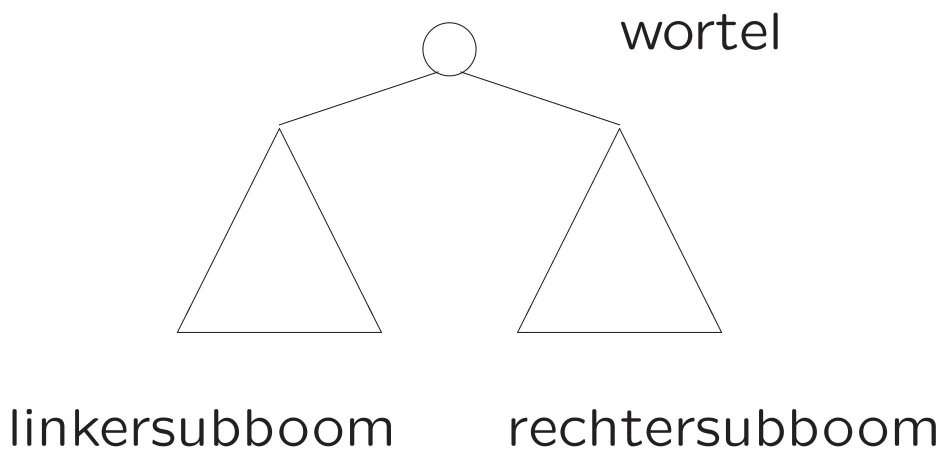


linkerkind rechterkind

één kind: rechterkind

Binaire bomen: recursief

Recursieve definitie: een binaire boom is een eindige verzameling knopen die ofwel leeg is, ofwel bestaat uit een speciale knoop (de wortel) en twee disjuncte verzamelingen knopen die samen de rest van alle knopen vormen. Die knoopverzamelingen vormen beide ook weer een binaire boom: de linkersubboom en de rechtersubboom.



```
class knoop {  // een struct mag ook
  public:
    knoop ( ) {  // constructor
      info = 0; links = NULL; rechts = NULL; }
    int info;
    knoop* links;
    knoop* rechts;
};  // knoop
```

De binaire boom wordt gerepresenteerd door middel van een pointer naar de wortel:

```
  knoop* wortel; // de ingang tot de binaire boom
```

Netter om een klasse te gebruiken: zie Programmeermethoden


Wandelroutes.org
wandelroutes
wandelroutes antwerpen
wandelroutes oost-vlaanderen
wandelroutes west-vlaanderen
wandelroutes limburg
wandelroutes vlaams-brabant
wandelroutes brussel
wandelroutes ardennen
wandelroutes nederland
wandelnetwerken
wandelen in boom
Hieronder vindt u een overzicht van de wandelroutes in de gemeente Boom.
Om uitgebreide wandelrouteinformatie te vinden neemt u best contact op met de plaatselijke toeristische dienst van de gemeente Boom.
Overnachten in een bed and breakfast: http://www.fietsroute.org
Vakantiepark Ardennen
Samen genieten, ontspannen & actief zijn midden in de natuur. Boek nu!

WLR (preorde):

bezoek wortel
doorloop linkersubboom WLR
doorloop rechtersubboom WLR

LWR (symmetrisch):

doorloop linkersubboom LWR
bezoek wortel
doorloop rechtersubboom LWR

LRW (postorde): analoog

```
void preorde (knoop* root) {
  if ( root != NULL ) {
    cout << root->info << endl;
    preorde (root->links);
    preorde (root->rechts);
  }  // if
}  // preorde

void symmetrisch (knoop* root) {
  if ( root != NULL ) {
    symmetrisch (root->links);
    cout << root->info << endl;
    symmetrisch (root->rechts);
  }  // if
}  // symmetrisch
```

We tellen *recursief* het aantal knopen van een binaire boom met ingang wortel.
Aanroep: `int tellen = aantal (wortel);`

```
int aantal (knoop* root) {
  if ( root == NULL )       // lege boom
    return 0;
  else
    return ( 1 + aantal (root->links)
                + aantal (root->rechts) );
}  // aantal
```

Merk op dat hier eigenlijk een preorde-wandeling wordt gedaan.

We breken de binaire boom met ingang wortel helemaal af: hiertoe wordt eerst de linkersubboom (recursief) weggegooid, daarna de rechtersubboom en ten slotte de wortel zelf. Aanroep: `breekaf (wortel);`

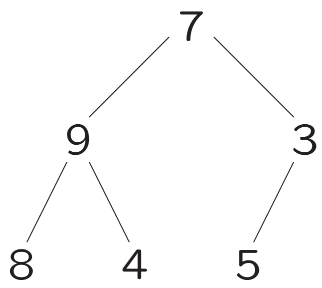
```
void breekaf (knoop* & root) {
  if ( root != NULL ) {
    breekaf (root->links);       L
    breekaf (root->rechts);      R
    delete root;                 W
    root = NULL;
  }  // if
} // breekaf
```

- Voor de hoogte h van een binaire boom met n knopen geldt: $\lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 \leq h \leq n-1$

- Een complete binaire boom is een binaire boom waarbij alle niveaus geheel vol zitten, behalve eventueel het onderste. Op het onderste niveau mogen alleen de meest rechter knopen missen.

- Een binaire zoekboom is een binaire boom waarbij voor elke knoop geldt dat de waarde in die knoop groter is dan alle waarden in zijn linkersubboom, en kleiner dan alle waarden in zijn rechtersubboom.

Complete binaire boom:

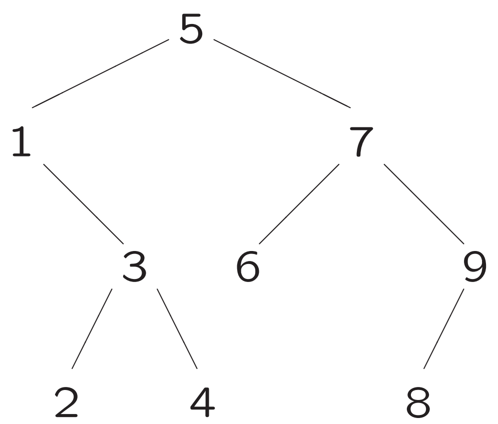


$\Longleftrightarrow$ 7 9 3 8 4 5

Binaire zoekboom:

LWR

1 2 3 4 5 6 7 8 9



- **Lezen/leren bij dit college:**

  1.4 (vanaf graafrepresentaties)

- **Werkcollege:**

  donderdag 21 februari 2013, 13:45—15:30, computerzaal 306/308

- **Opgaven:**

  zie http://www.liacs.nl/home/graaf/ALGO/

- Houd de website in de gaten voor de eerste programmeeropdracht

- **Volgend college:**

  vrijdag 22 februari 2013, 11:15—13:00, zaal 412

Stel, je hebt een zak met 20 zwarte ballen en 16 witte ballen (en wat extra witte en zwarte ballen tot je beschikking). Je herhaalt nu de volgende operatie totdat er nog maar één bal in de zak over is.
Je haalt zonder te kijken twee ballen tegelijk uit de zak. Als deze dezelfde kleur blijken te hebben, doe je een zwarte bal in de zak; als ze verschillend van kleur zijn, doe je een witte bal in de zak.
De vraag is: wat is de kleur van de bal die als laatste overblijft in de zak?

Dezelfde vraag, maar nu begin je met 20 zwarte en 15 witte ballen in de zak.