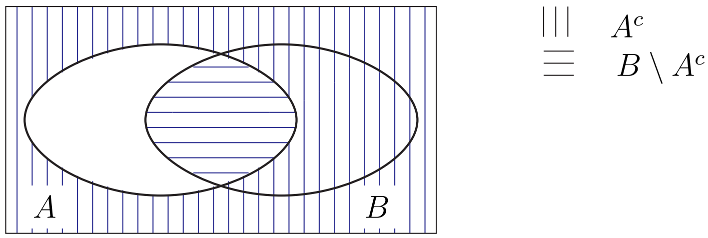
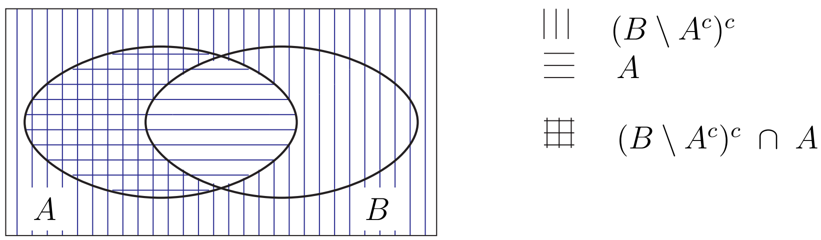
Uitwerking tentamen Fundamentele Informatica 1
8 januari 2018

1) **a.** $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ en $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ en $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

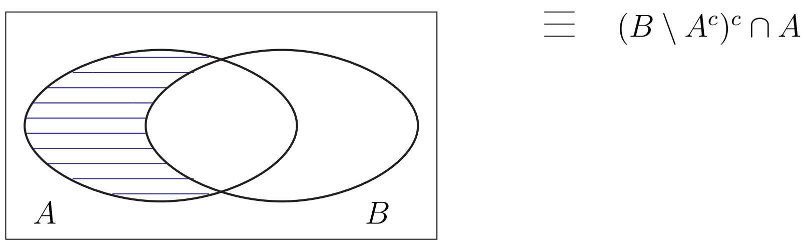
b. Construeer eerst $B \setminus A^c$.



En daaruit $(B \setminus A^c)^c \ \cap \ A$



We vatten samen, en tekenen $(B \setminus A^c)^c \cap A$.



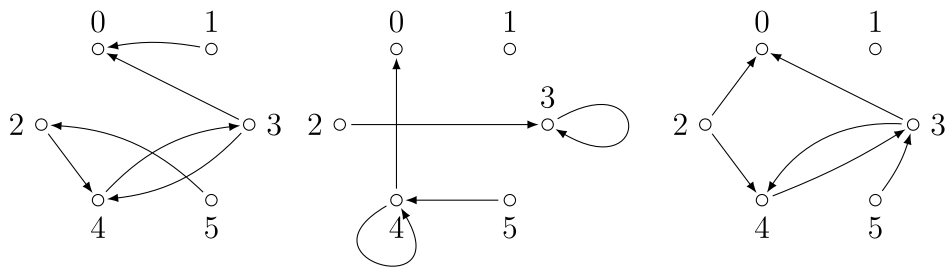
Er geldt dat $(B \setminus A^c)^c \cap A = (\,(B \setminus A^c)^c \cap A\,) \setminus A^c$, want A^c ligt geheel buiten het gearceerde gebied.

Dit is ook gelijk aan $A \setminus B$.

c. Systematisch de axioma's toepassen; één axioma per keer. Per regel staat het axioma genoemd dat wordt toegepast om de uitdrukking op de volgende regel te krijgen. Een mogelijke afleiding is dan:

$((B \cap (A^c)^c)^c \cap A) \cap (A^c)^c =$ 2x dubbel complement
$((B \cap A)^c \cap A) \cap A =$ associativiteit
$(B \cap A)^c \cap (A \cap A) =$ idempotentie
$(B \cap A)^c \cap A =$ commutativiteit
$A \cap (B \cap A)^c =$ de Morgan
$A \cap (B^c \cup A^c) =$ distributiviteit
$(A \cap B^c) \cup (A \cap A^c) =$ complement
$(A \cap B^c) \cup \emptyset =$ nulelement
$A \cap B^c$ QED

2) **a.** Eerst R, daarna R^2 en R^3. Die laatste kunnen gevonden worden door twee resp. drie pijlen achter elkaar te volgen.

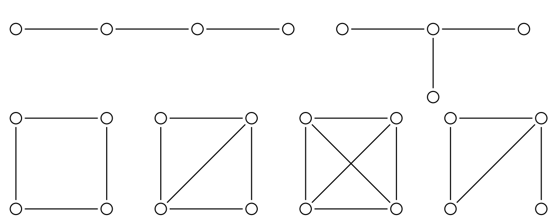


b. Uit **a)**: $R \cup R^2 \cup R^3 = \{(1,0),(3,0),(3,4),(2,4),(4,3),(5,2),(4,0),(3,3),(4,4),$ $(5,4),(2,3),(5,3),(2,0)\}$. Deze verzameling is nog niet transitief, dus we moeten R^4 erbij doen. We krijgen dan als enig nieuw paar nog $(5,0)$. Je ziet dit door $R^4 = R \circ R^3 = R^2 \circ R^2$ als gerichte graaf te tekenen, maar je kunt ook opmerken dat R^k precies alle paren (i,j) bevat waarvoor er in de gerichte graaf behorend bij R een gericht pad is van i naar j ter lengte k. Hier is $k = 4$.
$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(1,0),(3,0),(3,4),(2,4),(4,3),(5,2),(4,0),(3,3),(4,4),$ $(5,4),(2,3),(5,3),(2,0),(5,0)\}$ is transitief, dus dit is de gevraagde transitieve afsluiting.

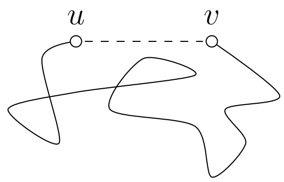
c. S is een *equivalentierelatie*, dus
- $(x,x) \in S$ voor alle $x \in A$ (reflexief)
- als $(x,y) \in S$ dan ook $(y,x) \in S$ (symmetrisch)
- als $(x,y) \in S$ en $(y,z) \in S$ dan $(x,z) \in S$ (transitief)

Dan geldt: (i) $(4,4) \in S$ omdat S reflexief is.
(ii) $(5,2) \in S, (2,4) \in S$, dus vanwege transitiviteit $(5,4) \in S$ en dan vanwege symmetrie ook $(4,5) \in S$.
(iii) Stel dat $(1,3) \in S$, dan volgt uit symmetrie dat ook $(3,1) \in S$. Gegeven is dat $(1,0) \in S$. Uit transitiviteit zou nu volgen dat dan ook $(3,0) \in S$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat $(3,0) \notin S$. Dus kan $(1,3)$ niet in S zitten.
Vaak gezien, maar *foute redenering*: omdat $(1,0) \in S$ zou $(0,3)$ in S moeten zitten om $(1,3)$ via transitiviteit in S te krijgen. Dit is niet goed geconcludeerd, want als $(1,5)$ en $(5,3)$ in S zitten (bijvoorbeeld; dat zou a priori kunnen), is ook $(1,3) \in S$. Het hoeft dus niet via $(1,0)$ en $(0,3)$.

3) **a.**

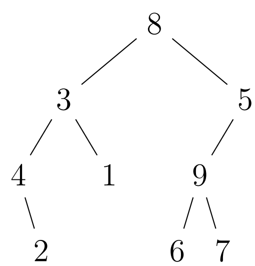


b. We gebruiken in het bewijs alleen de definitie van een boom: een *boom* is een ongerichte graaf die *samenhangend* en *acyclisch* (= zonder cykels) is. Het bewijs gaat uit het ongerijmde.
Stel dat $G - \{e\}$ wel samenhangend is. Dan is er dus een pad in $G - \{e\}$ tussen elk tweetal knopen, in het bijzonder tussen u en v.



Voeg nu de lijn $\{u, v\}$ weer toe. Dan zien we dat G een gesloten pad (en dus een cykel) heeft, namelijk bestaande uit het pad van v naar u en de lijn $\{u, v\}$. Tegenspraak met het feit dat G acyclisch is.

c. De uiteindelijke boom:



Toelichting: postorde is LRW, dus 8 is de wortel van de boom. Zoek nu 8 op in de symmetrische ordening (WLR). Dan zien we dat de linkersubboom van 8 de knopen $\{1, 2, 3, 4\}$ bevat en de rechtersubboom $\{5, 6, 7, 8\}$, en dat de LWR-volgorde van de knopen in de linkersubboom $4, 2, 3, 1$ is, en van de rechtersubboom $6, 9, 7, 5$. Uit de postorde-ordening (LRW) halen we vervolgens dat de LRW-volgorde van de knopen uit de linkersubboom $2, 4, 1, 3$ is, en die van de rechtersubboom $6, 7, 9, 5$. Doorgaand op dezelfde wijze als hiervoor kunnen we nu uit de LWR-volgorde en de LRW-volgorde de linker- en de rechtersubboom reconstrueren. Bijvoorbeeld voor rechts: wortel is 5 (uit LRW); uit LWR zien we dat 5 geen rechterkind heeft, dus er is alleen een linkersubboom. LWR voor die subboom is $6, 9, 7$; LRW is $6, 7, 9$. Wortel is dus 9 (uit LRW), de linkersubboom van 9 bevat 6 en de rechtersubboom bevat 7. De linkersubboom van 8 gaat analoog.

4) De rij a_n wordt inductief gedefinieerd door $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ en $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 8 \cdot a_{n-2}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

a. $a_0 = 2$ en $a_1 = 5$, dus $a_2 = 6 \cdot a_1 - 8 \cdot a_0 = 30 - 16 = 14$. En dan $a_3 = 6 \cdot a_2 - 8 \cdot a_1 = 6 \cdot 14 - 8 \cdot 5 = 84 - 40 = 44$.

b. - *Basis:* controleren of de formule klopt voor $n = 0$ <u>en</u> $n = 1$.
Invullen in de te bewijzen formule: $a_0 = 3 \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 4^{-1} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4} = 2$, en dat klopt. $a_1 = 3 \cdot 2^0 + 2 \cdot 4^0 = 3 + 2 = 5$, en dat klopt ook.

Nu moeten we bewijzen dat de formule ook geldt voor alle andere waarden van n. We nemen daartoe aan dat de formule geldt voor $n - 1$ en voor n, en laten dan zien dat de formule in dat geval ook geldt voor de volgende waarde, namelijk voor $n + 1$. We moeten dus laten zien dat $a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 4^n$

- *Inductiehypothese:* we veronderstellen dat $a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-2}$ en $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}$

Bewijs: $a_{n+1} =$ (recurrente betrekking)
$6 \cdot a_n - 8 \cdot a_{n-1} =$ (inductiehypothese)
$6 \cdot (3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}) - 8 \cdot (3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-2}) =$
(uitschrijven en 2-machten resp. 4-machten bij elkaar nemen)
$(18 \cdot 2^{n-1} - 24 \cdot 2^{n-2}) + (12 \cdot 4^{n-1} - 16 \cdot 4^{n-2}) =$ (machten gelijkmaken)
$(9 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^n) + (3 \cdot 4^n - 1 \cdot 4^n) =$ (afmaken)
$3 \cdot 2^n + 2 \cdot 4^n$. QED

5) **a.** Een verzameling A heet aftelbaar als A eindig is of als er een bijectie is tussen $\mathbb{N}$ en A. Alternatief: A heet aftelbaar als er een surjectie is van $\mathbb{N}$ naar A

b. We kunnen $\mathbb{Z}$ als volgt aftellen (bijectie):

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathbb{Z}$	0	−1	1	−2	2	−3	3	−4	4	...

Eventueel in formulevorm: bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, met

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

c. $\mathbb{Z}$ is aftelbaar en kunnen we opsommen/aftellen als bij **a)** aangegeven. Dan kunnen we $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{ \ (x, y) \mid \ x \in \mathbb{Z} \text{ en } y \in \mathbb{Z} \ \}$ weergeven via onderstaande 'tabel':

	0	−1	1	−2	−2	...
0	$(0,0)$	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(0,-2)$	$(0,2)$	...
−1	$(-1,0)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$	...
1	$(1,0)$	$(1,-1)$	$(1,1)$	$(1,-2)$	$(1,2)$	...
−2	$(-2,0)$	$(-2,-1)$	$(-2,1)$	$(-2,-2)$	$(-2,2)$	...
2	$(2,0)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,-2)$	$(2,2)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

We krijgen een aftelling van $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ door een Cantorwandeling te maken, dat wil zeggen door via de diagonalen te lopen. Zo krijgen we achtereenvolgens: $(0,0), (0,-1), (-1,0), (0,1), (-1,-1), (1,0), (0,-2), (-1,1), (1,-1), (-2,0)$, $(0,2), (-1,-2), \ldots$.

6) **a.** We berekenen x^2, x^3 en x^4 modulo 8 voor $x = 1, 2, \ldots, 7$.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2	1	4	1	0	1	4	1
x^3	1	0	3	0	5	0	7
x^4	1	0	1	0	1	0	1

Bij het berekening gebruiken we natuurlijk (bijvoorbeeld) dat $x^3 = x \cdot x^2 \equiv x \cdot (x^2 \text{ modulo } 8)$, dus dat 7^3 modulo $8 \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7$ modulo 8. Vooral NIET eerst 7^3 uitrekenen en dat modulo 8 doen. Kortom ... handig rekenen met modulo!

b. Uit **a)**: als x oneven is dan is $x \equiv 1, 3, 5$ of 7 modulo 8, en dan is $x^2 \equiv 1$ modulo 8. Voor die x-en geldt dan: $x^4 = x^2 \cdot x^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$ modulo 8, dus $x^6 = x^2 \cdot x^4 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$ modulo 8, dus $x^8 = x^2 \cdot x^6 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$ modulo 8, etcetera.

We zien zo dat $x^m \equiv 1$ modulo 8 als m *even* is. Je kunt dit netjes met inductie bewijzen, maar dat hoeft hier niet.

Ander bewijs: $m > 0$ is even, dus $m = 2k$ voor een natuurlijk getal k. Dan is $x^m = x^{2k} = (x^2)^k \equiv 1^k \equiv 1$ modulo 8 voor oneven x.

c. Merk op dat voor *even* x geldt dat $x^n \equiv 0$ modulo 8 voor elke $n \geq 3$. Dit komt omdat even getallen deelbaar zijn door 2, dus kwadraten van even getallen door 4, derdemachten door 8 en dus hogere machten zeker ook door 8. Het is eveneens uit de tabel af te leiden, want een even getal is modulo 8 alleen gelijk aan $0, 2, 4$ of 6 en derhalve: $x^3 \equiv 0$ modulo 8, dus $x^n = x^3 \cdot x^{n-3} \equiv 0 \cdot x^{n-3} \equiv 0$ modulo 8 voor $n \geq 3$.

We hebben dus meteen: $100^{331} \equiv 0$ modulo 8. Verder: $75^{999} = 75^{998} \cdot 75 \equiv 1 \cdot 75 \equiv 75 \equiv 3$ modulo 8, waarbij we **b)** hebben gebruikt. Verder $43^3 \equiv 3^3 \equiv 3$ modulo 8 (dat laatste komt rechtstreeks uit de tabel).

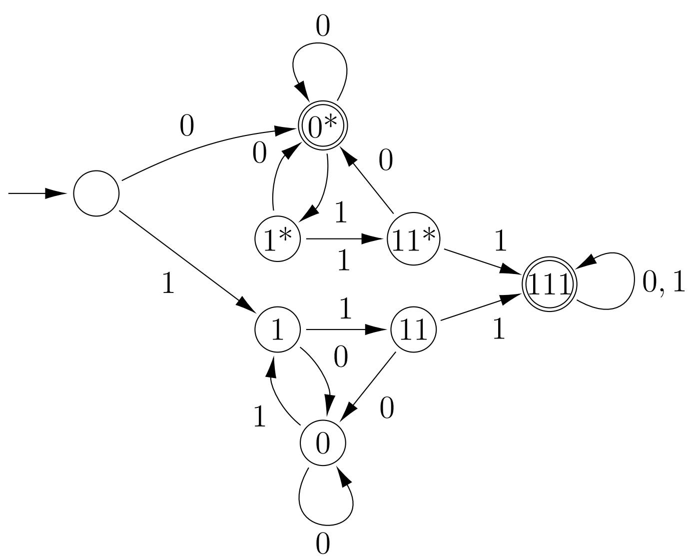
Alles bij elkaar: $100^{331} + 75^{999} + 43^3 \equiv 0 + 3 + 3 \equiv 6$ modulo 8, dus de rest bij deling door 8 is 6.

7) **a.** In woorden: K = alle woorden die beginnen en eindigen met een 0 (waaronder het woord 0) $\cup$ alle woorden die 111 bevatten.

Als reguliere taal:

$$K = \{0\} \cdot \{0,1\}^* \cdot \{0\} \cup \{0,1\}^* \cdot \{111\} \cdot \{0,1\}^* \cup \{0\}$$

b. De automaat splitst in twee delen, afhankelijk van de eerste letter. In beide delen wordt in de gaten gehouden of drie enen op elkaar volgen, met toestanden 0, 1, 11 en uiteindelijk 111 als de laatst gelezen letters. De toestanden waar de eerste letter 0 was krijgen een ster. Toestand $0*$ is ook accepterend. Er zijn geen aparte 111 en $111*$ omdat vanaf dat moment er geen verschil meer hoeft te worden gemaakt.



c. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ begint en eindigt met een 0 <u>en</u> heeft oneven lengte $\geq 3\}$

laatste keer verbeterd op 24 maart 2021