Tentamen Foundations of Computer Science **8 januari 2021, 13.00–16.00**

De in totaal 19 onderdelen van dit tentamen zijn elk $\frac{1}{2}$ punt waard. Plus $\frac{1}{2}$ startpremie.

Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) a. Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat

$$B \cap ((A \cup B) \cap A^c)^c = A \cap B$$

Teken ten minste twee Venn-diagrammen om duidelijk te maken welk gebied de verzameling links van de gelijkheid voorstelt, waaronder een waaruit je afleidt wat $(A \cup B) \cap A^c$ is.

b. Gebruik nu de regels van de verzamelingenalgebra om bovenstaande gelijkheid te bewijzen. Pas één axioma tegelijk toe en benoem de gebruikte regels.

2) a. Wanneer is een relatie een equivalentierelatie? (Geef niet alleen de namen van de eigenschappen.)

b. De relatie $\sim$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is gedefinieerd als: $(m, n) \sim (k, \ell)$ dan en slechts dan als $m + \ell = n + k$. Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

c. Schets de equivalentieklassen van $\sim$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3) Definieer $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$ en $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$.

a. Bewijs dat $A \cup B$ aftelbaar is door expliciet een bijectie van $\mathbb{N}$ naar $A \cup B$ te geven.

b. Bewijs dat $A \times B$ aftelbaar is door een aftelling van $A \times B$ aan te geven.

c. Laat nu X aftelbaar zijn, en Y en Z overaftelbaar. Leg uit welke van de volgende beweringen altijd waar zijn (onafhankelijk van X, Y, Z). Geef voor de overige beweringen een tegenvoorbeeld.

(i) $X \cup Y$ is aftelbaar **(ii)** $Y \setminus X$ is overaftelbaar **(iii)** $Y \cap Z$ is overaftelbaar

4) a. Bewijs met volledige inductie dat $5^n - 4n - 1$ deeelbaar is door 16 voor elke $n \geq 0$. Leg uit welke stappen je neemt.

b. (i) Bereken in $\mathbb{Z}_{16}$ de waarde voor 5^k voor $k = 0, 1, \ldots, 4$.
(ii) Gebruik **(i)** om **a.** te bewijzen.

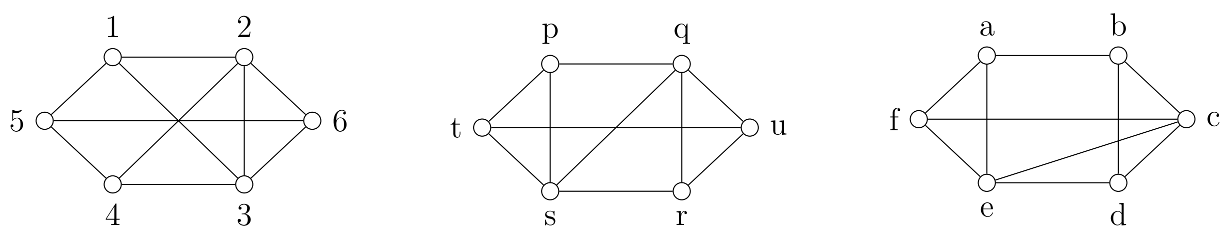
5) Deze opgave gaat over samenhangende, ongerichte grafen. De onderdelen staan los van elkaar.

a. Hoeveel volledig bipartiete grafen bestaan er met 6 knopen? Leg je antwoord uit en teken ze allemaal.

b. (i) Teken de twee niet-isomorfe 3-reguliere grafen met zes knopen.
Hint: het zijn allebei Hamiltongrafen.
(ii) Bewijs: een k-reguliere graaf met k oneven heeft een even aantal knopen.

c. De grafen G_2 en G_3 hieronder zijn isomorf. Geef een isomorfisme.

d. Geef een eenvoudig argument waarom G_1 niet isomorf is met de andere twee grafen.



G_1 G_2 G_3

6) Beschouw de algebraïsche expressie: $E = \dfrac{(3a+b^2)^3 - 7}{(4a^2+6c)}$.

a. Teken de corresponderende geordende gewortelde boom T, waarbij je een pijl ($\uparrow$) gebruikt voor machtsverheffing, een sterretje ($*$) voor vermenigvuldiging, en een schuine streep (/) voor deling.

b. Gebruik T om E te herschrijven in Poolse prefix notatie (preorde).

7) Gegeven zijn de talen $L = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft deelwoord } aa\ \}$ en

$$M = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft een oneven aantal } b\text{'s}\ \}.$$

a. Teken een Venn-diagram met L en M en verdeel de woorden uit $\{a,b\}^*$ van lengte drie over de gebieden.

De vereniging van L en M is de taal

$$K = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft deelwoord } aa\text{, of } w \text{ heeft een oneven aantal } b\text{'s}\ \}$$

b. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

c. Toon aan dat $K^c = \{a,b\}^* \setminus K$ *regulier* is, dus druk K^c uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).

Hint: welke woorden uit K^c hebben precies twee b's?