De eerste programmeeropgave — Bynum game
Algoritmiek voorjaar 2009, Universiteit Leiden

Toestand-actie-ruimte en strategie

Het tweepersoonsspel Bynum game wordt gespeeld met $m * n$ speelkaarten (of eenhapscakejes, of kiezelsteentjes, of ...), die in een m bij n rechthoek (m rijen en n kolommen) worden gelegd. Er zijn twee spelers, V (Verticaal) en H (Horizontaal), die om de beurt een zet doen. We spreken af dat V begint.
Als speler V een zet doet neemt deze steeds een hele kolom weg, speler H een hele rij. Door het wegnemen van een rij of kolom uit een rechthoek zal in het algemeen die rechthoek in twee kleinere rechthoeken worden verdeeld. Indien van de rand wordt weggehaald, resteeert één kleinere rechthoek. Bij aanvang van het spel is er slechts één rechthoek, maar tijdens het spel worden dit er meer. Als een speler aan de beurt is neemt deze een kolom (V) of rij (H) weg uit precies één van die rechthoeken. Een zet bestaat dus uit het aanwijzen van een kolom of rij in een van de rechthoeken, en die daar vervolgens weghalen. De speler die de laatste kaart(en) weghaalt heeft gewonnen.

Een voorbeeld van een mogelijk spelverloop, met $m = 3$ en $n = 4$:

```
X X X X    V     X   X X    H     X   X X    V     X   X      H    X   X
X X X X   --->   X   X X   --->   X         --->   X         --->  X
X X X X          X   X X          X   X X          X   X X         X
  (*)                                                                 (**)
```

In het spelverloop hierboven geven de `X`-en de speelkaarten aan. In toestand `(**)` is V aan de beurt. Als deze in de volgende zet de meest linker kolom weghaalt verliest hij. Veronderstel dus dat hij de derde kolom (één speelkaart) weghaalt. Dan blijft er een toestand over die winnend is voor H. (Zij neemt namelijk de middelste rij (één speelkaart) en haalt dan in haar volgende zet de laatste kaart weg.) Stand `(**)` is derhalve verliezend voor V (ofwel winnend voor H), want zijn twee mogelijke zetten leiden allebei tot verlies.

Bij deze programmeeropdracht moet een kort **verslag** gemaakt worden, waarin de volgende vragen/opdrachten beantwoord/uitgewerkt moeten worden. Het verslag is bij voorkeur getypt (het liefst in LaTeX), maar mag ook handgeschreven zijn; als het maar duidelijk is, zowel wat betreft inhoud als leesbaarheid. Zie www.liacs.nl/mwitsenb/Algoritmiek/ voor enkele richtlijnen bij het maken van het verslag.

Bij het tekenen van toestand-actie-ruimtes, zoals hieronder gevraagd, mag je rekening houden met de symmetrie van het probleem. Bijvoorbeeld: vanuit de beginstand `(*)` in bovenstaand voorbeeld, zijn 4 zetten van V mogelijk. Echter zowel het weghalen van de tweede kolom als de derde kolom laat een 3 bij 1 en een 3 bij 2 rechthoek over. Je mag daarom in je toestand-actie-plaatje een van beide zetten weglaten. Iets soortgelijks geldt voor het wegnemen van de eerste of de vierde kolom: beide zetten laten een 3 bij 3 rechthoek over. Verder gaan we ervan uit dat V altijd begint.

1. Teken de toestand-actie-ruimte voor de gevallen $m = 2, n = 4$ en $m = n = 3$. Geef bij elke toestand aan of deze winnend is voor V of voor H. Bepaal zo de winnende zet en de winnende strategie.
2. Teken de toestand-actie-ruimte voor de gevallen $m = 4, n = 2$; $m = 5, n = 2$; $m = 6, n = 2$ en $m = 7, n = 2$. Geef bij elke toestand aan of deze winnend is voor V of voor H. Bepaal zo de winnende zet en de winnende strategie. Je hoeft hier een toestand waarvan je al gezien hebt of die winnend is voor V dan wel voor H, niet meer helemaal uit te werken.
3. We bekijken nu het algemene geval waarin begonnen wordt met een m bij 2 rechthoek. Bewijs de volgende beweringen en geef in beide gevallen aan hoe men moet spelen om te winnen:

1. als m even is, dan is het spel winnend voor V.
2. als m oneven is, dan is het spel winnend voor H.

Hint: gebruik inductie.