Tweede college algoritmiek

15 februari 2008

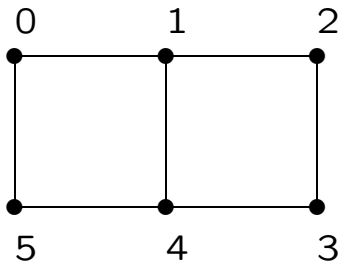
Grafen, bomen en toestand-actie-ruimte

Een graaf G wordt gedefinieerd als een paar (V, E), waarbij V een eindige verzameling is van knopen (vertices) en E een verzameling van paren van knopen: de takken/pijlen (edges). Een tak/pijl (u, v) verbindt de knopen u en v met elkaar.

Terminologie:

- ongerichte/gerichte graaf
- gewogen graaf
- paden en cykels/kringen
- samenhangend
- acyclisch

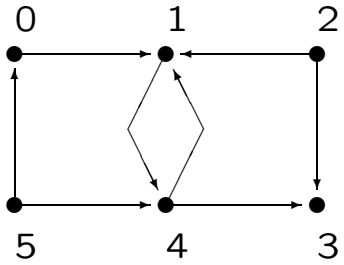
Voorbeelden



1.

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

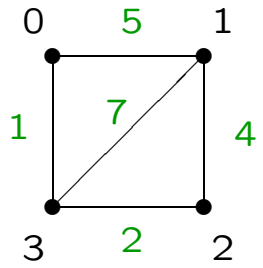
$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 0), (4, 1)\}$



2.

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

$E = \{(0, 1), (2, 1), (2, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 0), (4, 1), (1, 4)\}$



3.

$V = \{0, 1, 2, 3\}$;

$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (0, 3), (1, 3)\}$

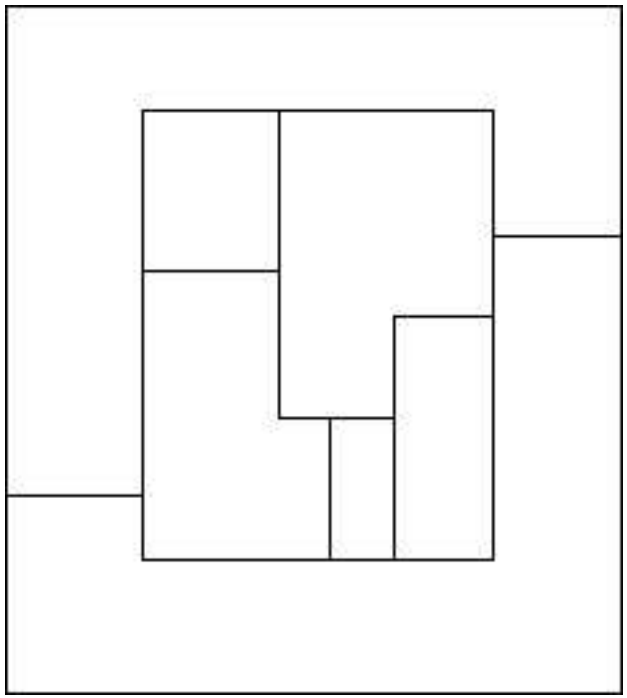
Een pad van u naar v is een rij knopen waarvoor geldt dat tussen elk tweetal opeenvolgende knopen uit die rij een tak zit (resp. een pijl loopt van de ene naar de volgende knoop).
De lengte van een pad = het aantal takken op dat pad = het aantal knopen - 1.
Als alle knopen verschillend zijn heet het pad **enkelvoudig**.

Een kring is een pad met lengte > 0 dat begint en eindigt in dezelfde knoop en dat geen enkele tak meer dan één keer bevat.

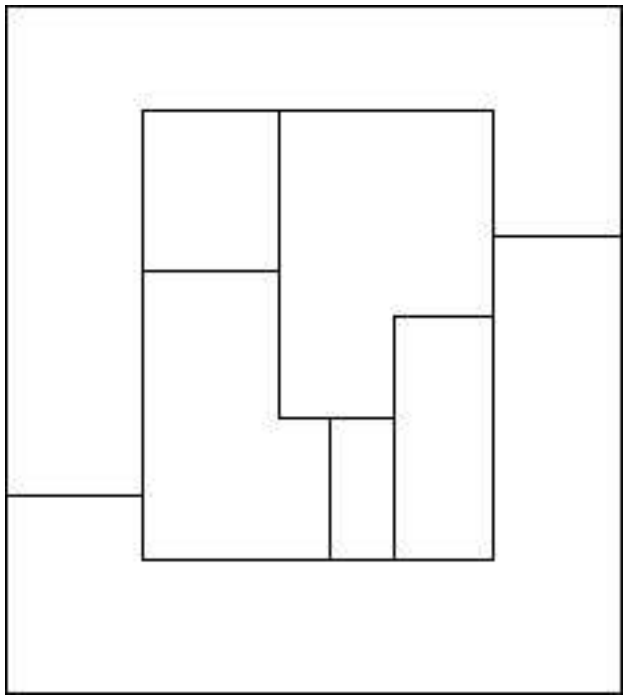
Een ongerichte graaf heet samenhangend als er tussen elk tweetal knopen u en v een pad loopt.

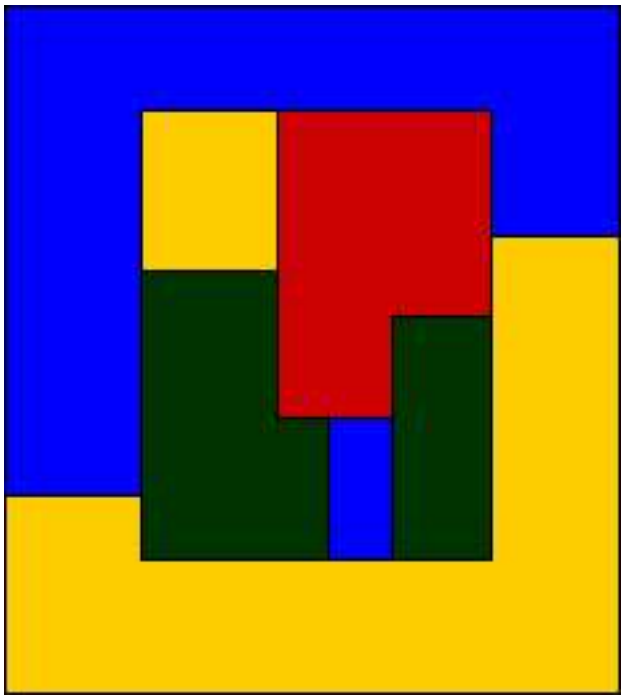
Een graaf die geen kringen bevat heet acyclisch.

Kleur de landkaart met maximaal vier kleuren onder de restrictie dat buurlanden een verschillende kleur hebben:



Kleuring van de landkaart met maximaal vier kleuren onder de restrictie dat buurlanden een verschillende kleur hebben:





Adjacency matrix: de **ongerichte** graaf wordt gerepresenteerd door een tweedimensionaal array `int inhoud[n][n]` (n het aantal knopen), waarbij `inhoud`$[i][j]$ aangeeft of er een tak tussen i en j zit.

Adjacency list: de **ongerichte** graaf wordt gerepresenteerd door een eendimensionaal array `buur* inhoud[n]` (n het aantal knopen), waarbij `inhoud`$[i]$ de ingang is tot een lijst van buren van knoop i.

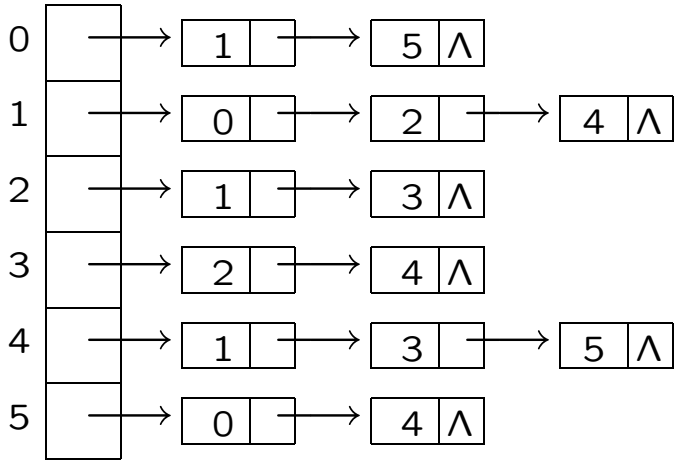
Adjacency list representatie in C++:

```
struct buur {
  int knoopnummer;
  buur* volgende;
}
buur* inhoud[n];
```

Adjacency matrix en adjacency list voor voorbeeldgraaf **1**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adjacency matrix



adjacency list

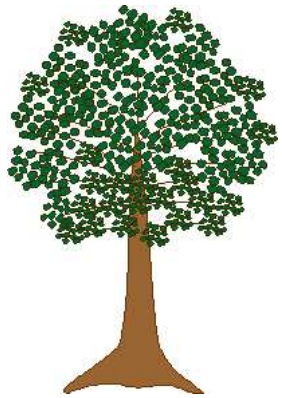
Geef een algoritme dat bepaalt of er in een gegeven ongerichte graaf hooguit twee knopen zijn met oneven graad.

```
// het array graaf (buur* graaf[n]) bevat de ongerichte graaf
totaal = 0;
for ( knoop = 0; knoop < n; knoop++ ) {
    teller = 0;
    hulp = graaf[knoop];
    while ( hulp != null ) { // buurlijst aflopen
        teller++;
        hulp = hulp->volgende;
    }
    if ( teller%2 == 1 )   // oneven
        totaal++;
} // for
if ( totaal <= 2 )
    cout << " hooguit twee ... " << endl;
else
    cout << " meer dan twee ... " << endl;
```

Definitie: een boom is een samenhangende (= uit één stuk bestaande) ongerichte graaf zonder cykels (= kringen).

Wijs een speciale knoop aan, de *wortel*. Teken de wortel bovenaan en alle paden vanuit de wortel naar beneden: dit geeft een hiërarchische structuur die lijkt op een stamboom. Dit heet ook wel een georiënteerde boom. Meestal spreken we gewoon van een boom.

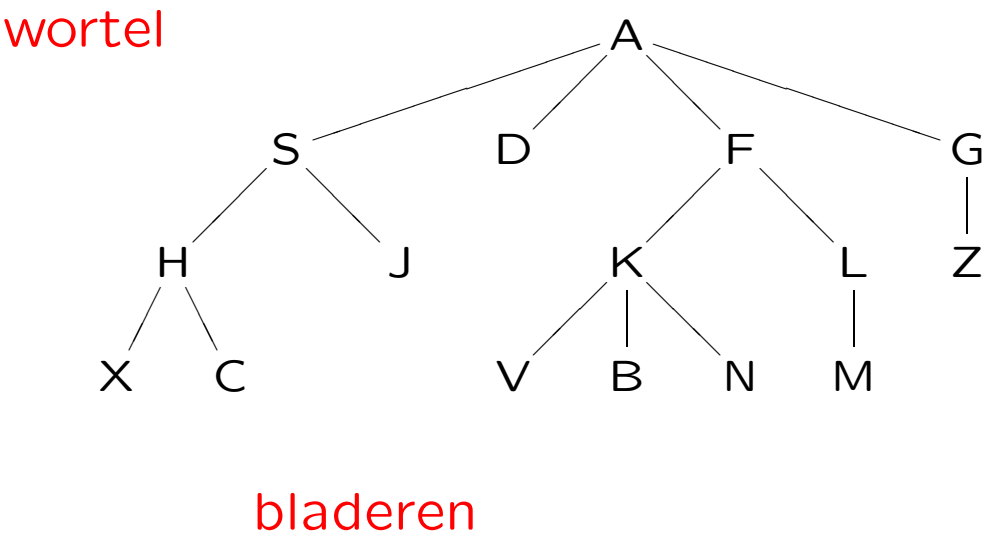
Stamboomterminologie: kind $\longleftrightarrow$ ouder, afstammeling $\longleftrightarrow$ voorouder.



In een georiënteerde boom hebben we dus ouder-kind relaties tussen knopen.

Voorbeeldboom

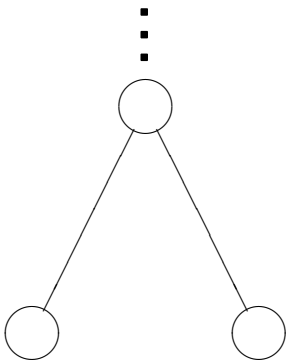
Terminologie: takken, knopen, nivo, hoogte, wortel, bladeren $\longleftrightarrow$ interne knopen



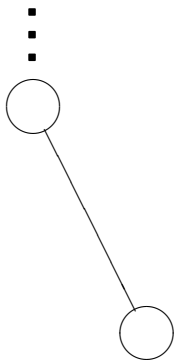
De wortel (hier A) is de *enige* ingang tot de boom.

- Een acyclische graaf die niet samenhangend is heet een bos. Het is namelijk een collectie bomen.
- Voor bomen geldt: aantal takken = aantal knopen - 1.
- Een geordende boom is een boom waarin van elke knoop de kinderen geordend zijn: oudste kind, een na oudste kind, ..., jongste kind.
- Onderstaande bomen zijn als georiënteerde bomen wel gelijk, maar als geordende georiënteerde bomen niet:

Een binaire boom is een boom waarin elke knoop ofwel nul, ofwel één ofwel twee kinderen heeft; als een knoop twee kinderen heeft dan is het ene kind het **linkerkind**, het andere het **rechterkind**; als een knoop één kind heeft, dan is dit ofwel een linkerkind, ofwel een rechterkind.

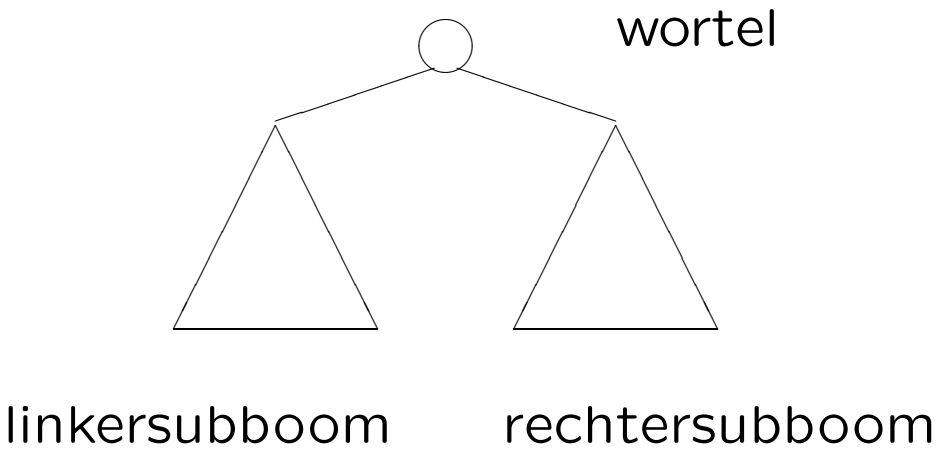


linkerkind rechterkind



één kind: rechterkind

Recursieve definitie: een binaire boom is een eindige verzameling knopen die ofwel leeg is, ofwel bestaat uit een speciale knoop (de wortel) en twee disjuncte verzamelingen knopen die samen de rest van alle knopen vormen. Die knoopverzamelingen vormen beide ook weer een binaire boom: de linkersubboom en de rechtersubboom.



```
class knoop {  // een struct mag ook
  public:
    knoop ( ) {  // constructor
      info = 0; links = NULL; rechts = NULL; }
    int info;
    knoop* links;
    knoop* rechts;
};  // knoop
```

De binaire boom wordt gerepresenteerd door middel van een pointer naar de wortel:

```
knoop* wortel; // de ingang tot de binaire boom
```

Netter om een klasse te gebruiken: zie Programmeermethoden

WLR (preorde):

bezoek wortel
doorloop linkersubboom WLR
doorloop rechtersubboom WLR

LWR (symmetrisch):

doorloop linkersubboom LWR
bezoek wortel
doorloop rechtersubboom LWR

LRW (postorde): analoog

```
void preorde (knoop* root) {
  if ( root != NULL ) {
    cout << root->info << endl;
    preorde (root->links);
    preorde (root->rechts);
  }  // if
}  // preorde

void symmetrisch (knoop* root) {
  if ( root != NULL ) {
    symmetrisch (root->links);
    cout << root->info << endl;
    symmetrisch (root->rechts);
  }  // if
}  // symmetrisch
```

We tellen *recursief* het aantal knopen van een binaire boom met ingang wortel.
Aanroep: `int tellen = aantal (wortel);`

```
int aantal (knoop* root) {
  if ( root == NULL )       // lege boom
    return 0;
  else
    return ( 1 + aantal (root->links)
               + aantal (root->rechts) );
}  // aantal
```

Merk op dat hier eigenlijk een preorde-wandeling wordt gedaan.

We breken de binaire boom met ingang wortel helemaal af: hiertoe wordt eerst de linkersubboom (recursief) weggegooid, daarna de rechtersubboom en ten slotte de wortel zelf. Aanroep: `breekaf (wortel);`

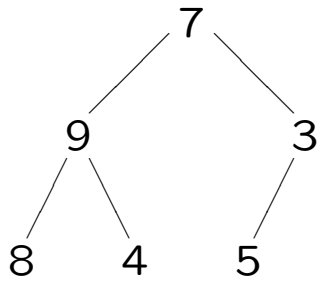
```
void breekaf (knoop* & root) {
  if ( root != NULL ) {
    breekaf (root->links);      L
    breekaf (root->rechts);     R
    delete root;                W
    root = NULL;
  }  // if
} // breekaf
```

- Voor de hoogte h van een binaire boom met n knopen geldt: $\lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 \leq h \leq n - 1$

- Een complete binaire boom is een binaire boom waarbij alle nivo's geheel vol zitten, behalve eventueel het onderste. Op het onderste nivo mogen alleen de meest rechter knopen missen.

- Een binaire zoekboom is een binaire boom waarbij voor elke knoop geldt dat de waarde in die knoop groter is dan alle waarden in zijn linkersubboom, en kleiner dan alle waarden in zijn rechtersubboom.

Complete binaire boom:

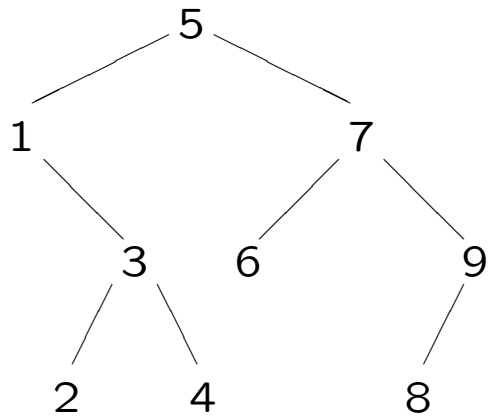


$\Longleftrightarrow$ 7 9 3 8 4 5

Binaire zoekboom:

LWR

1 2 3 4 5 6 7 8 9



Probleem $\longrightarrow$ Toestand-actie-ruimte

Een toestand-actie-ruimte (toestand-actie-diagram, state transition diagram, toestandsruimte, state space)

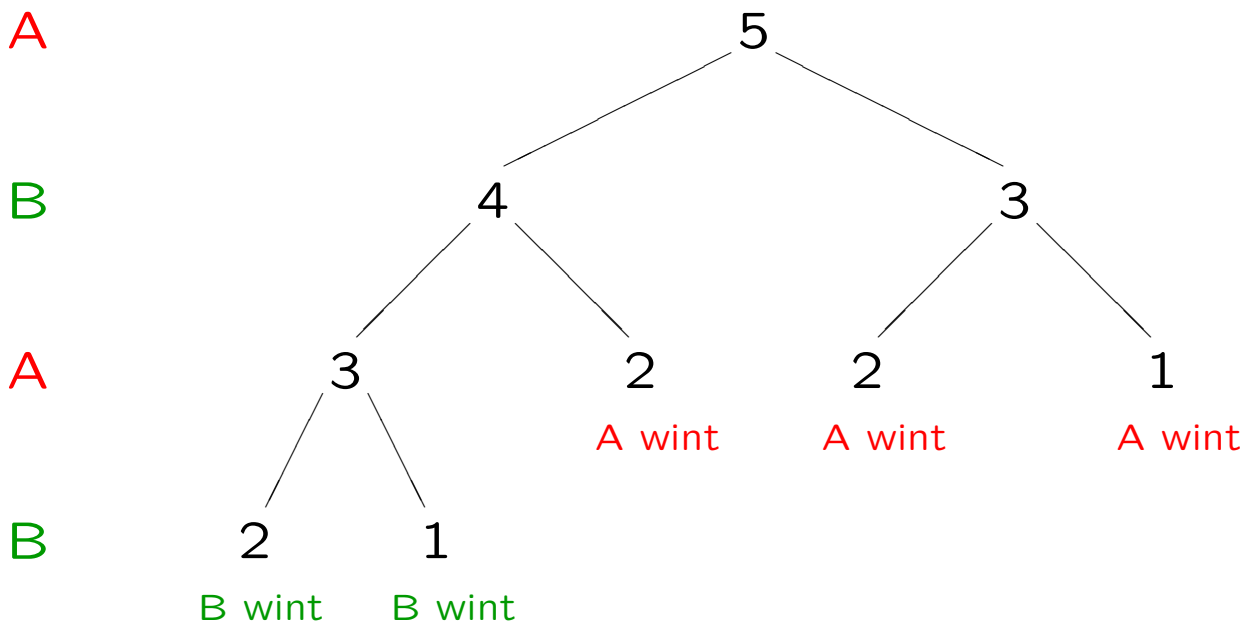
- *Bestaat uit* alle mogelijke toestanden en acties
- Begintoestand, eindtoestand(en)
- Een actie veroorzaakt een overgang van de ene (toegelaten) toestand naar een andere
- *Oplossing* van het probleem: een opeenvolging van acties die van de begintoestand naar een eindtoestand leiden

Voorbeeld 1: NIM

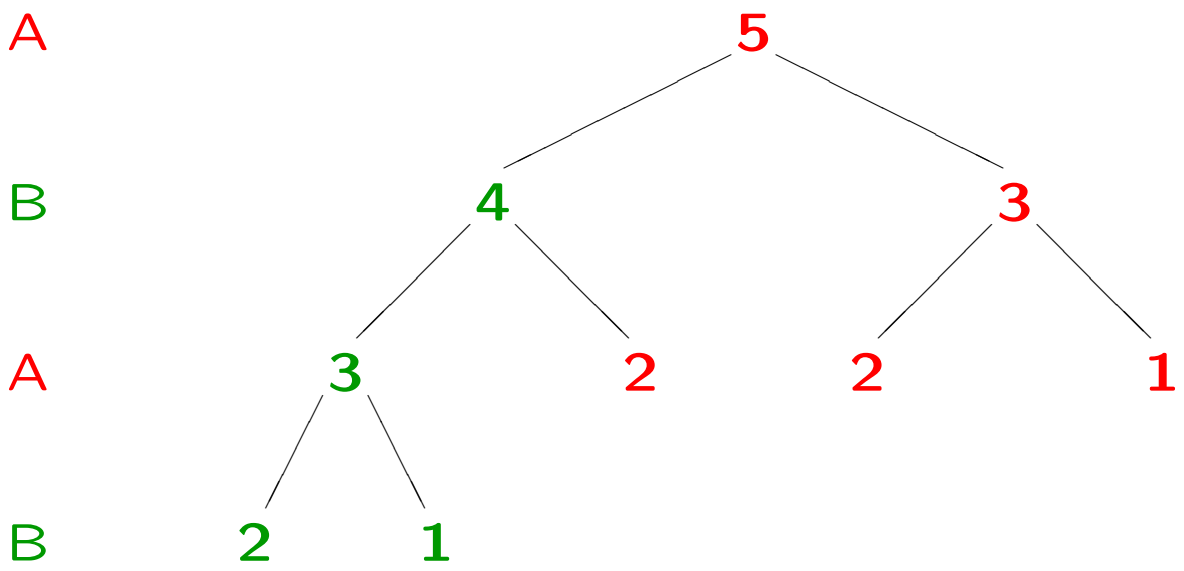
- We beginnen met één stapel van n lucifers (begintoestand)
- Er zijn twee spelers: A en B
- De spelers pakken om de beurt 1 of 2 lucifers (acties)
- Het spel is afgelopen als er geen lucifers meer op de stapel liggen (eindtoestand)
- De speler die de laatste lucifer(s) pakt heeft gewonnen

Gevraagd: is het spel winnend voor degene die begint?

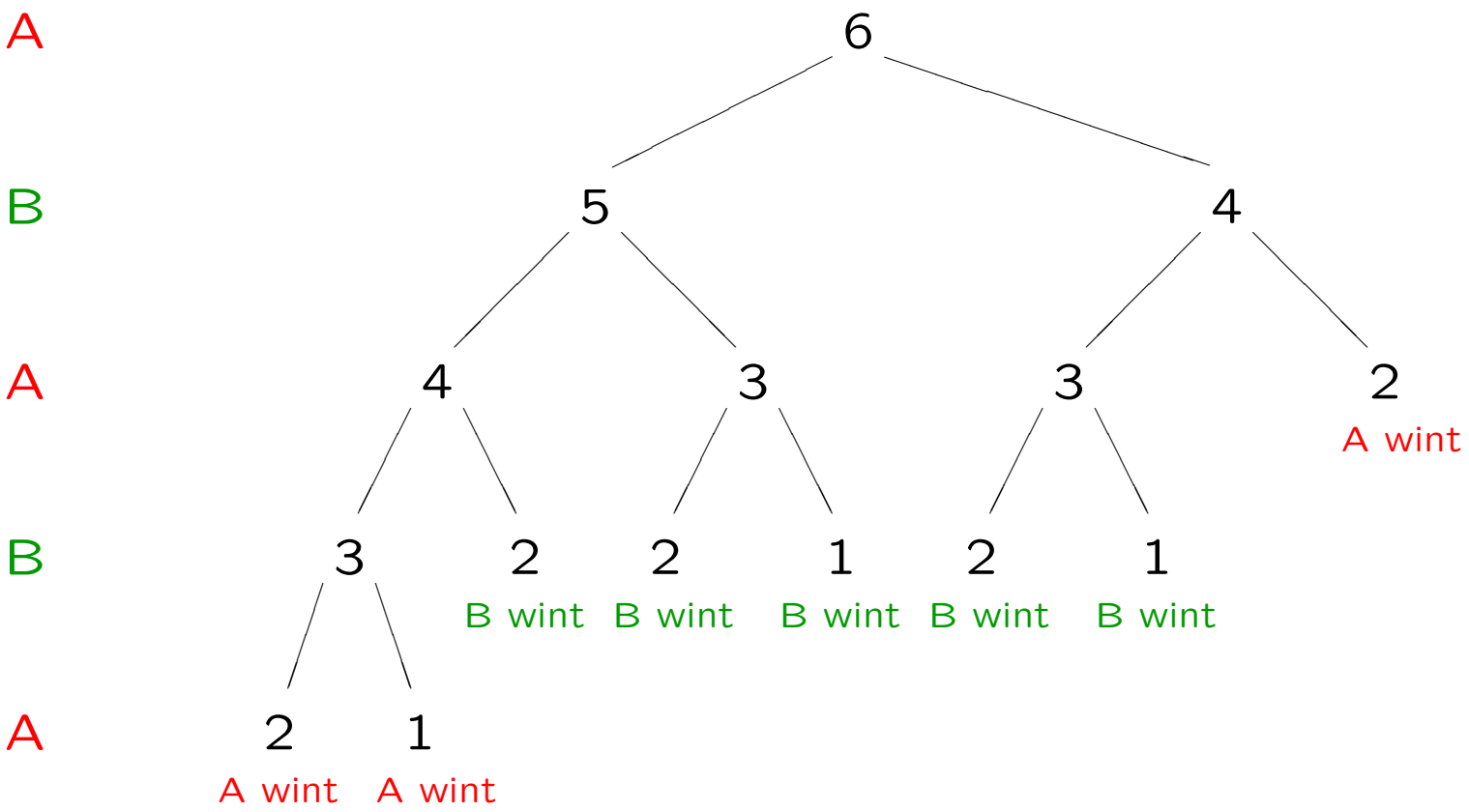
toestand-actie-ruimte (spelboom) $n = 5$



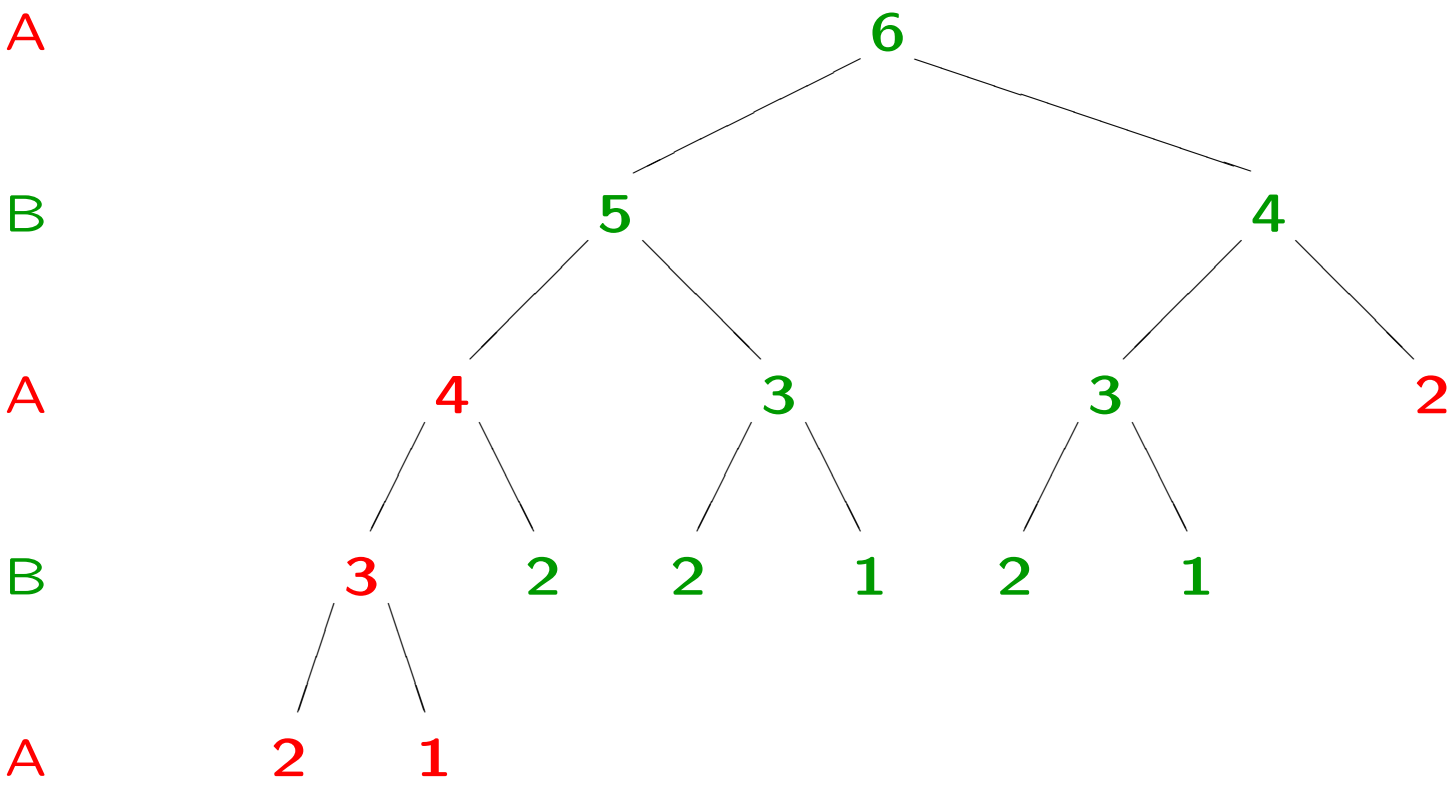
Winnend voor A.
Winnende zet: 2 lucifers wegnemen



toestand-actie-ruimte (spelboom) $n = 6$



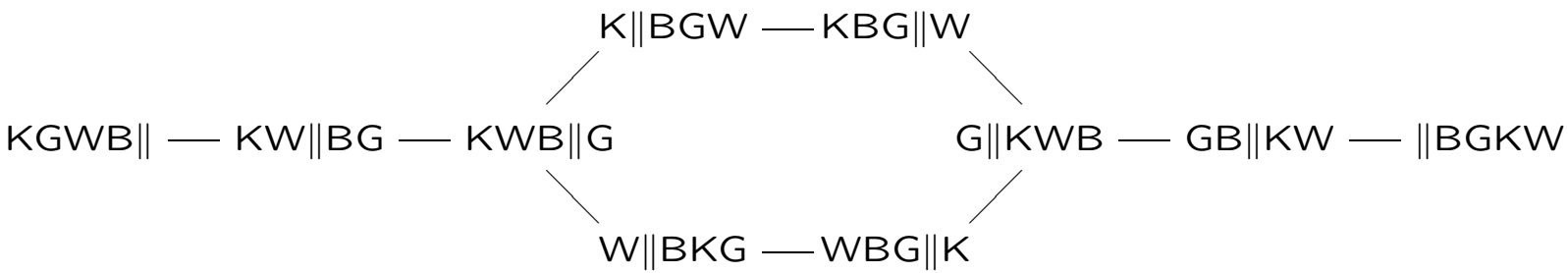
A kan niet winnen (bij perfect spel van B)



Voorbeeld 2: Old world puzzle (Ex. 1.2.1.)

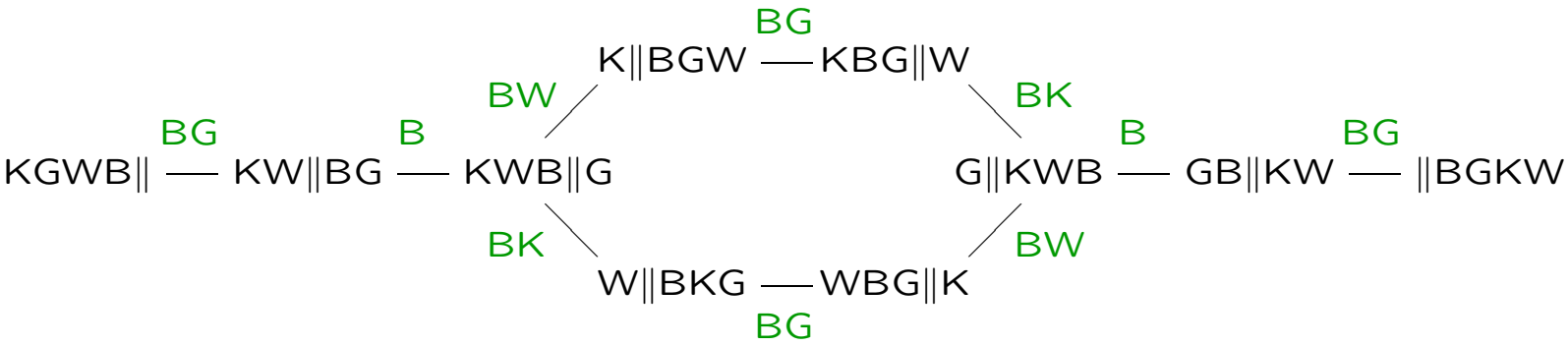
We hebben een kool, een geit, een wolf en een boer. Deze moeten met een bootje van de ene kant van de rivier naar de andere. In het bootje kan alleen de boer met één ander iets. Als de boer er niet bij is zal de wolf de geit opeten en de geit de kool. De boer is de enige die de boot kan "besturen".

Vraag: Hoe kan alles naar de andere oever verplaatst worden?



Merk op: de boot ligt altijd aan de oever waar de boer zich bevindt.

De oplossing is een kortste pad van de begintoestand naar de eindtoestand: hier zijn er twee, bij beide moet de boer 7 keer de rivier oversteken.



Merk op: de boot ligt altijd aan de oever waar de boer zich bevindt.

De oplossing is een kortste pad van de begintoestand naar de eindtoestand: hier zijn er twee, bij beide moet de boer 7 keer de rivier oversteken.

Een leuke variant op dit probleem is het volgende:

We hebben drie professoren en drie studenten. Deze moeten allemaal met een bootje van de ene kant van de rivier naar de andere. In het bootje kunnen hooguit twee personen. Op beide oevers mogen de professoren niet in de meerderheid zijn, anders worden de studenten nerveus.

Vraag: Hoe kan iedereen naar de andere oever verplaatst worden?

Merk op dat in tegenstelling tot het boer-wolf-geit-kool-probleem hier iedereen de boot kan "besturen". Er moet nu dus in een toestand worden aangegeven waar de boot ligt.

Er zijn 4 verschillende oplossingen, elk met 11 keer overvaren.

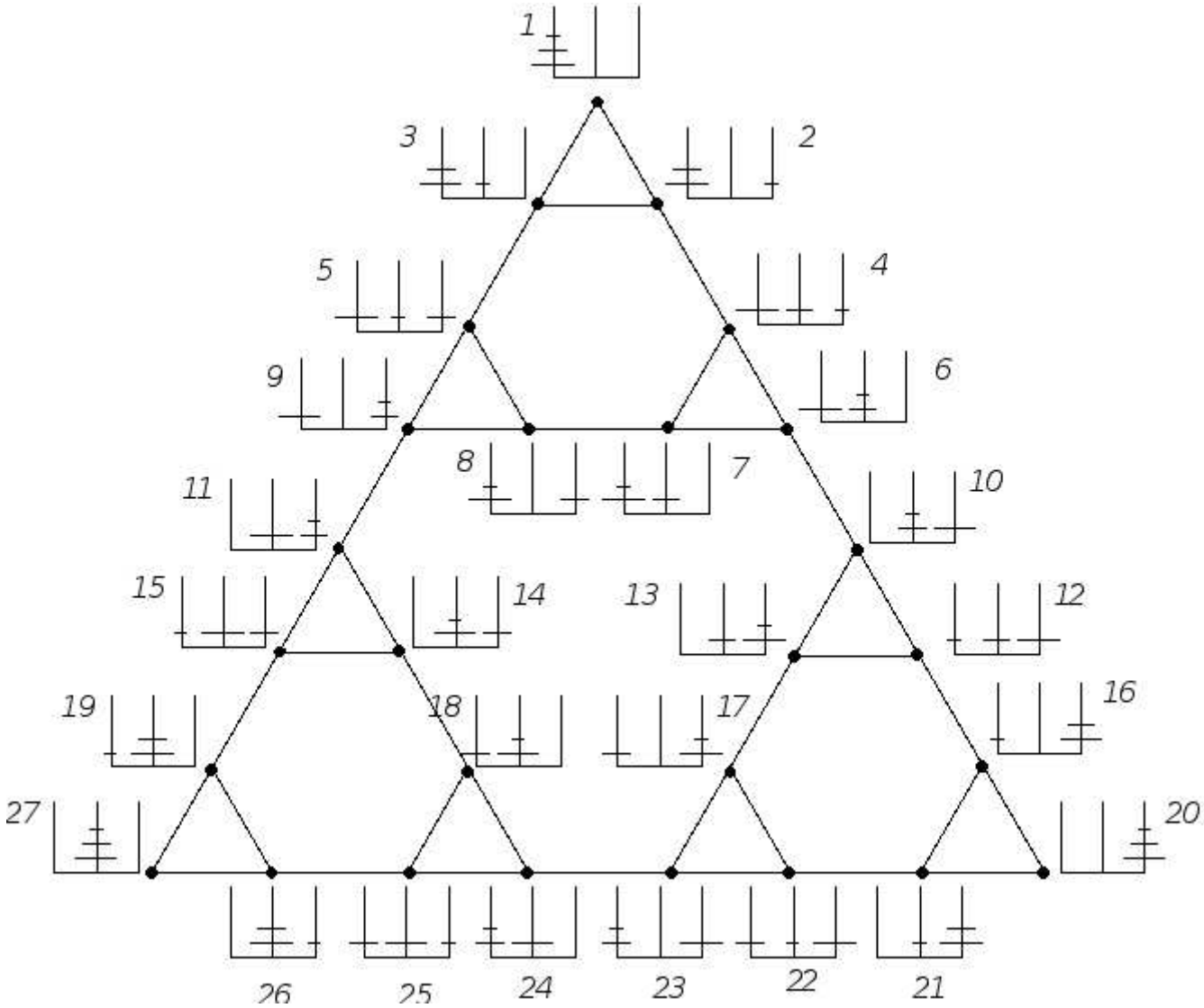
Voorbeeld 3: Torens van Hanoi

Gegeven n ($n \geq 1$) schijven, alle verschillend in grootte, en 3 palen. In de beginsituatie liggen alle schijven boven op elkaar om één paal, waarbij er geen grotere schijf op een kleinere ligt. De andere 2 palen zijn leeg.

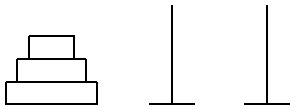
Opdracht: Breng de hele toren (zo snel mogelijk) naar een van de lege palen door het een voor een verplaatsen van schijven van de ene paal naar de andere. Alleen de *bovenste* schijf van een stapel kan verzet worden, en deze mag alleen *bovenop* een andere stapel gelegd worden. *Restrictie*: er mag nooit een grotere schijf op een kleinere gelegd worden.

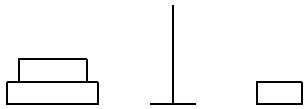
Een **toestand** is in dit geval een verdeling van de schijven over de palen, waarbij (als gevolg van de restrictie) geen grotere schijf op een kleinere ligt. Een **actie** is het verplaatsen van een schijf volgens de spelregels.

Toestand-actie-ruimte $n = 3$

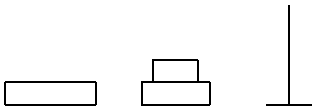


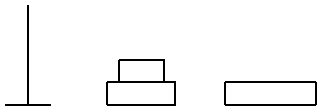
Optimale oplossing voor $n = 3$.

1. 

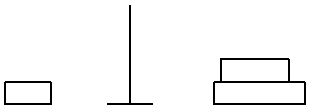
2. 

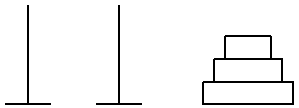
3. 

4. 

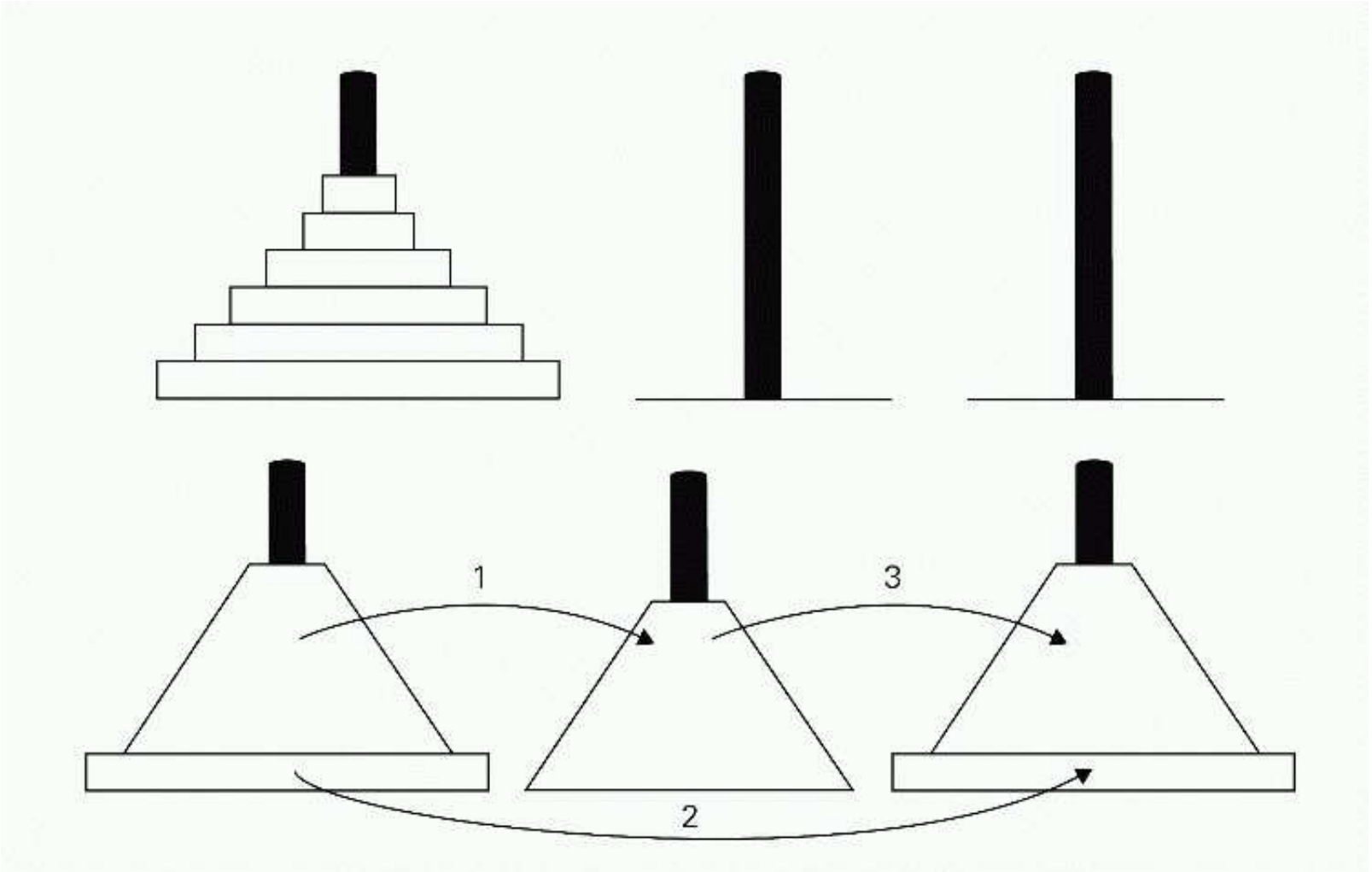
5. 

6. 

7. 

8. 

Oplossing Hanoi algemeen



Recursieve oplossing van de Torens van Hanoi

- **Werkcollege:**

  donderdag 21 februari 2008, 9.15-11.00, in computerzaal 306/308

- **Opgaven:**

  zie http://www.liacs.nl/home/graaf/ALGO/algo2008.html

- **Volgend college:**

  vrijdag 22 februari 2008