Twaalfde college algoritmiek

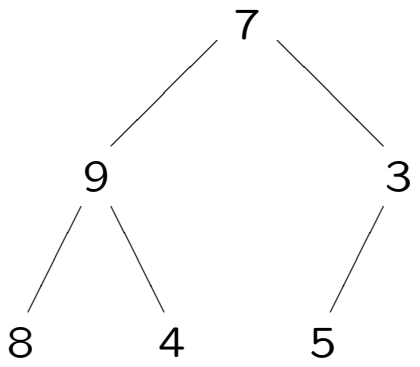
11 mei 2007

Heapsort

Complete binaire boom

- Een complete binaire boom is een binaire boom waarbij alle nivo's geheel vol zitten, behalve eventueel het onderste. Op het onderste nivo mogen alleen de meest rechter knopen missen.

- Voorbeeld:



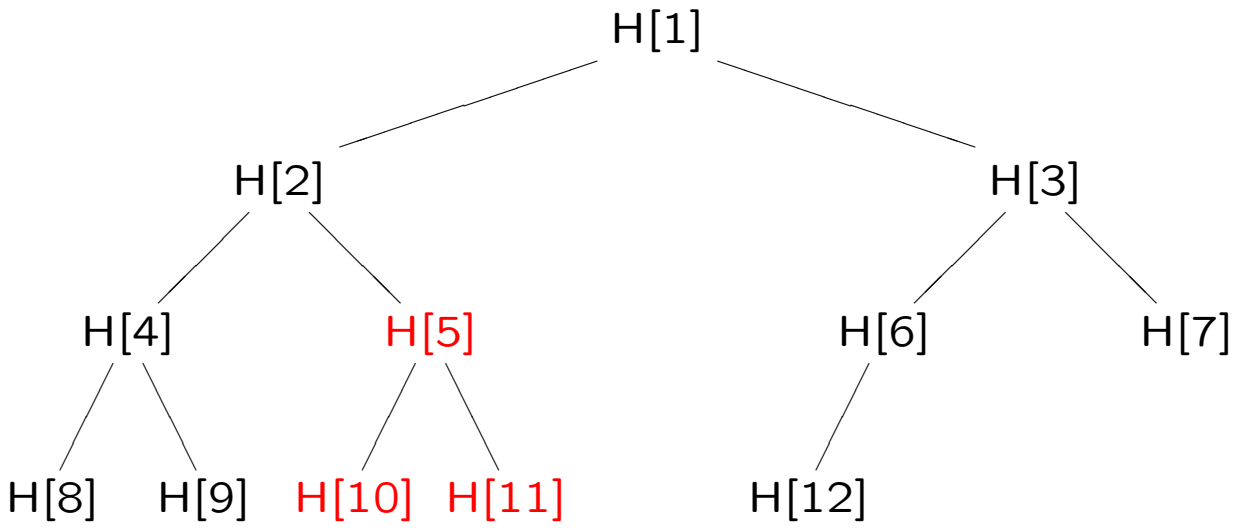
$\Longleftrightarrow$

7 9 3 8 4 5

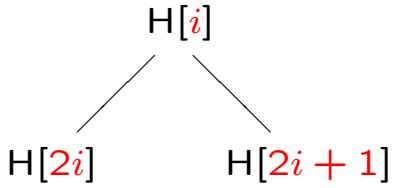
representatie als array

complete binaire boom

Boom $\leftrightarrow$ array



$\Updownarrow$ nivo-orde



H[1] H[2] H[3] H[4] H[5] H[6] H[7] H[8] H[9] H[10] H[11] H[12]

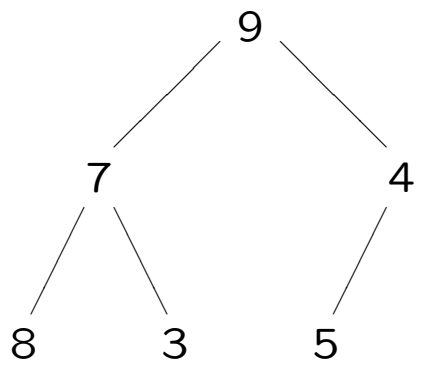
Definitie
Een heap (hoopstructuur) is een binaire boom met de volgende twee eigenschappen:

1. Vorm: de binaire boom is compleet

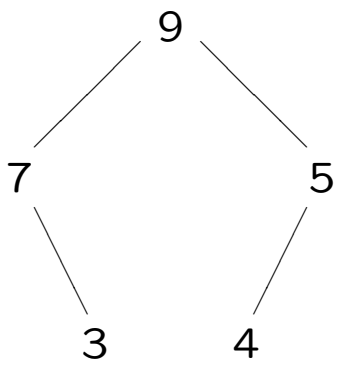
2. Inhoud: de heap-eigenschap geldt, d.w.z. in elke knoop geldt dat de waarde opgeslagen in die knoop groter dan of gelijk is aan(*) de waarde in zijn kinderen

Langs elk pad van de wortel tot een blad zijn de sleutels in de knopen dus van groot naar klein geordend.

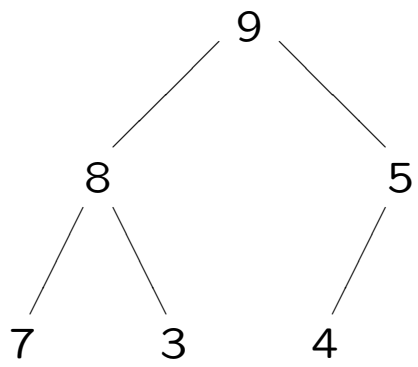
(*) we spreken dan wel van een max-heap; een min-heap wordt analoog gedefinieerd



1. geen heap



2. geen heap



3. wel heap

1. ouder $\geq$ kinderen geldt niet in elke knoop

2. niet compleet

3. compleet en ouder $\geq$ kinderen

1. Gegeven n, dan bestaat er precies één **complete** binaire boom met n knopen. Deze heeft hoogte $\lfloor \lg n \rfloor$.

2. De wortel van een heap bevat altijd de grootste waarde.

3. Voor elke knoop van een heap geldt: de subboom met die knoop als wortel is weer een heap.

4. Een heap wordt gerepresenteerd door een eendimensionaal array H, met de inhoud van de n knopen op posities 1 t/m n.

   - ouderknopen (interne knopen) corresponderen met de posities 1 t/m $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; bladeren met $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ t/m n.

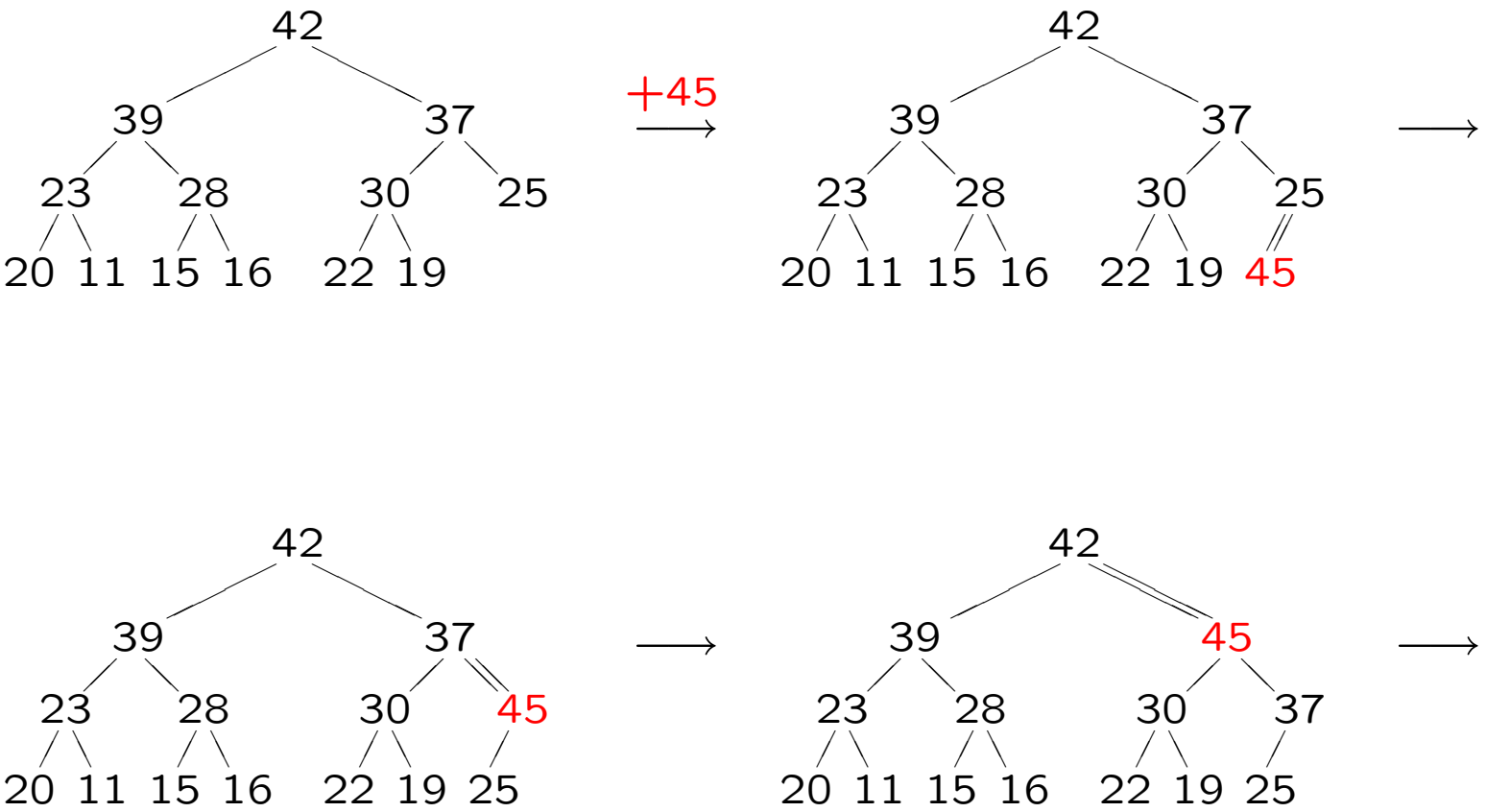
   - de kinderen van $H[i]$ $(i = 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ zijn $H[2i]$ en $H[2i+1]$; de ouder van $H[i]$ $(i = 2, \ldots, n)$ is $H[\ \lfloor i/2 \rfloor\ ]$.

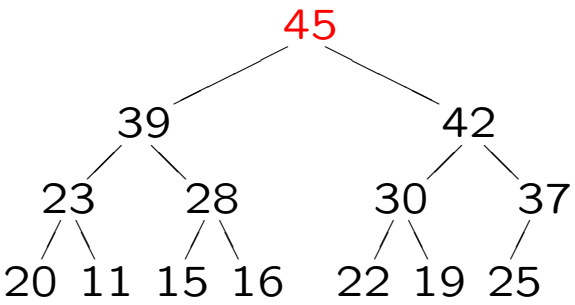
Wanneer de waarde in een knoop verandert (of een waarde wordt verwijderd/toegevoegd) zal i.h.a. de heap-eigenschap niet meer gelden. Er zijn twee manieren (beide $O(\lg n)$, met n het aantal knopen van de heap) om die weer te herstellen, afhankelijk van de situatie.

1. waarde in knoop $>$ waarde in ouder: herhaald verwisselen met ouder totdat de heap-eigenschap hersteld is (waarde borrelt omhoog)

2. waarde knoop $<$ waarde van (ten minste een der) kinderen: herhaald verwisselen met grootste kind totdat de heap-eigenschap hersteld is (waarde zakt omlaag)

Toevoegen -1-


42
39
37
23
28
30
25
20 11 15 16
22 19
+45
42
39
37
23
28
30
25
20 11 15 16
22 19 45
42
39
37
23
28
30
45
20 11 15 16
22 19 25
42
39
45
23
28
30
37
20 11 15 16
22 19 25



Heap-eigenschap weer hersteld

42 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22 19

⇓

42 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22 19 45

⇓

42 39 37 23 28 30 45 20 11 15 16 22 19 25

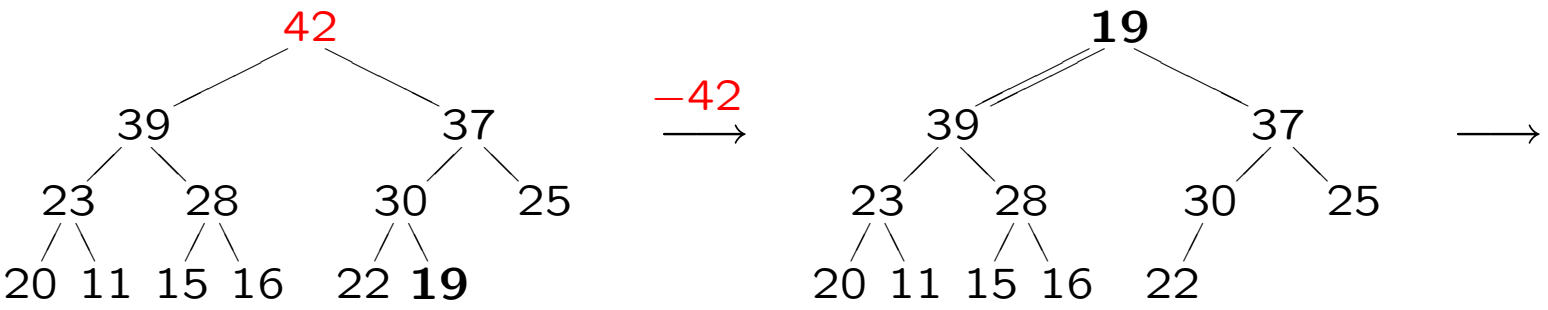
⇓

42 39 45 23 28 30 37 20 11 15 16 22 19 25

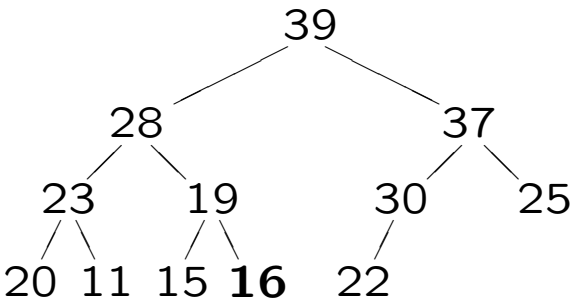
⇓

45 39 42 23 28 30 37 20 11 15 16 22 19 25

Verwijderen maximum -1-



Verwijderen maximum -2-



Heap-eigenschap weer hersteld

42 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22 **19**

⇓

19 39 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22

⇓

39 **19** 37 23 28 30 25 20 11 15 16 22

⇓

39 28 37 23 **19** 30 25 20 11 15 16 22

⇓

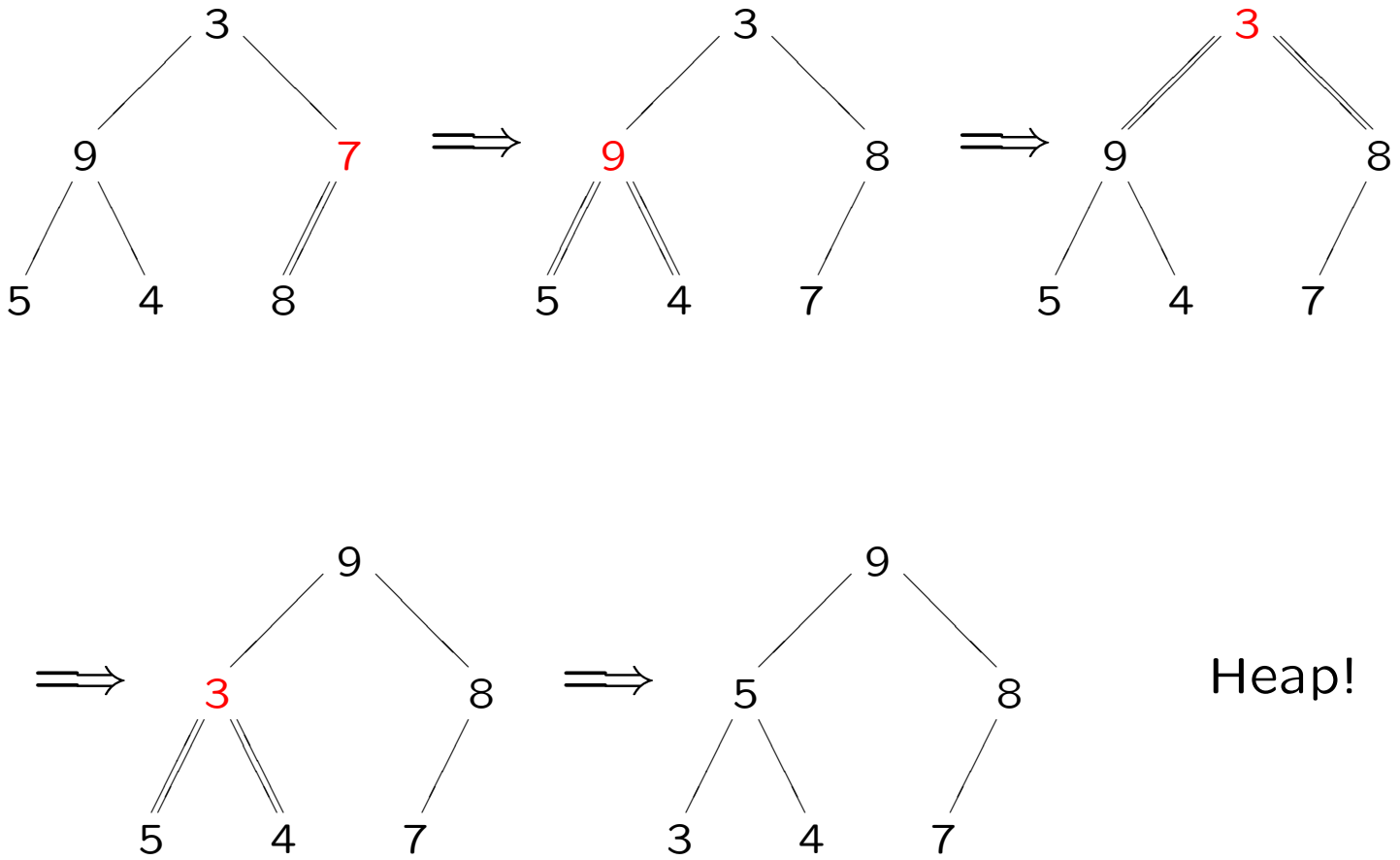
39 28 37 23 **19** 30 25 20 11 15 16 22

Constructie van een heap uit een gegeven rij (array H) sleutels (getallen bijv.):

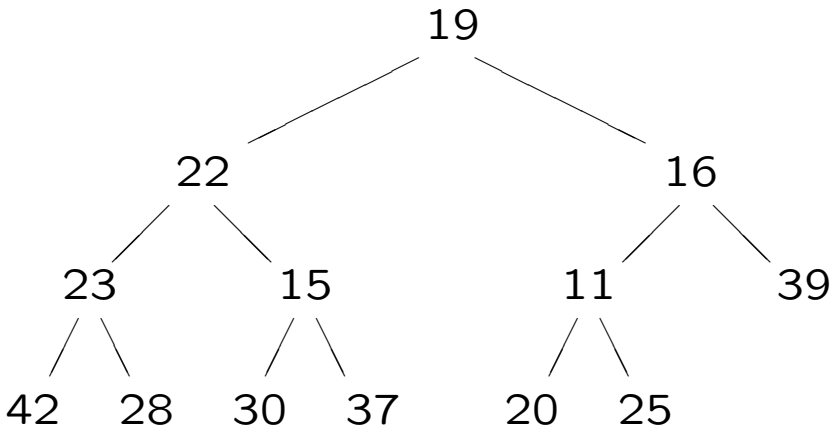
- Bottom up (heapify): beginnend bij $H[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$, de laatste ouderknoop, en zo teruglopend, wordt in alle subbomen met de ouderknopen als wortel de heap-eigenschap hersteld via omlaag zakken van de (inhoud van die) ouderknoop

- Top down: beginnend bij de wortel en door telkens een knoop meer bij de heap te betrekken wordt de heap-eigenschap steeds hersteld via omhoog borrelen van de (inhoud van de) nieuwe knoop

- Heapify is $O(n)$; de andere methode is $O(n \lg n)$

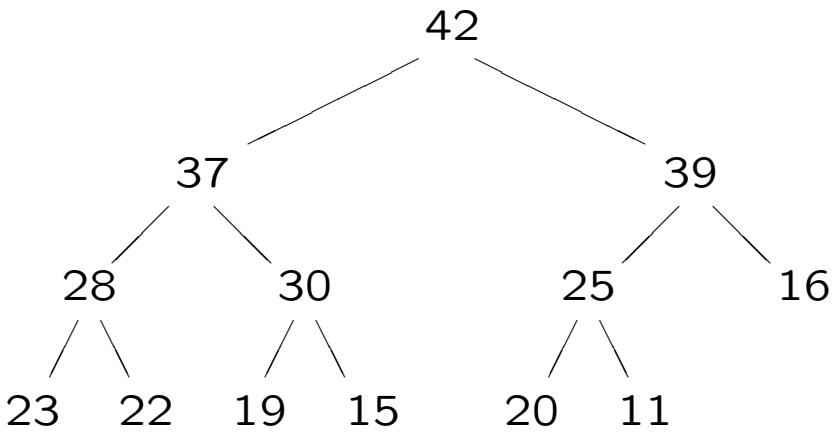

3
9
7
5
4
8
3
9
8
5
4
7
3
9
8
5
4
7
9
3
8
5
4
7
9
5
8
3
4
7
Heap!

Groter voorbeeld



heapify

$\longrightarrow \cdots \longrightarrow$



```
for i := ⌊ n/2 ⌋ downto 1 do
        k := i; v := H[k];
        heap := false;
        while not heap and 2 * k ≤ n do // geen blad
            j := 2 * k; // linkerkind
            if j < n then // 2 kinderen
                if H[j] < H[j + 1] then
                    j := j + 1; fi // selecteer grootste kind
                if  v ≥ H[j] then
                    heap := true;
                else
                    H[k] := H[j]; k := j; fi
            fi
        od
        H[k] := v;
od
```

1. Maak een heap van het gegeven array

2. Verwijder nu herhaald ($n-1$ keer) de grootste waarde uit de wortel:

   - verwissel deze met de laatste waarde uit de heap
   - verlaag de grootte van de heap met 1
   - zorg dat overal de heap-eigenschap weer geldt door de nieuwe waarde uit de wortel te laten zakken

Het array wordt zo oplopend gesorteerd.
Complexiteit: $O(n \lg n)$.

Sorteer het array 3 9 7 5 4 8 met heapsort.

Fase 1

3 9 7 5 4 8 $\longrightarrow$
3 9 8 5 4 7 $\longrightarrow$
9 3 8 5 4 7 $\longrightarrow$
9 5 8 3 4 7

Fase 2

9 5 8 3 4 7 $\longrightarrow$
7 5 8 3 4 |9 $\longrightarrow$
8 5 7 3 4 |9 $\longrightarrow$
4 5 7 3 |8 |9 $\longrightarrow$
7 5 4 3 |8 |9 $\longrightarrow$
3 5 4 |7 |8 |9 $\longrightarrow$
5 3 4 |7 |8 |9 $\longrightarrow$
4 3 |5 |7 |8 |9 $\longrightarrow$
3 |4 |5 |7 |8 |9 $\longrightarrow$

- donderdag 24 mei 2007 in zaal 312
- **Opgaven:**

  zie http://www.liacs.nl/home/graaf/ALGO/algo2007.html
- **Laatste college:** vrijdag 25 mei 2007
- **Vragenuur:** maandag 4 juni 2007, 11.00 uur !!
- **Tentamen:** dinsdag 5 juni 2007, 10.00 - 13.00 uur