

Twaalfde college algoritmiek

8 mei 2009

Branch & Bound, Heapsort

Branch & bound

- is alleen toepasbaar op **optimalisatieproblemen**
- genereert oplossingen stap voor stap en houdt de tot dusver gevonden beste oplossing bij
- gebruikt voor elke deeloplossing (= knoop in de state space tree) een of andere **ondergrens** (minimalisatieprobleem) resp. **bovengrens** (maximalisatieprobleem) op de te verwachten waarde van de objectfunctie, met als doel:
 - van deeloplossingen te kunnen bepalen dat ze niet verder bekeken hoeven te worden: **snoeien**
 - de **zoekvolgorde** in de zoekruimte (state space tree), dus de volgorde waarin knopen worden gegenereerd en verder bekeken, te leiden

Een branch and bound algoritme breidt een knoop (deeloplossing) niet verder uit als

- de waarde van de ondergrens (bovengrens) bij die knoop niet beter is dan de waarde van de tot dusver gevonden beste oplossing
- de deeloplossing niet meer voldoet aan de restricties (of niet meer uit te breiden is tot een toelaatbare oplossing)
- er een volledige, toelaatbare oplossing gevonden is (dus geen verdere uitbreiding meer mogelijk is): update de beste oplossing

De volgorde waarin de knopen (deeloplossingen) worden uitgebreid hangt af van de berekende grenzen:

- er worden a.h.w. meerdere deeloplossingen tegelijk bijgehouden
- in elke stap wordt één van al deze deeloplossingen gekozen, en daarvan worden alle 1-staps-uitbreidingen (kinderen in de state space tree) bekeken en geëvalueerd (d.w.z. ondergrens/bovengrens bepaald)
- zinloze uitbreidingen worden meteen verworpen
- meestal wordt de deeloplossing gekozen die het meest veelbelovend lijkt: **best-fit-first branch-and-bound**
- bij minimalisatieproblemen (resp. maximalisatieproblemen) kiezen we de knoop met de laagste ondergrens (resp. hoogste bovengrens) als eerste

Gegeven n objecten, met gewicht w_1, \dots, w_n en waarde v_1, \dots, v_n , en een knapzak met capaciteit W . **Gevraagd:** de meest waardevolle deelverzameling der objecten die in de knapzak past (dus met totaalgewicht $\leq W$).

Voorbeeld:

item	w	v	v/w
1	4	\$40	10
2	7	\$42	6
3	5	\$25	5
4	3	\$12	4

Maximaal gewicht $W = 10$

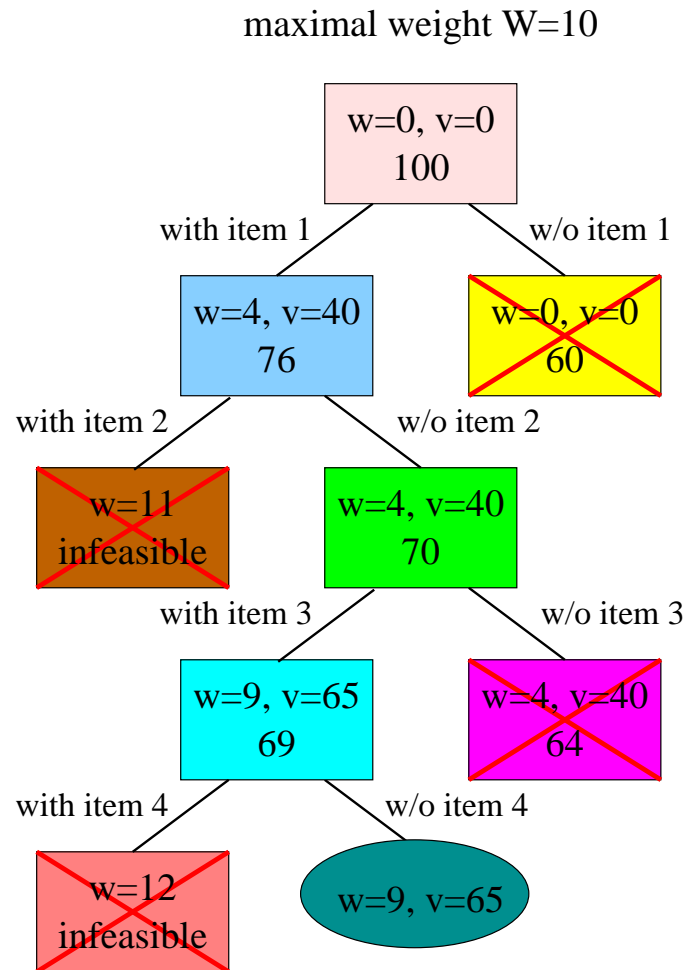
item	w	v	v/w
1	4	\$40	10
2	7	\$42	6
3	5	\$25	5
4	3	\$12	4

Opbouwen van de oplossing: in de i -de stap wordt object i wel of niet gekozen,

Een bovengrens voor de kosten van een optimale oplossing:

- Bij aanvang: $W * (v_1/w_1) = 100$;
- Na de i -de stap: $v + (W - w) * (v_{i+1}/w_{i+1})$, met v de totaalwaarde van de reeds gekozen objecten en w het totaalgewicht daarvan.

De optimale oplossing heeft gewicht 9 en waarde 65: $\{1, 3\}$.



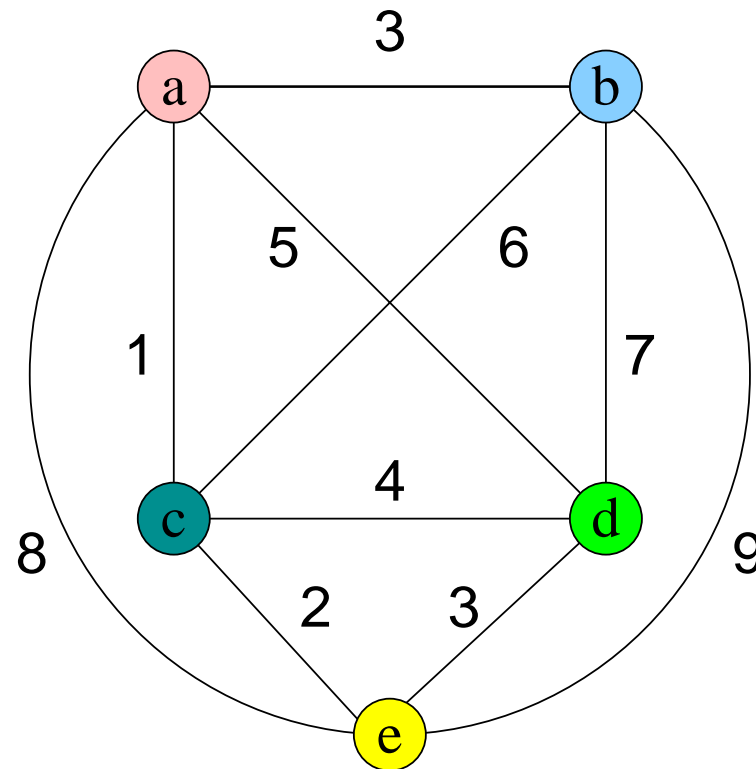
item	w	v	v/w
1	4	\$40	10
2	7	\$42	6
3	5	\$25	5
4	3	\$12	4

Zie ook exercise 12.2.5, Levitin.

Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

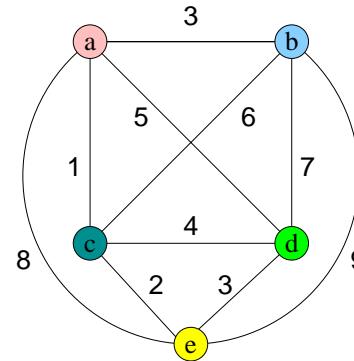
Gegeven n steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn. **Gevraagd:** de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.

Ofwel: vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (complete) graaf. Het gaat hier om een ongerichte graaf.

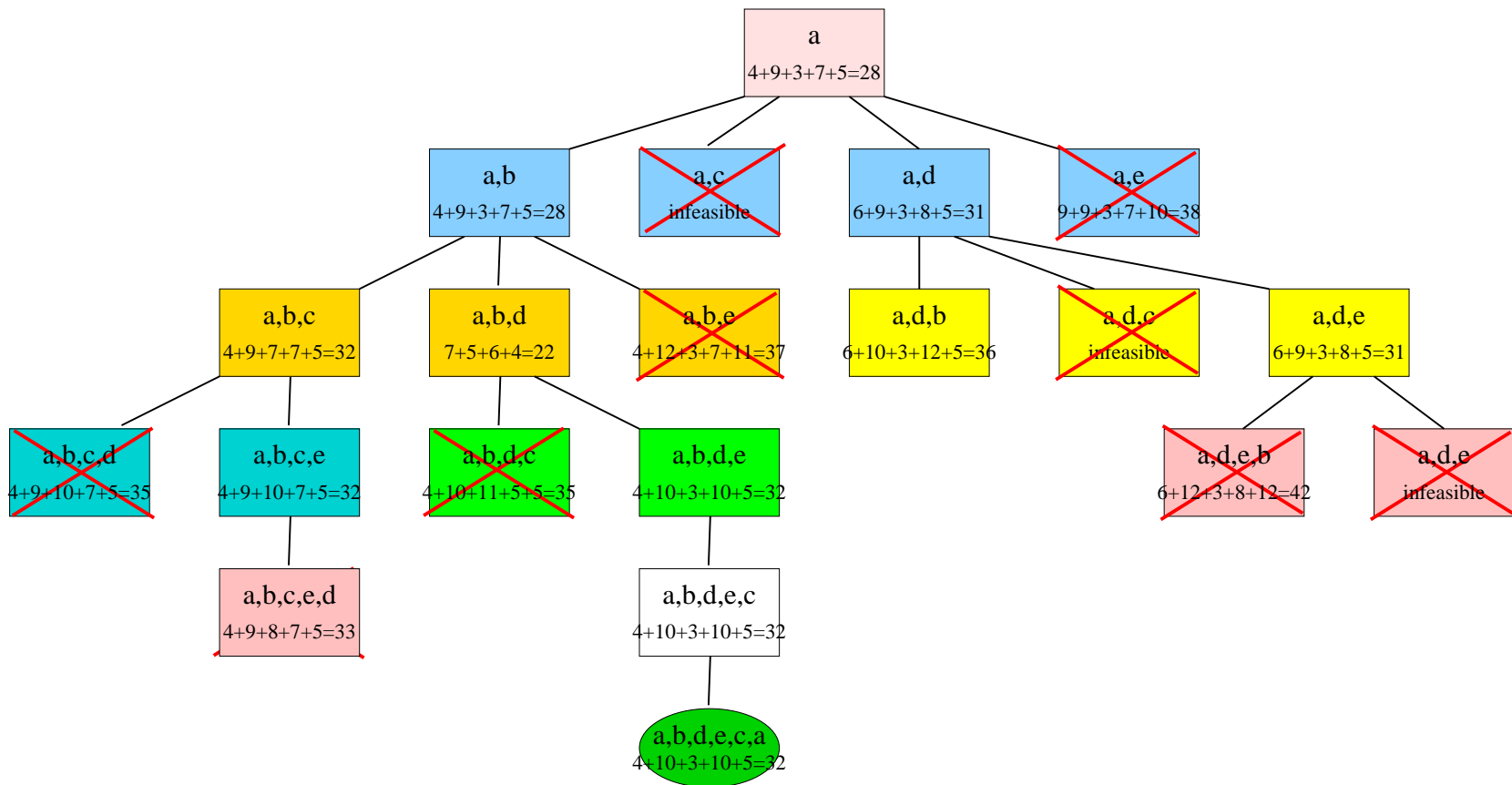


De optimale oplossing heeft lengte 16: a, b, d, e, c

Mogelijke ondergrenzen voor de kosten van een optimale oplossing:

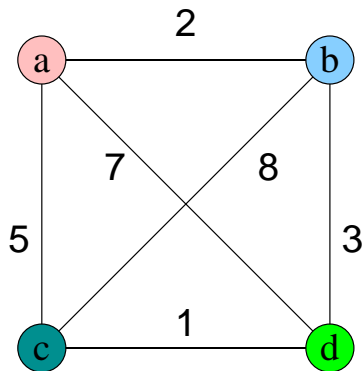


- eenvoudig: $n \times$ kortste afstand tussen twee knopen; $5 \times 1 = 5$ bij aanvang (analoog als reeds takken gekozen zijn).
- iets beter: de lengtes van de n kortste takken gesommeerd; $1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 13$ bij aanvang (analoog als reeds takken gekozen zijn).
- nog beter: som over alle knopen i van de afstanden van knoop i tot de twee dichtstbijzijnde knopen (inclusief al gekozen takken), en dat gedeeld door $2(*)$; $(1 + 3 + 3 + 6 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2)/2 = 14$ bij aanvang.

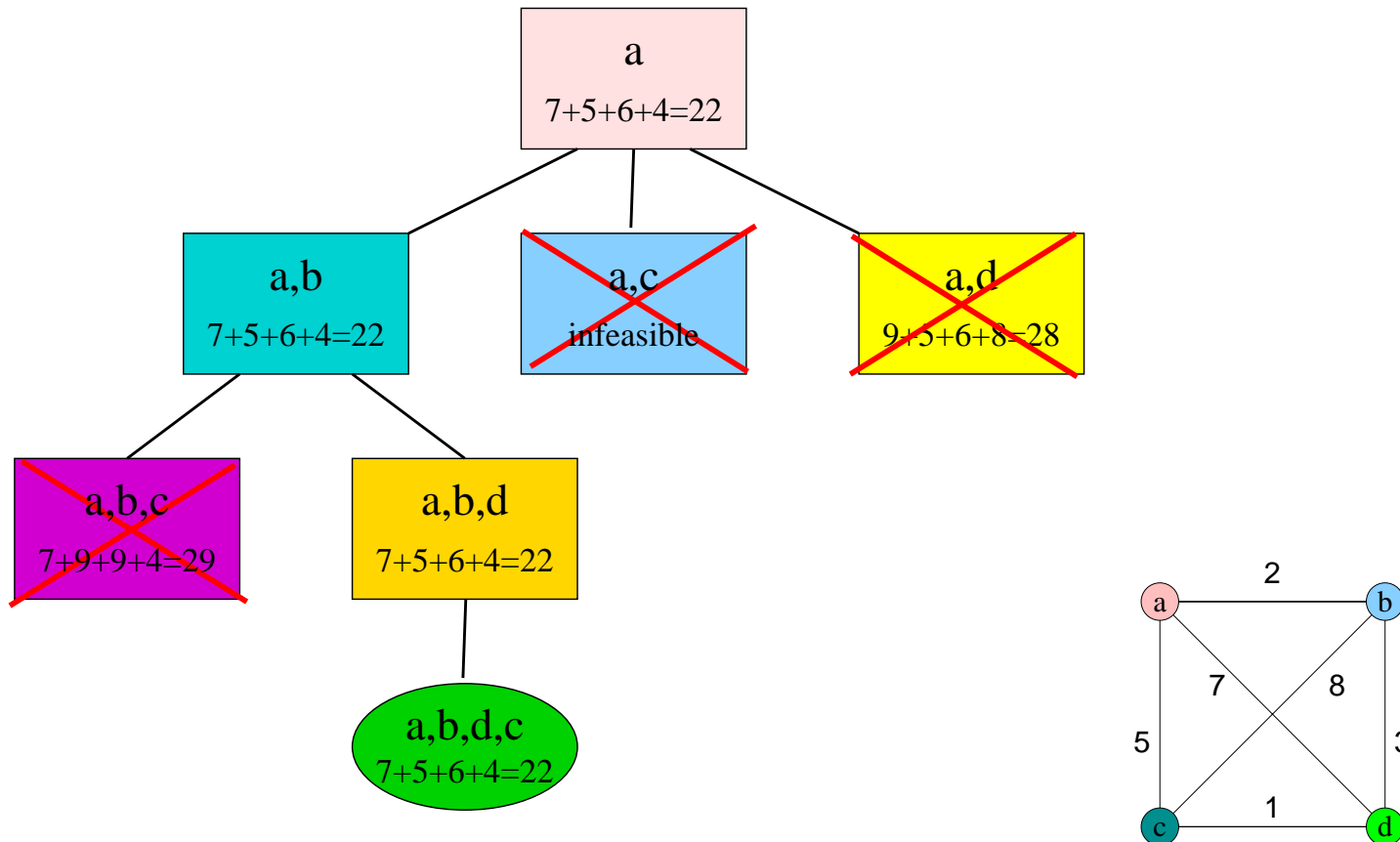


Opmerking: delen door 2 is niet nodig; je kunt ook 2×lengte minimaliseren (*). **Opm.** Er staan een paar kleine foutjes in het plaatje: bijv. de ondergrens bij knoop a,b,d is 32 i.p.v. 22 en de knoop rechtsonder moet a,d,e,c zijn.

Nog een voorbeeld, met als ondergrens wederom de som van de twee kortste takken per knoop (eventueel gedeeld door 2, zoals in het boek).

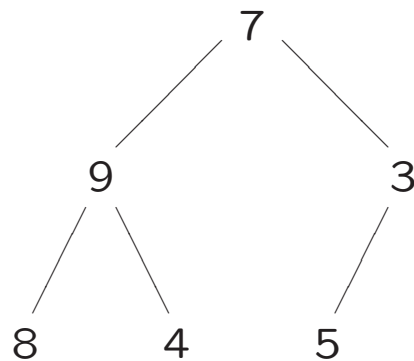


De optimale oplossing heeft lengte 11: a, b, d, c, a.



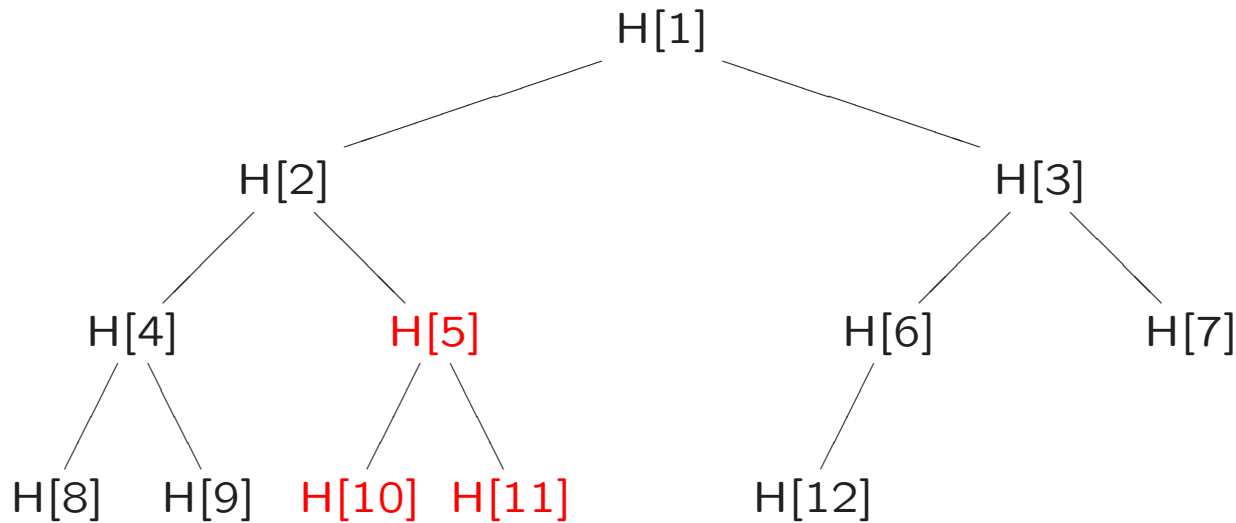
Opm. De ondergrens bij de knoop met **a,b,c** is 30 en niet 29.

- Een **complete** binaire boom is een binaire boom waarbij alle nivo's geheel vol zitten, behalve eventueel het onderste. Op het onderste nivo mogen alleen de meest rechter knopen missen.
- Voorbeeld:

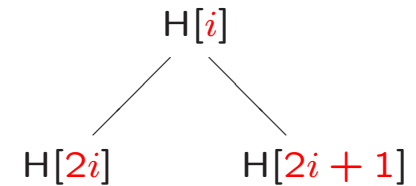
 \Leftrightarrow

7 9 3 8 4 5

representatie als **array**



\Updownarrow nivo-orde



H[1] H[2] H[3] H[4] H[5] H[6] H[7] H[8] H[9] H[10] H[11] H[12]

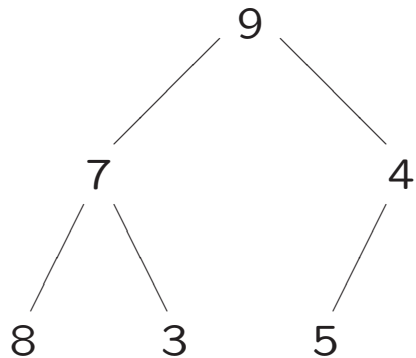
Definitie

Een **heap** (hoopstructuur) is een binaire boom met de volgende twee eigenschappen:

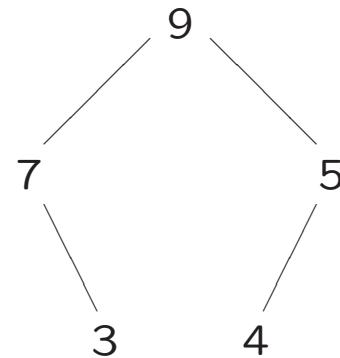
1. **Vorm**: de binaire boom is **compleet**
2. **Inhoud**: de **heap-eigenschap** geldt, d.w.z. in elke knoop geldt dat de waarde opgeslagen in die knoop **groter dan of gelijk is aan**(*) de waarde in zijn kinderen

Langs elk pad van de wortel tot een blad zijn de sleutels in de knopen dus van groot naar klein geordend.

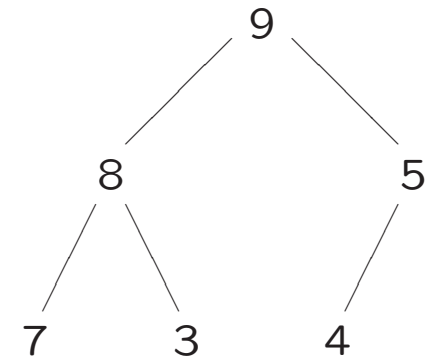
(*) we spreken dan wel van een **max-heap**; een **min-heap** wordt analoog gedefinieerd



1. geen heap



2. geen heap



3. wel heap

1. ouder \geq kinderen geldt niet in elke knoop

2. niet compleet

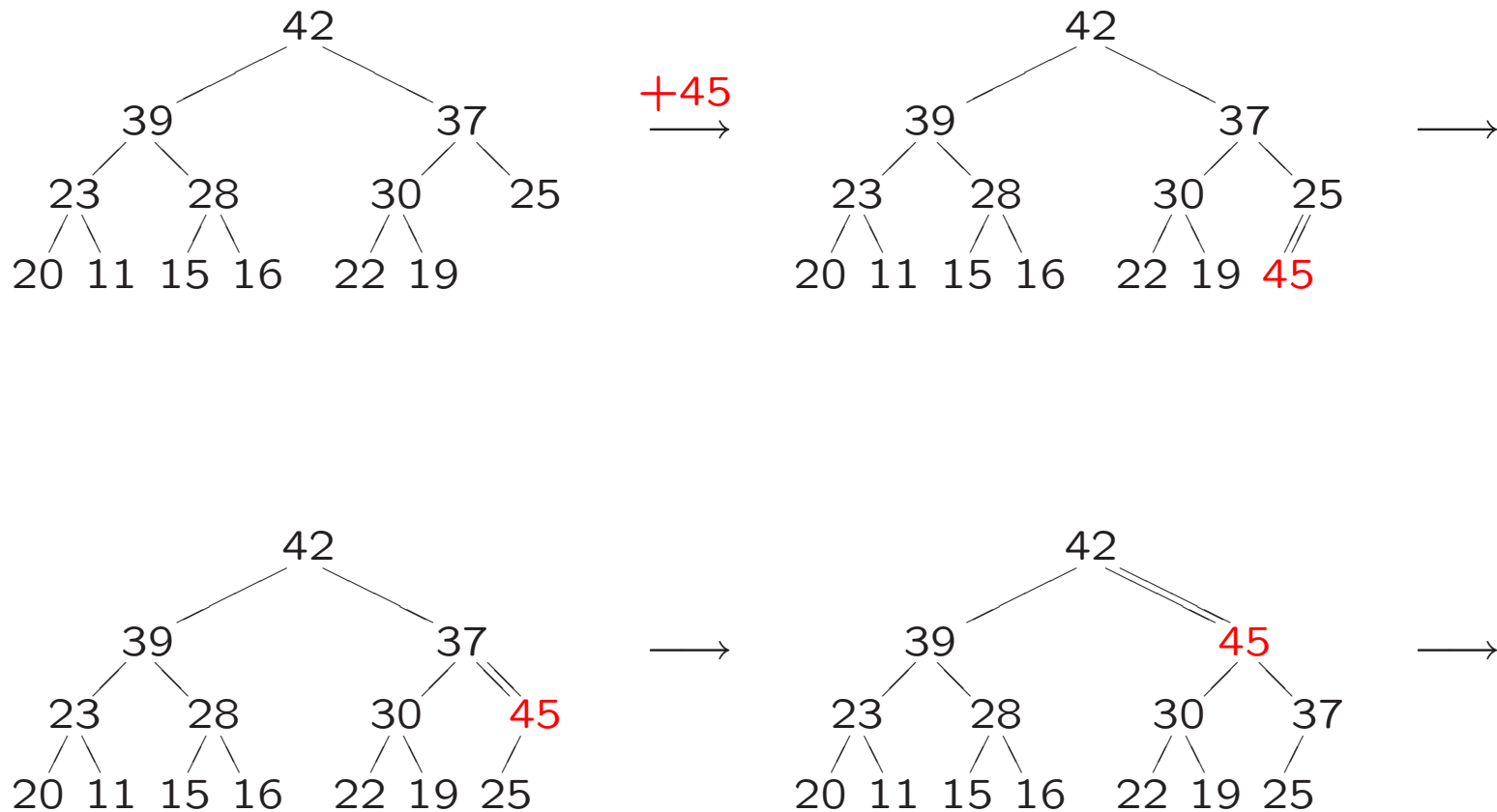
3. compleet en ouder \geq kinderen

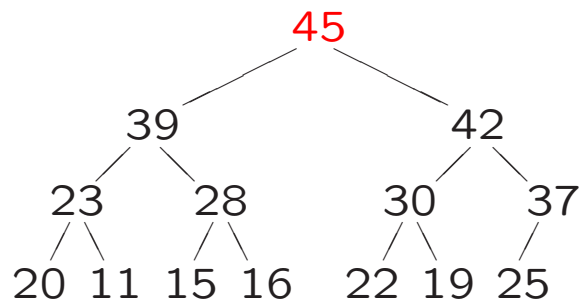
1. Gegeven n , dan bestaat er precies één **complete** binaire boom met n knopen. Deze heeft hoogte $\lceil \lg n \rceil$.
2. **De wortel van een heap bevat altijd de grootste waarde.**
3. Voor elke knoop van een heap geldt: de subboom met die knoop als wortel is weer een heap.
4. Een heap wordt gerepresenteerd door een **eendimensionaal array** H , met de inhoud van de n knopen op posities 1 t/m n .
 - ouderknoten (interne knopen) corresponderen met de posities 1 t/m $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; bladeren met $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ t/m n .
 - de kinderen van $H[i]$ ($i = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) zijn $H[2i]$ en $H[2i + 1]$; de ouder van $H[i]$ ($i = 2, \dots, n$) is $H[\lfloor i/2 \rfloor]$.

Wanneer de waarde in een knoop verandert (of een waarde wordt verwijderd/toegevoegd) zal i.h.a. de heap-eigenschap niet meer gelden. Er zijn twee manieren (beide $O(\lg n)$, met n het aantal knopen van de heap) om die weer te herstellen, afhankelijk van de situatie.

Stel nu dat de waarde in één knoop veranderd wordt. Dan zijn er twee mogelijkheden:

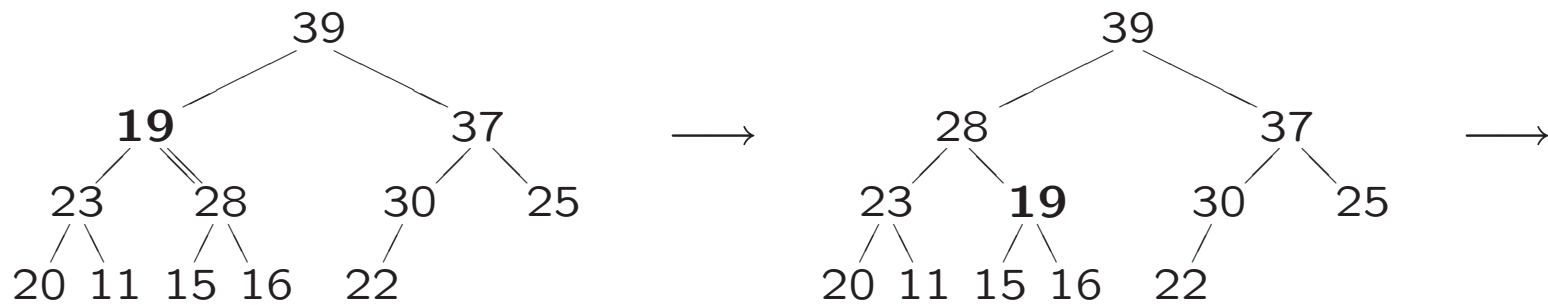
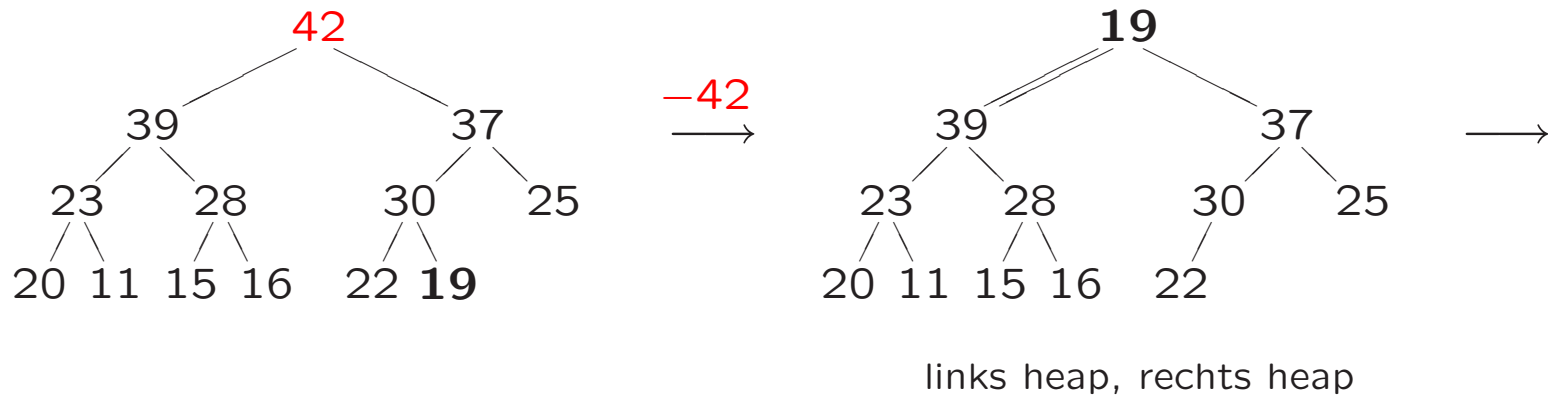
1. waarde in knoop $>$ waarde in ouder: herhaald verwisselen met ouder totdat de heap-eigenschap hersteld is (waarde **borrelt omhoog**)
2. waarde knoop $<$ waarde van (ten minste een der) kinderen: herhaald verwisselen met grootste kind totdat de heap-eigenschap hersteld is (waarde **zakt omlaag**)

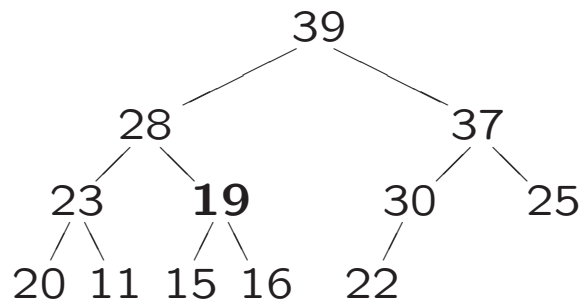




Heap-eigenschap weer hersteld

42 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22 19
 ↓↓
 42 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22 19 45
 ↓↓
 42 39 37 23 28 30 45 20 11 15 16 22 19 25
 ↓↓
 42 39 45 23 28 30 37 20 11 15 16 22 19 25
 ↓↓
 45 39 42 23 28 30 37 20 11 15 16 22 19 25





Heap-eigenschap weer hersteld

42 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22 19

⇓

19 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22

⇓

39 19 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22

⇓

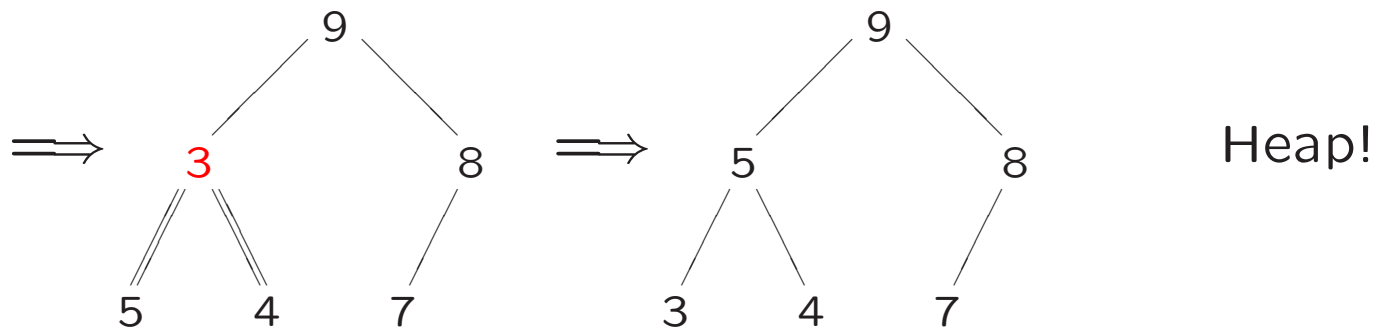
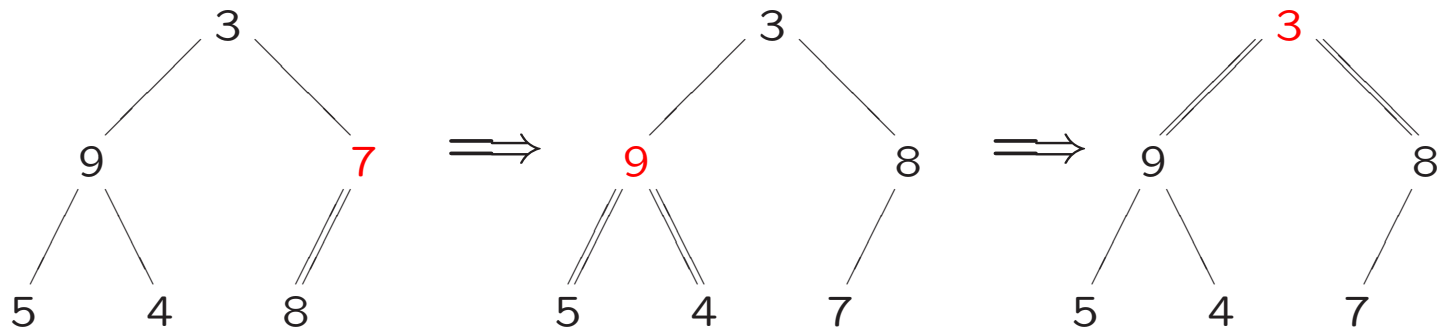
39 28 37 23 19 30 25 20 11 15 16 22

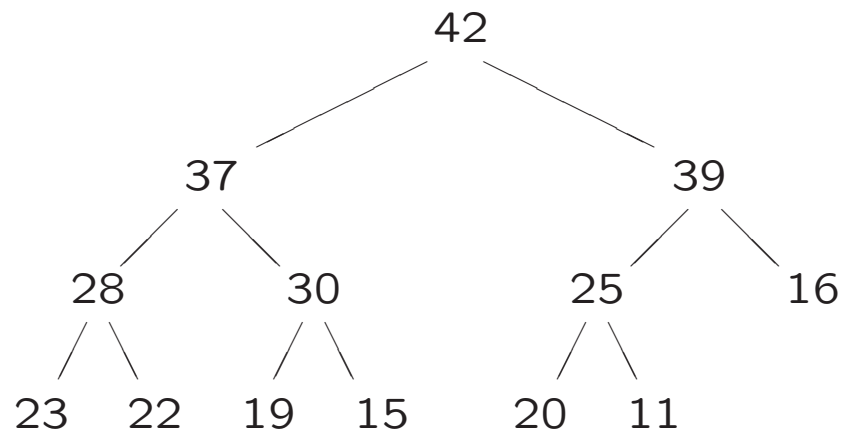
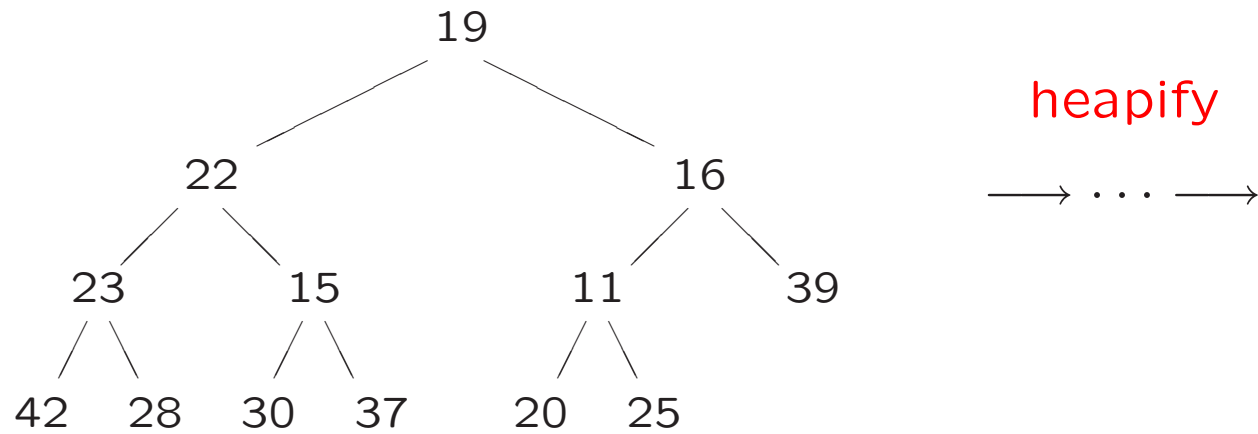
⇓

39 28 37 23 19 30 25 20 11 15 16 22

Constructie van een heap uit een gegeven rij (array H) sleutels (getallen bijv.):

- **Bottom up (heapify)**: beginnend bij $H[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$, de laatste ouderknoop, en zo teruglopend, wordt in alle subbomen met de ouderknoten als wortel de heap-eigenschap hersteld via omlaag zakken van de (inhoud van die) ouderknoop
- **Top down**: beginnend bij de wortel en door telkens een knoop meer bij de heap te betrekken wordt de heap-eigenschap steeds hersteld via omhoog borrelen van de (inhoud van de) nieuwe knoop
- Heapify is $O(n)$; de andere methode is $O(n \lg n)$





```
for  $i := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  downto 1 do
   $k := i; v := H[k];$ 
  heap := false;
  while not heap and  $2 * k \leq n$  do // geen blad
     $j := 2 * k;$  // linkerkind
    if  $j < n$  then // 2 kinderen
      if  $H[j] < H[j + 1]$  then
         $j := j + 1;$  fi // selecteer grootste kind
      fi
    if  $v \geq H[j]$  then
      heap := true;
    else
       $H[k] := H[j]; k := j;$  fi
    od
   $H[k] := v;$ 
od
```

1. Maak een heap van het gegeven array
2. Verwijder nu herhaald ($n - 1$ keer) de grootste waarde uit de wortel:
 - verwissel deze met de laatste waarde uit de heap
 - verlaag de grootte van de heap met 1
 - zorg dat overal de heap-eigenschap weer geldt door de nieuwe waarde uit de wortel te laten zakken

Het array wordt zo oplopend gesorteerd.

Complexiteit: $O(n \lg n)$.

Sorteer het array 3 9 7 5 4 8 met heapsort.

Fase 1

```

3 9 7 5 4 8 →
3 9 8 5 4 7 →
9 3 8 5 4 7 →
9 5 8 3 4 7
    
```

Fase 2

```

9 5 8 3 4 7 →
7 5 8 3 4 |9 →
8 5 7 3 4 |9 →
4 5 7 3 |8 |9 →
7 5 4 3 |8 |9 →
3 5 4 |7 |8 |9 →
5 3 4 |7 |8 |9 →
4 3 |5 |7 |8 |9 →
3 |4 |5 |7 |8 |9
    
```

- **Laatste college:**
vrijdag 15 mei 2009, 11.15-13.00, zaal 174 (oud tentamen)
- **Laatste werkcolleges:**
donderdag 14 mei 2009, zaal 302/304 (programmeeropdracht 3)
vrijdag 15 mei 2009, 9.15-10.45, zaal 174 (opgaven)
- **Opgaven/oude tentamens:**
<http://www.liacs.nl/home/graaf/ALGO/>
- **Tentamen:**
dinsdag 2 juni 2009, 10.00–13.00 uur
- **Vragenuur:**
maandag 1 juni 2009, 10.30 uur ????