

# Tiende college algoritmiek

20 april 2007

Gretige algoritmen

- Greed = hebzucht
- Voor oplossen van optimalisatieproblemen
- Oplossing wordt stap voor stap opgebouwd
- In elke stap wordt een **gretige** keuze gemaakt waarmee de huidige deeloplossing wordt uitgebreid
- Dat wil zeggen: een (locale) keuze die op dat moment de beste lijkt (de grootste directe winst oplevert)
- De vraag is of dat leidt tot een globaal optimale oplossing

De oplossing wordt dus opgebouwd via een serie achter-eenvolgende **gretige keuzes**. Deze keuzes

- zijn consistent met de restricties van het probleem
- zijn lokaal optimaal, d.w.z. de best uitziende keuze in die stap
- zijn **onherroepelijk**: keuzes kunnen niet meer worden teruggedraaid

Een gretig algoritme ziet er dus ruwweg zo uit:

```
while nog niet alle stappen zijn gedaan do  
    doe een keuze die in eerste instantie de grootste  
    winst lijkt op te leveren  
od
```

Uitbreiden van deeloplossingen moet uiteraard wel steeds in overeenstemming met de geldende restricties.

Soms leveren gretige algoritme een optimale oplossing, en soms/vaak niet. In dat geval is de gretige strategie een **heuristiek**, die kan leiden tot een goede, maar i.h.a. niet optimale oplossing.

**Gegeven** onbeperkt veel munten van  $d_1, d_2, \dots, d_m$  eurocent, en een te betalen bedrag van  $n$  ( $n \geq 0$ ) eurocent. Alle  $d_i$  zijn  $> 0$  en verschillend.

**Gevraagd:** het minimale aantal munten dat nodig is om het bedrag van  $n$  eurocent te betalen.

**Voorbeeld:**

type munt	waarde
1	1
2	4
3	6

te betalen bedrag: 8

Vier manieren om te betalen:  $6 + 1 + 1$ ;  $4 + 4$ ;  $4 + 1 + 1 + 1 + 1$ ;  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ . Dus het gevraagde minimale aantal is: 2 (twee munten van 4 cent).

Laat  $\text{munt}[i][j]$  het minimale aantal munten zijn dat nodig is om een bedrag van  $j$  eurocent te betalen, wanneer alleen munten van  $d_1, d_2, \dots, d_i$  ( $i \geq 1$ ) worden gebruikt. We zoeken dus  $\text{munt}[m][n]$ .

Dan geldt (want  $d_i$  wordt wel of niet gebruikt):

$$\text{munt}[i][j] = \begin{cases} \min \{ \text{munt}[i-1][j], 1 + \text{munt}[i][j-d_i] \} & \text{als } i > 1, j \geq d_i \\ \text{munt}[i][j] = \text{munt}[i-1][j] & \text{als } i > 1, 0 < j < d_i \\ \infty & \text{als } i = 1, 0 < j < d_1 \\ 1 + \text{munt}[1][j-d_1] & \text{als } i = 1, j \geq d_1 \\ 0 & \text{als } i > 1, j = 0 \end{cases}$$

Een **gretige strategie**:

betaal  $n$  met  $d_1, \dots, d_m$  (voor het gemak oplopend gesorteerd)::

geef de grootste munt  $d_i \leq n$  (restrictie);

// dan is het nog te betalen bedrag zo klein mogelijk

// en dus heb je zo weinig mogelijk munten

// nodig (hoop je)

betaal  $n - d_i$  met  $d_1, \dots, d_i$  .

Bovenstaand algoritme is erg eenvoudig en snel, en levert voor het geval van de gebruikelijke euro-munten (munten van 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 eurocent) het optimale antwoord.

Dit is echter niet het geval voor de muntwaarden uit het voorbeeld.

- Optimale oplossing
  - Muntenprobleem voor de gebruikelijke euromunten
  - Sommige planningsproblemen
  - Kortste paden in een graaf (Dijkstra)
  - Minimale opspannende boom (Prim, Kruskal; zie **Datastructuren**)
  - ....
- Benadering
  - Handelsreizigersprobleem
  - Knapzakprobleem
  - ....

Zie ook Levitin, Exercise 9.1.3.

Gegeven  $n$  jobs, genummerd 1 t/m  $n$ , die allemaal na elkaar door één processor moeten worden uitgevoerd. Van elke job  $i$  is de executietijd  $t_i$  gegeven. De jobs moeten zo na elkaar worden gepland dat de totale hoeveelheid tijd in het systeem van alle jobs samen wordt geminimaliseerd. De tijd die job  $i$  in het systeem doorbrengt is de wachttijd + de executietijd  $t_i$ .

We willen dus

$$T = \sum_{i=1}^n (\text{tijd die job } i \text{ in het systeem doorbrengt})$$

minimaliseren.

De waarde van  $T$  hangt af van de volgorde waarin de jobs door de processor worden uitgevoerd.

**Voorbeeld:**  $n = 3$ ; Jobs: 1, 2, 3 met  $t_1 = 5, t_2 = 10, t_3 = 3$ .

volgorde

$T$

1 2 3	$5 + (5 + 10) + (5 + 10 + 3) = 38$
1 3 2	$5 + (5 + 3) + (5 + 3 + 10) = 31$
2 1 3	$10 + (10 + 5) + (10 + 5 + 3) = 43$
2 3 1	$10 + (10 + 3) + (10 + 3 + 5) = 41$
3 1 2	$3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 10) = 29$
3 2 1	$3 + (3 + 10) + (3 + 10 + 5) = 34$

Stel dat de jobs in de volgorde  $i_1, i_2, \dots, i_n$  worden uitgevoerd. Dan is

$$\begin{aligned} T &= t_{i_1} + (t_{i_1} + t_{i_2}) + (t_{i_1} + t_{i_2} + t_{i_3}) + \dots + (t_{i_1} + t_{i_2} + \dots + t_{i_n}) \\ &= n * t_{i_1} + (n - 1) * t_{i_2} + \dots + 2 * t_{i_{n-1}} + t_{i_n} \end{aligned}$$

Idee: kies in elke stap de job met de kleinste executietijd van de nog resterende jobs. Door die keuze houd je de wachttijd voor de overige jobs op dat moment zo klein mogelijk.

Voor het voorbeeld levert deze gretige strategie de optimale oplossing.

**Algoritme**

Sorteer de jobs in oplopende volgorde van hun executietijd;  
// Dit is de optimale volgorde om de jobs uit te voeren

**Complexiteit**

Sorteren kan in  $O(n \lg n)$  stappen, dus dit algoritme ook.

**Correctheid**

Dit algoritme levert altijd een optimale oplossing. Dit moet wel expliciet bewezen worden.

Hiertoe laten we het volgende zien. Stel dat de volgorde van uitvoering zo is dat er twee jobs  $i_k$  en  $i_{k+1}$  zijn met  $t_{i_k} > t_{i_{k+1}}$  (dus  $i_{k+1}$  wordt direct na  $i_k$  uitgevoerd maar heeft kortere executietijd). Dan krijg je een betere oplossing door de volgorde van deze twee jobs om te keren.

**Gegeven** een verzameling  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  met activiteiten die allemaal gebruik willen maken van een of andere “resource” (bijvoorbeeld een collegezaal). Deze resource kan maar door één activiteit tegelijk gebruikt worden. Activiteit  $i$  vindt plaats gedurende het tijdsinterval  $[b_i, e_i)$ . De begin- en eindtijden  $b_i$  en  $e_i$  zijn voor alle activiteiten bekend.

**Definitie:** activiteiten  $i$  en  $j$  heten **compatibel** als  $[b_i, e_i)$  en  $[b_j, e_j)$  niet overlappen, dus als  $e_i \leq b_j$  of  $e_j \leq b_i$ .

**Opdracht:** vind een zo groot mogelijke deelverzameling van paarsgewijs compatibele activiteiten uit  $A$ .

Gretig algoritme: in elke stap

- wordt een activiteit  $i$  gekozen die compatibel is met de reeds gekozen activiteiten en die op dat moment het beste lijkt (gretige keuze)

Mogelijke gretige keuzes voor het kiezen van activiteit  $i$ :

1. selecteer steeds de activiteit die het eerst begint
2. selecteer steeds de activiteit die het kortste duurt
3. selecteer steeds de activiteit die overlapt met zo min mogelijk andere activiteiten
4. selecteer steeds de activiteit die het eerst eindigt

Welke **gretige keuzes** voor het kiezen van activiteit  $i$  leiden altijd tot een optimale oplossing?

1. selecteer de activiteit die het eerst begint: **werkt niet**
2. selecteer de activiteit die het kortste duurt: **werkt niet**
3. selecteer de activiteit die overlapt met zo min mogelijk andere activiteiten: **werkt niet**
4. selecteer de activiteit die het eerst eindigt: **werkt wel**

```
// neem aan dat  $A$  oplopend gesorteerd is op eindtijd  $e_i$ ,  
// anders eerst even sorteren:  $O(n \lg n)$   
 $A' := \{1\};$   
 $j := 1;$   
// de laatst aan  $A'$  toegevoegde activiteit  
for  $i := 2$  to  $n$  do  
  // loop activiteiten af in volgorde van eindtijd  
  if  $i$  is compatibel met  $A'$  then (*)  
     $A' := A' \cup \{i\};$   
  fi  
od  
//  $A'$  bevat nu een optimale paarsgewijs  
// compatibele deelverzameling van  $A$ 
```

(\*) Merk op:  $i$  is compatibel met  $A'$  als hij compatibel is met de laatst toegevoegde activiteit.

Dus (\*) wordt: if  $b_i \geq e_j$  then

**Correctheid:** moet bewezen worden

**Complexiteit:**  $O(n)$  als  $A$  reeds gesorteerd is

$i$	$b_i$	$e_i$
1	1	4
2	3	5
3	0	6
4	5	7
5	3	8
6	5	9
7	6	10
8	8	11
9	8	12
10	2	13
11	12	14

Optimale oplossing:  $\{1, 4, 8, 11\}$

De **correctheid** van het gretige algoritme volgt uit de volgende twee observaties:

1. Er bestaat een optimale oplossing die met activiteit 1 begint (die met de kleinste eindtijd dus).
2. Stel  $A'$  is een optimale oplossing van het oorspronkelijke probleem met activiteitenverzameling  $A$  die 1 bevat. Dan is  $B' = A' \setminus \{1\}$  een optimale oplossing van het probleem met activiteitenverzameling  $B = \{i \in A : b_i \geq e_1\}$ .

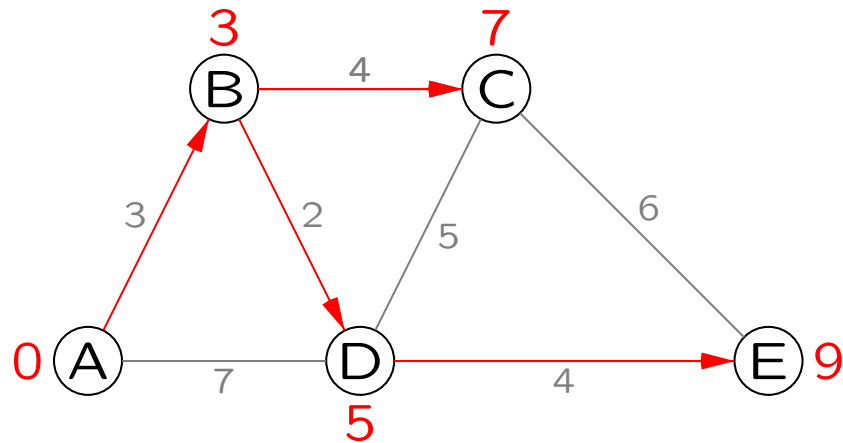
**Gegeven** een graaf  $G$  met gewichten op de takken, en een beginknoop  $s$ . We nemen aan dat alle gewichten  $\geq 0$ .

**Gevraagd:** de kortste paden van  $s$  naar alle andere knopen in de graaf.

**Merk op** dat alle kortste paden samen een boomstructuur vormen.

**Oplossing:** het **algoritme van Dijkstra** is een gretig algoritme, dat de kortste paden van  $s$  naar de andere knopen vindt in volgorde van hun lengte. In elke stap wordt een knoop (en dus het pad van  $s$  naar die knoop) gekozen die het dichtst bij  $s$  ligt.

**Dijkstra:** Edsger W. Dijkstra (1930-2002)



De kortste paden vanuit A zijn:

A  $\longrightarrow$  B: lengte 3

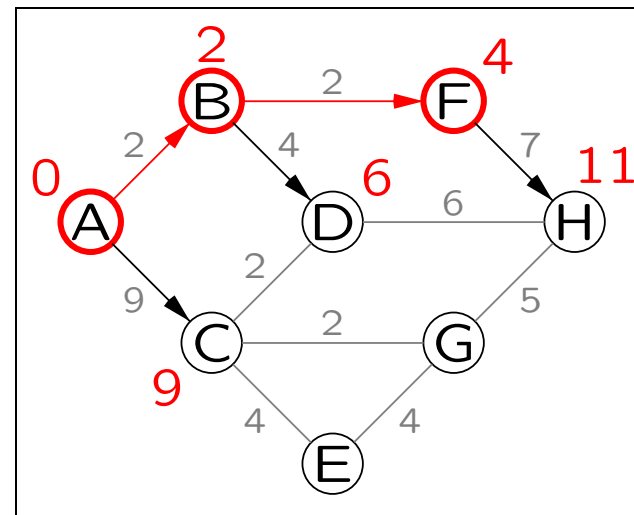
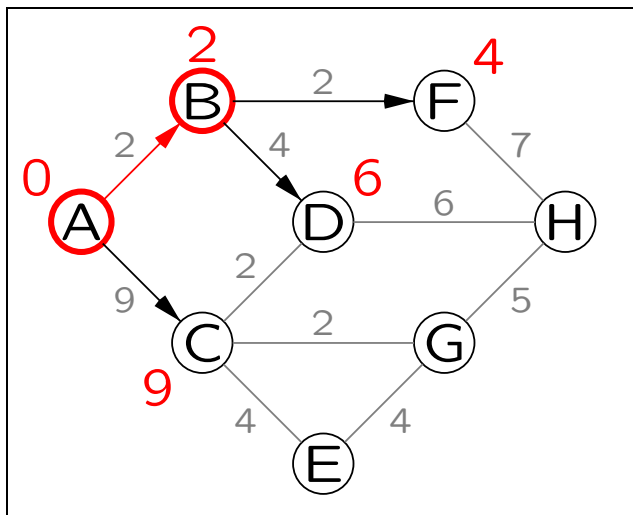
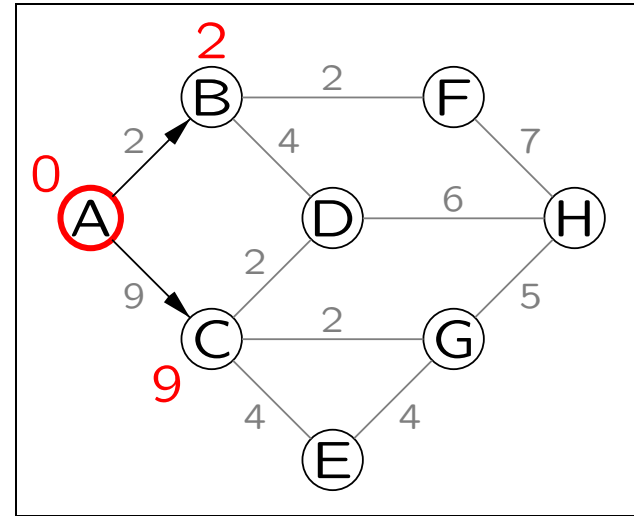
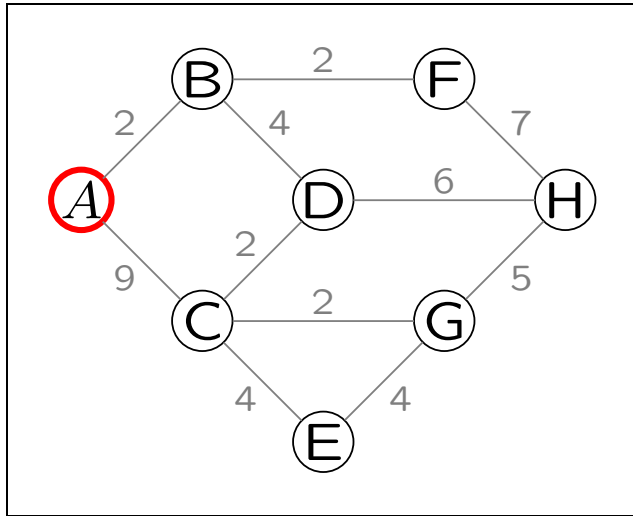
A  $\longrightarrow$  B  $\longrightarrow$  D: lengte 5

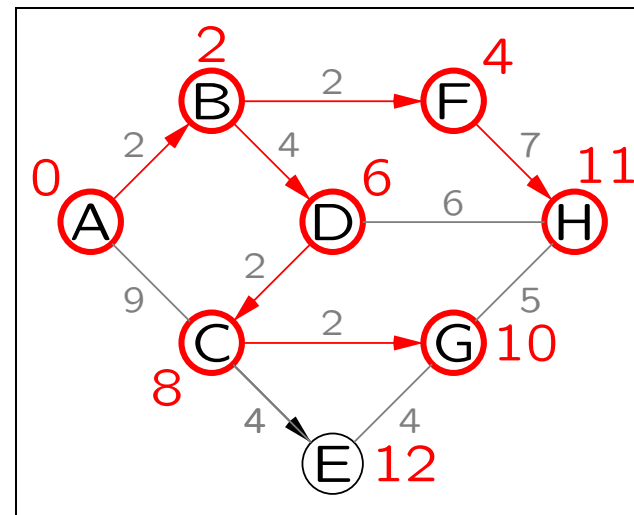
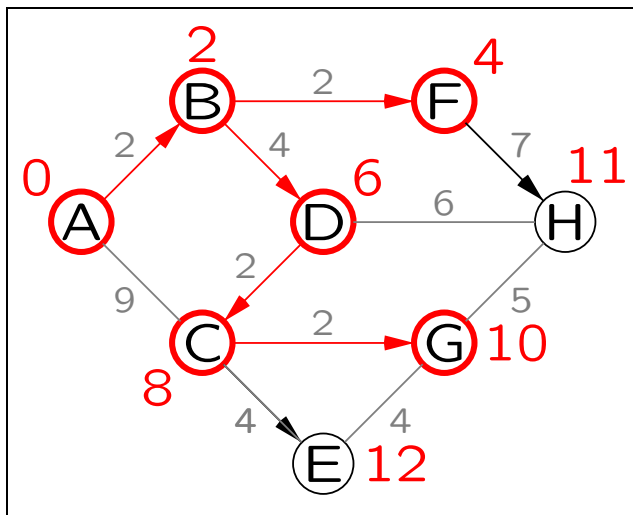
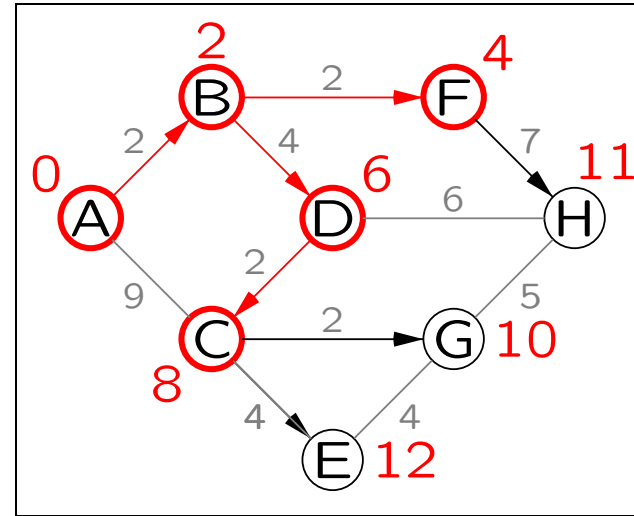
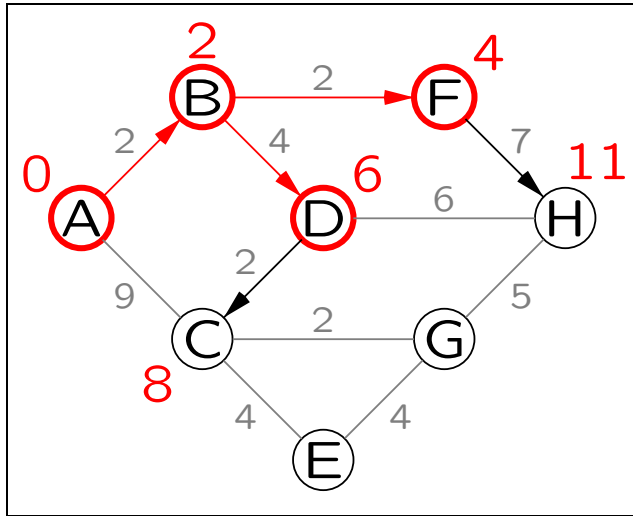
A  $\longrightarrow$  B  $\longrightarrow$  C: lengte 7

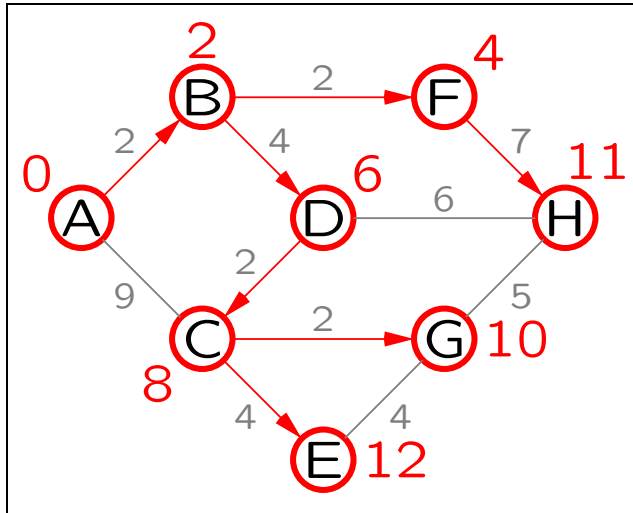
A  $\longrightarrow$  B  $\longrightarrow$  D  $\longrightarrow$  E: lengte 9

```
// invoer: samenhangende gewogen graaf  $G = (V, E)$  en startknoop  $s$ 
// uitvoer: array dat de lengtes van de kortste paden vanuit  $s$  bevat;
// na afloop is  $\text{pad}[v] =$  de lengte van een kortste pad van  $s$  naar  $v$ 
for  $v \in V$  do
     $\text{pad}[v] := \infty$ ; od
 $\text{pad}[s] := 0$ ;
 $U := \emptyset$ ;
while (  $U \neq V$  ) do
    vind knoop  $v^* \in V \setminus U$  met  $\text{pad}[v^*]$  minimaal;
     $U := U \cup \{v^*\}$ ;
    for alle knopen  $v$  aangrenzend aan  $v^*$  do
        if  $\text{pad}[v^*] + \text{gewicht}(v^*, v) < \text{pad}[v]$  then
             $\text{pad}[v] := \text{pad}[v^*] + \text{gewicht}(v^*, v)$ ;
        fi
    od
od
```

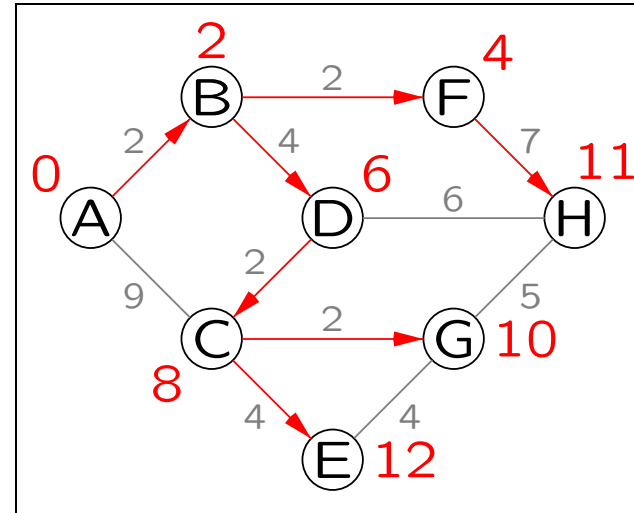
- 
- Het algoritme houdt een verzameling  $U$  bij van knopen waarvan de kortste afstand vanaf  $s$  reeds bepaald is.
  - De knopen  $v$  zijn gelabeld met de tot dusver gevonden kortste afstand  $\text{pad}[v]$ , dus de afstand via knopen uit  $U$ . Voor de knopen uit  $U$  geeft het label al de definitieve afstand aan.
  - De volgende dichtstbijzijnde knoop wordt gekozen uit de knopen uit  $V \setminus U$  die direct grenzen aan  $U$ . Nadat deze gekozen is worden de labels aangepast.
  - In elke stap wordt zo voor elke knoop uit  $V \setminus U$  de kortste afstand vanaf  $s$  via de reeds afgehandelde knopen uit  $U$  (en bijbehorende takken) bepaald.
  - Het is niet zo moeilijk dit algoritme aan te passen zodat ook de kortste paden zelf worden berekend.







Het algoritme is klaar:  
alle knopen gehad



Alle kortste paden vanuit  
A met hun lengtes

- donderdag 26 april 2007 in zaal 312

- **Opgaven:**

zie <http://www.liacs.nl/home/graaf/ALGO/algo2007.html>

- **Volgend college:**

vrijdag 27 april 2007