Opgaven bij Introductie 1.9.20

Foundations of Computer Science

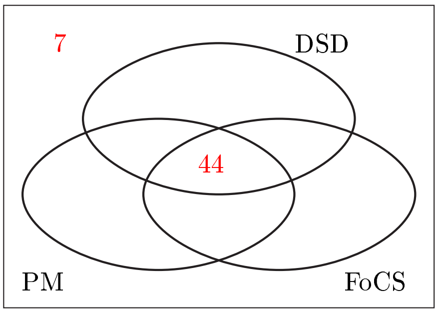
Verzamelingen. Het vak PM werd gehaald door 70 studenten, het vak FoCS door 60 studenten en het vak DSD ook door 60 studenten. Dat gaat natuurlijk niet om allemaal verschillende personen.

Er waren 55 studenten die zowel PM als FoCS haalden, 53 studenten die PM en DSD haalden, en 46 studenten die FoCS en DSD haalden.

Er waren 44 studenten die alle drie de vakken haalden, en helaas nog 7 studenten die geen enkel vak haalden (of niet deelgenomen hebben).

Opgave 1 Bepaal om hoeveel verschillende studenten het hier in totaal gaat.

Aanwijzing: schrijf de aantallen in een diagram als hieronder.



Getallenrijen. Voor sommigen bekend, voor anderen niet.

In de *driehoek van Pascal* beginnen we met het getal 1. Daarna is elk getal steeds de som van zijn bovenburen. De driehoek komen we tegen in kansrekeningsexperimenten, het bord van Galton bijvoorbeeld.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Opgave 2 Beredeneer dat het aantal wandelingen zigzag naar beneden vanuit de top naar een bepaalde positie, steeds gelijk is aan het getal op die positie.

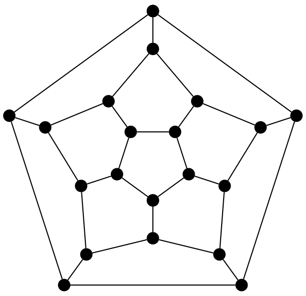
Opgave 3 Tel alle waardes per rij op. Wat is de conclusie? Kunnen we voorspellen of die eigenschap altijd blijft gelden?

Grafen. Een graaf is een abstracte weergave van objecten en hun verbanden.

Een *graaf* bestaat uit *knopen* en *lijnen* die knopen verbinden. Een *pad* of wandeling door de graaf is een rijtje knopen die steeds via een lijn naar de volgende knoop bereikbaar zijn.

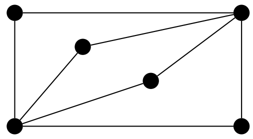
Een belangrijk probleem in de informatica is het *handelsreizigersprobleem*: hoe reis je zo snel mogelijk langs een aantal steden?

In grafen zonder afstanden dat begrip verwant aan de *Hamiltonkring*: een pad die alle knopen van de graaf precies één keer aandoet en weer op het beginpunt uitkomt. Oorspronkelijk was dat een puzzel die moest worden opgelost op een platgeslagen twaalfvlak, zoals hieronder.



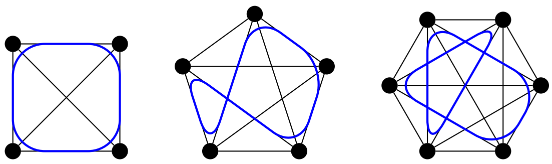
Opgave 4 Bepaal een Hamiltonkring van het twaalfvlak.

Opgave 5 Beredeneer dat onderstaande graaf géén Hamiltonkring heeft.



Opgave 6 Een complete graaf heeft een lijn tussen elk paar knopen. Hoeveel Hamiltonkringen heeft een zo'n complete graaf als er n knopen zijn?

Hieronder de complete grafen met 4, 5 en 6 knopen, met in blauw een Hamiltonkring.



Dat aantal neemt snel toe. Dat verklaart waarom het bepalen van een kortste handelsreizigersroute niet opgelost kan worden door eenvoudigweg alle mogelijkheden na te gaan.

Kool-geit-wolf. Problemen in de informatica kunnen vaak gemodelleerd worden met een toestands-actie diagram. Hier is een geliefd voorbeeld van een eeuwenoude river crossing puzzle. We citeren voor het gemak wikipedia (en niet het latijnse origineel).

> Once upon a time a farmer went to a market and purchased a wolf, a goat, and a cabbage. On his way home, the farmer came to the bank of a river and rented a boat. But crossing the river by boat, the farmer could carry only himself and a single one of his purchases: the wolf, the goat, or the cabbage.
>
> If left unattended together, the wolf would eat the goat, or the goat would eat the cabbage.
>
> The farmer's challenge was to carry himself and his purchases to the far bank of the river, leaving each purchase intact. How did he do it?

Opgave 7 Los het probleem op door de "toestanden" (op welke oever zijn de boer, kool, geit en wolf) te modelleren met knopen in een graaf, en te kijken of er een pad is dat aan de voorwaarden voldoet.

Zó moeten we *niet* beginnen: $\boxed{\text{BKGW}|} \longrightarrow \boxed{\text{KG}|\text{BW}}$.

Modulo rekenen. Dit is het "klokrekenen" of het "rekenen met resten".

Opgave 8 Wat is het laatste cijfer van het product van de tien openvolgende getallen $105 \cdot 106 \cdot \ldots 113 \cdot 114$?

Opgave 9 Idem voor het product van de vijf opeenvolgende getallen $111 \cdot 113 \cdot 115 \cdot 117 \cdot 119$?

Oneindig. Het symbool $\aleph_0$ wel eens gezien?

De (niet-negatieve) even getallen $(0, 2, 4, \ldots)$ vormen pakweg de helft van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ $(0, 1, 2, 3, \ldots)$.

0		2		4		6		8		10		12
•		•		•		•		•		•		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		

Opgave 10 Laat zien dat de even getallen één-op-één te koppelen zijn aan de natuurlijke getallen, en er dus "evenveel" van beide typen getallen zijn.

De natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ vormen op hun beurt pakweg de helft van de gehele getallen $\mathbb{Z}$ $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

					0	1	2	3	4	5	6	7
					•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7

Opgave 11 Lukt het ook hier om de twee getallenverzamelingen één-op-één te koppelen?

Inductie en recursie. In het boek *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid* geeft Douglas Hofstadter een inmiddels beroemde puzzel: de *MU puzzel*. Als voorbeeld van een 'formeel systeem' definieert hij "legale" rijtjes symbolen die gemaakt kunnen worden met M, I, U volgens een aantal regels.

Allereerst is MI legaal. Verder kunnen nieuwe legale rijtjes gevonden worden uit oude op vier manieren. Als een rijtje op I eindigt mogen we er een U achter zetten. Als een rijtje met M begint mogen we het stuk erachter verdubbelen. Als een rijtje drie I's achter elkaar heeft mogen we deze vervangen door U. Als een rijtje twee opeenvolgende U's heeft mogen we deze verwijderen.

De puzzel is nu om te bepalen of MU legaal is. Schematisch zijn de regels:

- MI is legaal
- als xI legaal, dan ook xIU
  als Mx legaal, dan $Mxx \in L$
  als $xIIIy$ legaal, dan $xUy \in L$
  als $xUUy$ legaal, dan $xy \in L$
- Geen andere rijtjes zijn legaal.

We passen de regels op systematische manier toe. MI levert MIU en MII. MIU levert $MIUIU$. MII levert $MIIU$ en $MIIII = MI^4$. $MIUIU$ levert $MIUIUIUIU$. $MIIU$ levert $MIIUIIU$. MI^4 levert MI^4U, MI^8, MUI en MIU. Dat laatste rijtje hadden we reeds eerder gevonden.

Het is eenvoudig in te zien dat alle legale rijtjes met M beginnen: de eerste letter wordt eenvoudigweg nooit verwijderd.

Opgave 12 Is MU legaal?

Zonder hint is dat een lastige opgave. Daarom een tip: kijk *alleen* naar wat de regels veranderen aan het aantal I's in een legaal rijtje. Kan dat ooit een 3-voud worden?