Foundations of Computer Science

Fundamentele Informatica 1

Hendrik Jan Hoogeboom
Jeannette de Graaf

Bachelor Informatica (& specialisaties)
Universiteit Leiden

Najaar 2020

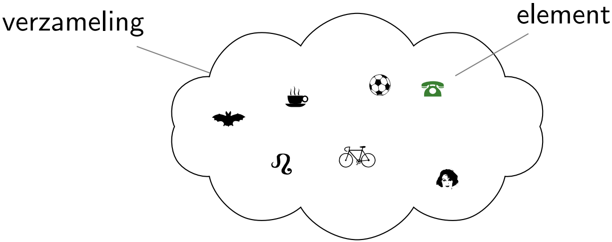
Universiteit Leiden
Leiden Institute of Advanced Computer Science

college gebaseerd op het boek

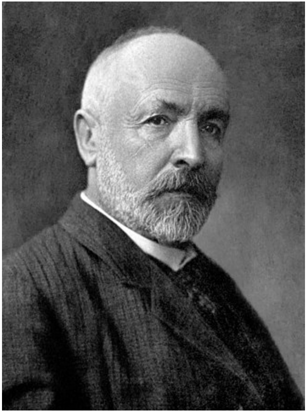
Schaum's Outline of Discrete Mathematics,
door Seymour Lipschutz, Marc Lipson,
third edition, ISBN 9780071615860, Mcgraw-Hill

Hoofdstuk 1

Verzamelingen


verzameling
element

"Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen. "



St Petersburg 1845 – Halle 1918

wikipedia

Über eine Eigenschaft des Imbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. Crelles Journal für Mathematik, 77 (258–263) 1874.

Overzicht

" a set may be viewed as any well-defined collection of objects "

een verzameling wordt bepaald door haar elementen

opsommen

$$\{ 0, 2, 4, 6 \}$$
$$\{ 0, 2, 4, \ldots, 116, 118 \}$$
$$\{ 0, 1, 4, 9, \ldots \}$$

eigenschap P $\{ x \mid P(x) \}$

$$\{ x \mid x \text{ is een kwadraat} \}$$

" alle elementen waarvoor . . . "

$$\{ x \mid x = y^2 \text{ voor een geheel getal } y \}$$
$$\{ y^2 \mid y \text{ is geheel} \}$$

een verzameling wordt bepaald door haar elementen

$x \in A$ "x is element van A" "x zit in A"

$$1 \in \{1,2\} \qquad 3 \notin \{1,2\}$$

gelijkheid

$$\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,1\}$$

$$A = B$$
$$x \in A \text{ desda } x \in B$$

"dan en slechts dan als" $\iff$

deelverzameling, *inclusie* $\subseteq$ "is bevat in"

$$\{3,5,9\} \subseteq \{1,3,5,7,9,11\}$$

$$\{2,3,5,7\} \not\subseteq \{1,3,5,7,9,11\}$$

$$A \subseteq B$$

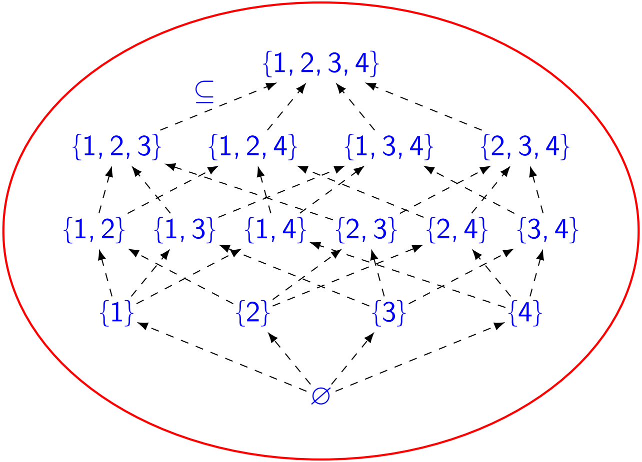
$$x \in A \text{ dan } x \in B$$

$$\Rightarrow$$

$$A = B \text{ desda } A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A$$

echte deelverzameling $A \subset B$ $A \subseteq B$ én $A \neq B$

$$\{3,5,9\} \subset \{1,3,5,7,9,11\}$$


$\{1,2,3,4\}$
$\subseteq$
$\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,3,4\}$ $\{2,3,4\}$
$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{1,4\}$ $\{2,3\}$ $\{2,4\}$ $\{3,4\}$
$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$
$\emptyset$

Thm. 1.1

Voor verzamelingen A, B en C geldt

1. $A \subseteq A$ *reflexief*
2. als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ dan $A = B$ *anti-symmetrisch*
3. als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$ dan $A \subseteq C$ *transitief*

Voor getallen x, y en z geldt

1. $x \leqslant x$ *reflexief*
2. als $x \leqslant y$ en $y \leqslant x$ dan $x = y$ *anti-symmetrisch*
3. als $x \leqslant y$ en $y \leqslant z$ dan $x \leqslant z$ *transitief*

partiele ordening

$\mathbb{N}$ *natuurlijke* getallen $\mathbb{N}^+$

$\{\, 0, 1, 2, 3, \ldots \,\}$

$\mathbb{Z}$ *gehele* getallen *integers*

$\{\, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \,\}$,

$\mathbb{Q}$ *rationale* getallen

breuken p/q, maar $2/4 = 1/2$

$\mathbb{R}$ *reële* getallen

$\frac{-1}{\sqrt{2}}$, e en π.

$$\{\ x \mid x \text{ is even }\ \}$$

$$\{0, 2, 4, 6, \ldots\} \quad \text{vs} \quad \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

universum U

lege verzameling $\{\,\}$ $\varnothing$ $\emptyset$

Thm 1.2

voor elke verzameling A geldt $\varnothing \subseteq A \subseteq U$

Boolese operaties

	logica		verzamelingen	
conjunctie	en	$\wedge$	$\cap$	doorsnede
disjunctie	of	$\vee$	$\cup$	vereniging
negatie	niet	$\neg$	^{c}	complement

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7\} \qquad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

en $\quad A \cap B = \{\, x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \,\}$ $\quad$ *doorsnede*

$$A \cap B = \{\, 1, 3 \,\}$$

of $\quad A \cup B = \{\, x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B) \,\}$ $\quad$ *vereniging*

$$A \cup B = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 7 \,\}$$

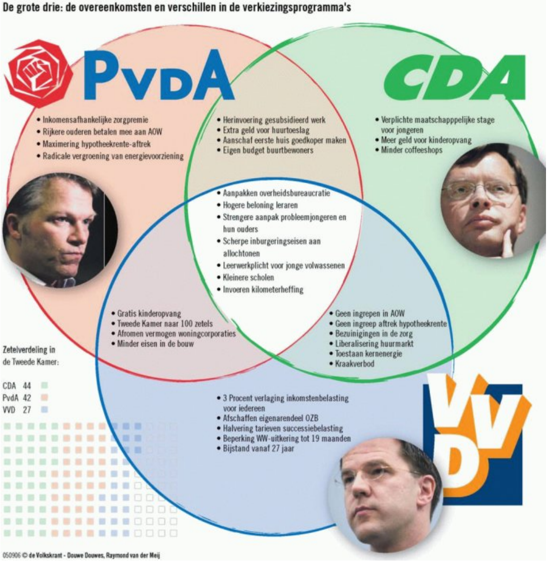
Thm 1.3

Voor elk tweetal verzamelingen A en B geldt $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

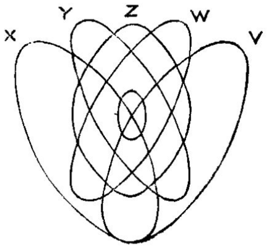
niet $\quad A^c = \{\, x \in U \mid \neg(x \in A) \,\} = \{x \in U \mid x \notin A \,\}$ $\quad$ *complement*

$$A^c = \{\, 5, 6, 7, 8 \,\}$$

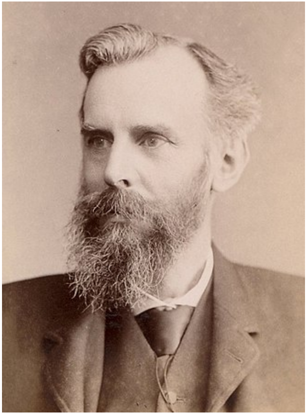

COCORICOOOOOO



050906 (C) de Volkskrant – Douwe Douwes, Raymond van der Meij



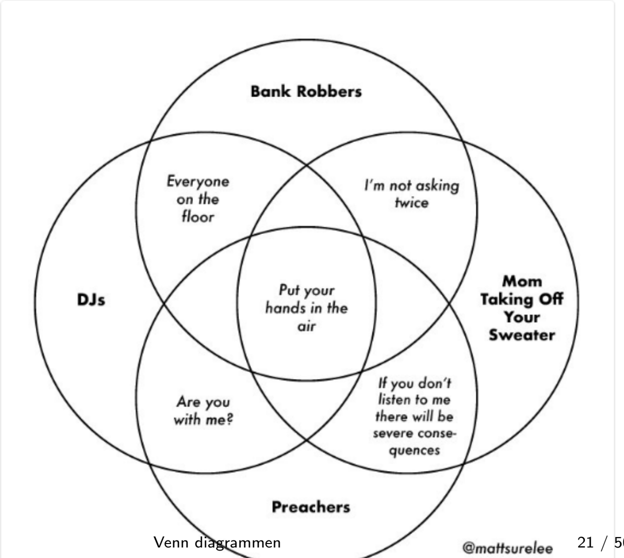
On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings. Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 9, 1—18, 1880.

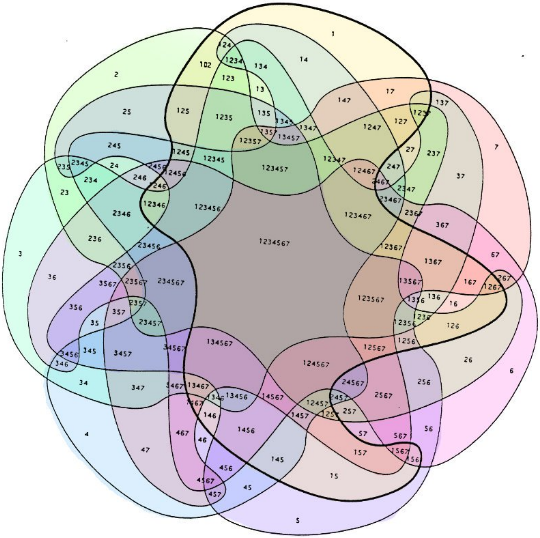


Hull 1834 – Cambridge 1923

wikipedia

I added a layer to that "Put your hands in the air" Venn diagram going around.



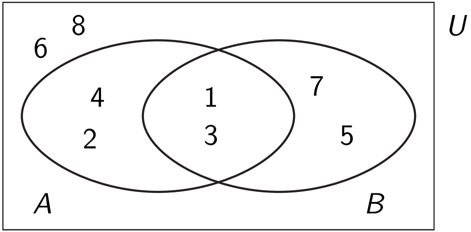


twitter.com/tweetsauce/ (bron) (interactief)

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7\}$$

'klein' 'oneven'

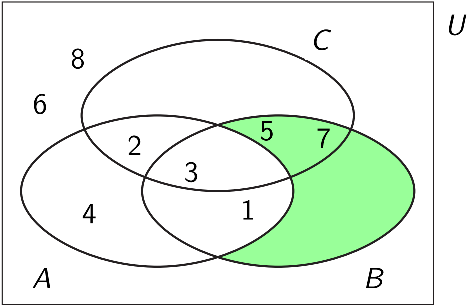


$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7\}$$

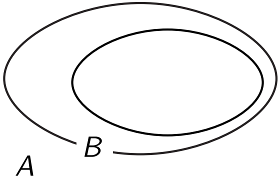
'klein' 'oneven'

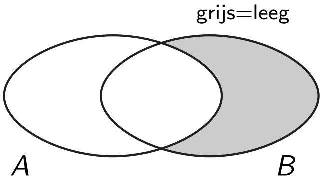
$$C = \{2, 3, 5, 7\}$$ 'priem'



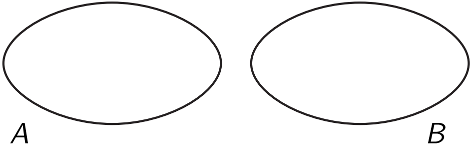
"alle grote oneven getallen zijn priem"

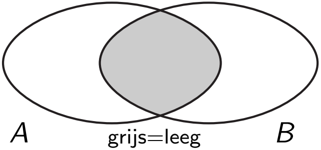
deelverzameling

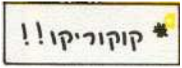




disjunct

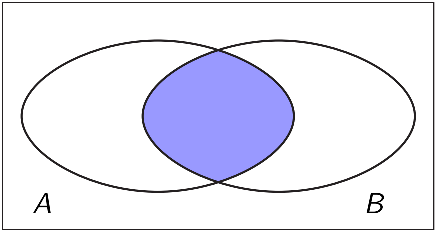





* קוקוריקו!!

en

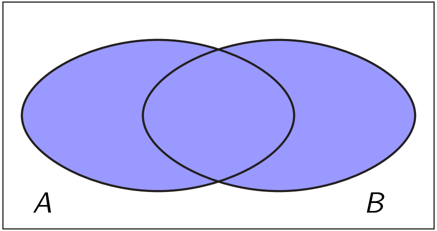
$$A \cap B = \{ x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$



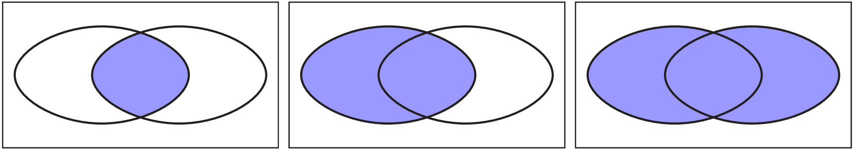
i∩ntersection

disjunct $A \cap B = \varnothing$ *disjoint* of

$$A \cup B = \{ \, x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B) \, \}$$



$\cup$nion



Thm 1.3

Voor elk tweetal verzamelingen A en B geldt $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

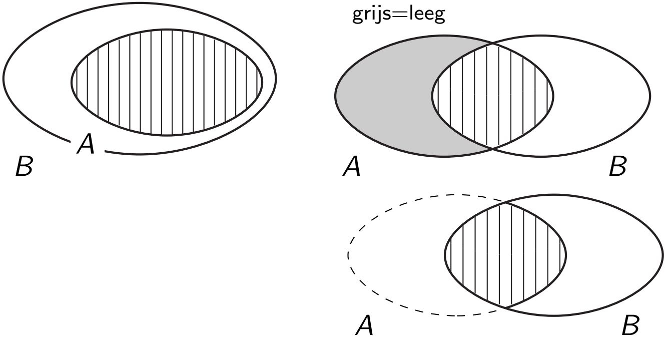
$$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$$

Thm 1.4

de volgende beweringen zijn equivalent

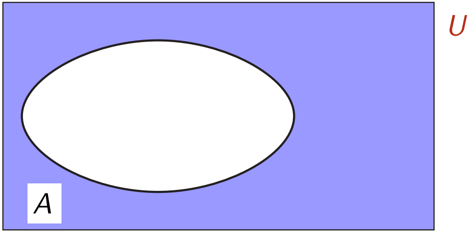
$$A \subseteq B, \quad A \cap B = A, \text{ en } \quad A \cup B = B$$

$$A \subseteq B \quad \text{desda} \quad A \cap B = A$$

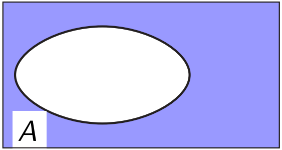


niet

$$A^c = \{\, x \in U \mid \neg(x \in A) \,\} = \{x \in U \mid x \notin A\,\}$$

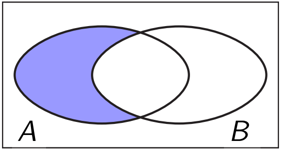


complement



$A^c = U \setminus A$

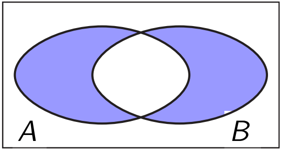
verschil



$A \setminus B \qquad A - B$

$A \cap B^c$

symmetrisch verschil

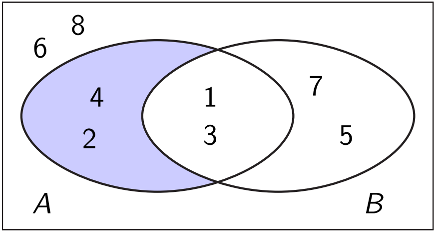


$A \oplus B$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$A = \{1,2,3,4\} \qquad B = \{1,3,5,7\}$$

klein oneven



$$B^c = \{2,4,6,8\}$$ even

$$A \cap B^c = \{2,4\}$$ klein en even

$$= A \setminus B$$

$$A^c = \{5,6,7,8\}$$ groot

$$A^c \cup B = \{1,3,5,6,7,8\}$$

groot of oneven

$$A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$$

universum: *strings* (woorden)   rijtjes symbolen

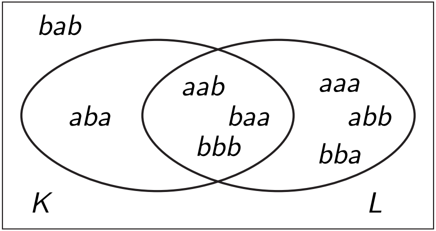
verzameling: "taal"

$$K = \{\, x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ heeft een even aantal } a\text{'s} \,\}$$

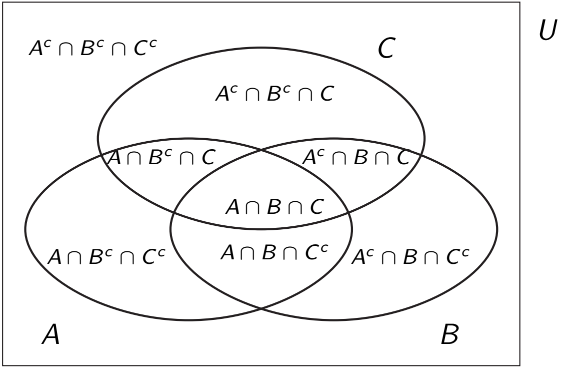
$$\{\lambda, b, aa, bb, aab, aba, baa, bbb, \dots\}$$

$$L = \{\, x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ heeft twee gelijke letters achter elkaar}\}$$

$$\{aa, bb, aaa, aab, abb, baa, bba, bbb, \dots\}$$

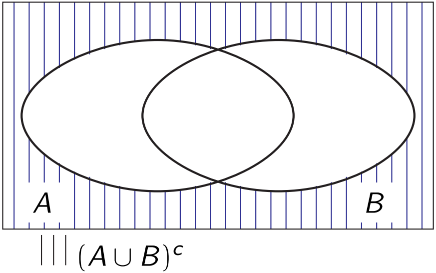


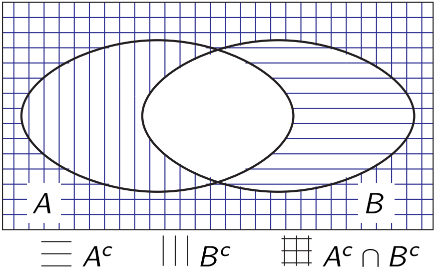
$aab, baa, bbb \in K \cap L$ $aba \in K \setminus L$ $aaa, abb, bba \in L \setminus K$ $bab \in (K \cup L)^c$


$A^c \cap B^c \cap C^c$
C
U
$A^c \cap B^c \cap C$
$A \cap B^c \cap C$
$A^c \cap B \cap C$
$A \cap B \cap C$
$A \cap B^c \cap C^c$
$A \cap B \cap C^c$
$A^c \cap B \cap C^c$
A
B

"niet (klein of oneven) = groot en even"

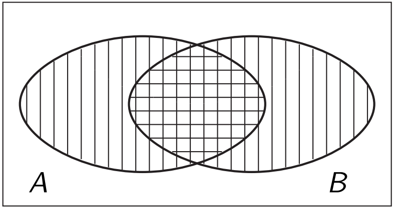
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



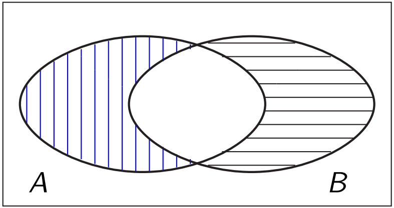


symmetrisch verschil

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$(A \cup B)^c$ $(A \cap B)^c$



$A \setminus B$ $B \setminus A$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1

definities

als $x \in$ (links) ...
... dan $x \in$ (rechts)

wat doe je?

overtuig de lezer

beargumenteer

twee voorbeelden

2

Venn diagrammen

links en rechts

wat doe je?

construeer gebieden

arceren

betekenis streepjes

welk gebied

3

verzamelingenalgebra

vaste vorm

stap voor stap

herschrijf $\cdot \setminus \cdot$

benoem de regel

lastig

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

we bewijzen de gelijkheid door twee inclusies ...

$\subseteq$ neem $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

laten zien dat $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

dan (1) $x \in A \cup B$ maar (2) $x \notin A \cap B$

dus $x \in A$ of $x \in B$ (1)

neem $x \in A$ — later doen we $x \in B$

dan $x \notin B$, want anders $x \in A \cap B$ (2)

dus $x \in A \setminus B$, dus in $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

neem $x \in B$, dan volgt eenzelfde redenering

$\supseteq$ neem $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — en redeneer verder

$$A \subseteq B \quad \text{desda} \quad A \cap B = A$$
$$\Longleftrightarrow$$

als $A \subseteq B$ dan $A \cap B = A$ ✓

$A \cap B \subseteq A$

altijd $\longrightarrow$ $A \subseteq A \cap B$

als $x \in A \xrightarrow{A \subseteq B}$ dan $x \in A \cap B$

neem $x \in A$ $\longrightarrow$ dus $x \in A \cap B$

gegeven $A \subseteq B$

dus $x \in B$

als $A \cap B = A$ dan $A \subseteq B$ ✓

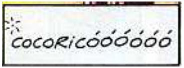
als $x \in A \xrightarrow{A \cap B = A}$ dan $x \in B$

neem $x \in A$

gegeven $A = A \cap B$

dus $x \in A \cap B$

dus $x \in B$


COCORICÓÓÓÓÓÓ

$$23 + 11 + 17 + 9 = (23 + 17) + (11 + 9) = 40 + 20 = 60$$

binaire operator $\star$

commutatief $x \star y = y \star x$ voor alle ...

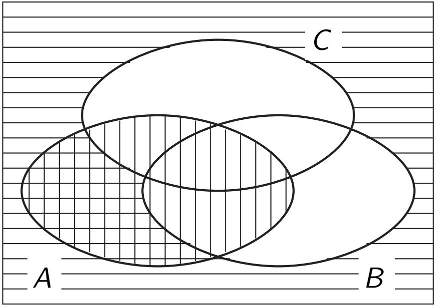
associatief $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ voor alle ...

commutatief	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
associatief	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

verschil $\setminus$ niet commutatief, niet associatief

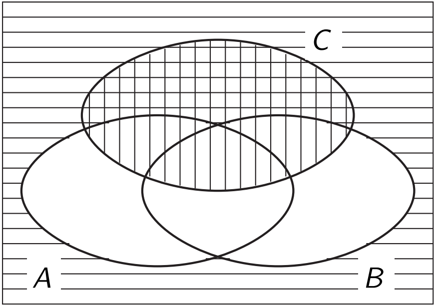
$$A \downarrow B = (A \cup B)^c \qquad \text{NOR} \qquad \text{commutatief}$$

$$A \downarrow (B \downarrow C) \stackrel{?}{=} (A \downarrow B) \downarrow C \qquad \text{associatief?}$$



$|||\, A \quad \equiv B \downarrow C$

ongearceerd



$\equiv A \downarrow B \quad |||\, C$

ongearceerd

$$(B \cup C) \setminus A \neq (A \cup B) \setminus C$$

$$1 \cdot x = x \qquad 0 \cdot x = 0 \qquad\qquad 0 + x = x$$

binaire operator $\star$

een $\quad 1 \star x = x \quad$ voor alle ...

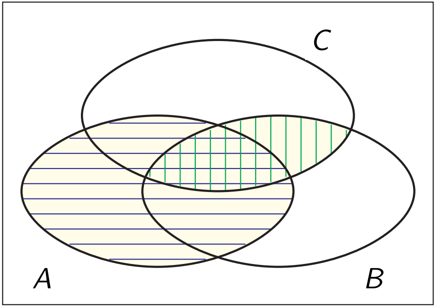
nul $\quad 0 \star x = 0 \quad$ voor alle ...

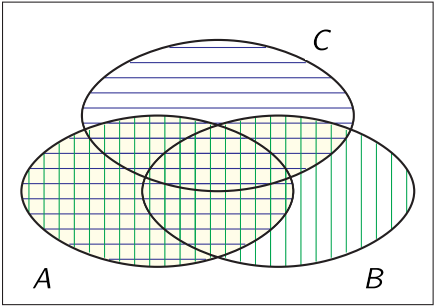
een	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
nul	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$

distributiviteit

$$3 \cdot (2 + 7) = (3 \cdot 2) + (3 \cdot 7)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



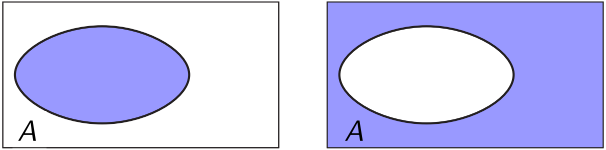


$\equiv A$ $\quad ||| \; B \cap C$

alles gestreept

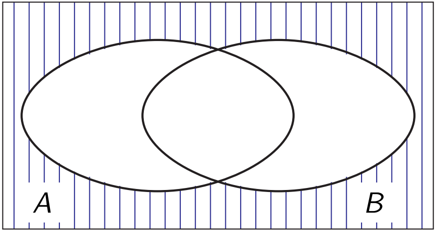
$\equiv A \cup C$ $\quad ||| \; A \cup B$

dubbel gestreept

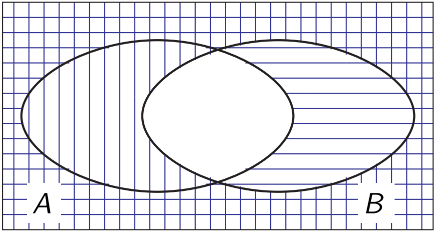


$$A \cup A^c = U \quad A^{cc} = A \quad A \cap A^c = \varnothing$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



$|||$ $(A \cup B)^c$

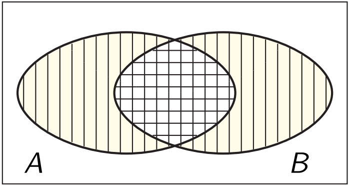


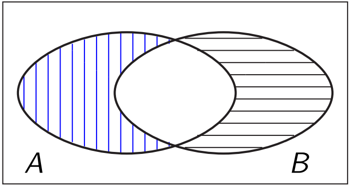
$\equiv$ A^c $|||$ B^c $\#$ $A^c \cap B^c$

idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
associatief	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
commutatief	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
distributief	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
identiteit	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
dubbel compl.	$A^{cc} = A$	
complement	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \varnothing$
	$\varnothing^c = U$	$U^c = \varnothing$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tabel: De axioma's van de *verzamelingenalgebra*.

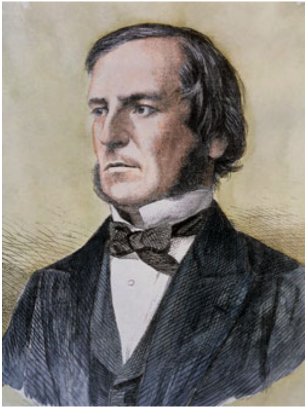
$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$





$(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$	*omschrijven*
$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c =$	distributief
$(A \cap (A \cap B)^c) \cup (B \cap (A \cap B)^c) =$	DeMorgan$\times 2$
$(A \cap (A^c \cup B^c)) \cup (B \cap (A^c \cup B^c)) =$	distributief$\times 2$
$((A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)) =$	complement$\times 2$
$(\varnothing \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A^c) \cup \varnothing) =$	nul-element$\times 2$
$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$	omschrijven$\times 2$
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	

Boole's work founded the discipline of algebraic logic. It is often, but mistakenly, credited as being the source of what we know today as Boolean algebra. *(wikipedia)*



Lincoln 1815 – Cork 1864

wikipedia

An Investigation of *the Laws of Thought* on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, 1854

absorptie

$A \cup (A \cap B) = A$ en $A \cap (A \cup B) = A$

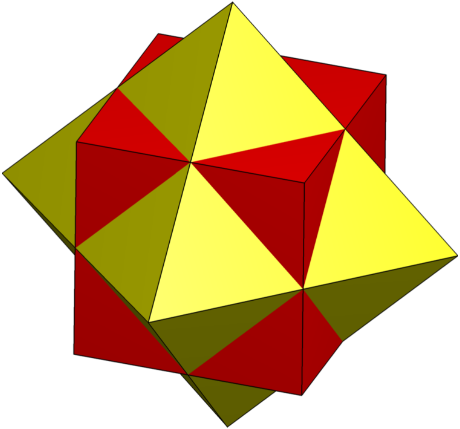
$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= \text{(identiteit)} \\
(A \cap U) \cup (A \cap B) &= \text{(distributiviteit)}\uparrow \\
A \cap (U \cup B) &= \text{(identiteit)} \\
A \cap (B \cup U) &= \text{(commutativiteit)}^{*} \\
A \cap U &= \text{(identiteit)} \\
A &
\end{aligned}
$$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributief
$A \cup U = U$	identiteit

idempotentie

$A \cap A =$	nulelement
$(A \cap A) \cup \varnothing =$	complement
$(A \cap A) \cup (A \cap A^c) =$	distributief
$A \cap (A \cup A^c) =$	complement
$A \cap U =$	eenelement
A	

☒Ch.15: Boolean Algebra



wikipedia compound of a cube . . .
(c) Robert Webb www.software3d.com

distributief	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
		$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
identiteit	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
complement	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \varnothing$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$\varphi \overset{\textit{duaal}}{\longleftrightarrow} \varphi^* \qquad \begin{cases} \cup \longleftrightarrow \cap \\ \varnothing \longleftrightarrow U \end{cases}$$

$$\varphi = \psi \quad \text{desda} \quad \varphi^* = \psi^*$$

Basic Identities of Boolean Algebra

Let X be a boolean variable and 0,1 constants

1. $X + 0 = X$ -- Zero Axiom
2. $X \cdot 1 = X$ -- Unit Axiom
3. $X + 1 = 1$ -- Unit Property
4. $X \cdot 0 = 0$ -- Zero Property

5. $X + X = X$ -- Idempotence
6. $X \cdot X = X$ -- Idempotence
7. $X + X' = 1$ -- Complement
8. $X \cdot X' = 0$ -- Complement
9. $(X')' = X$ -- Involution

1,4.Zero	$X + 0 = X$	$X \cdot 0 = 0$
3,2.Unit	$X + 1 = 1$	$X \cdot 1 = X$
5.Idempotence	$X + X = X$	$X \cdot X = X$
7.Complement	$X + X' = 1$	$X \cdot X' = 0$
9.Involution	$(X')' = X$	
10.Commutat.	$X + Y = Y + X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
12.Associative	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$
14.Distributive	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$	
		$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$
16.DeMorgan's	$(X + Y)' = X' \cdot Y'$	$(X \cdot Y)' = X' + Y'$

Tabel: Boolean Algebra Properties FoDSD

Karnaugh

0	1	1	1
0	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

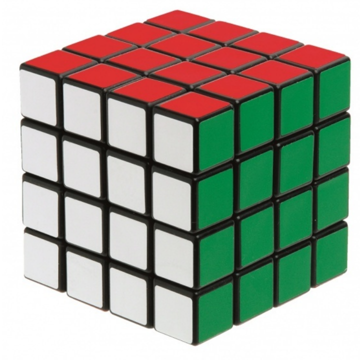
$$A \cap B \cup B \cap C^c \cap D^c \cup A^c \cap B \cap C \cup C^c \cap D = B \cup C^c \cap D$$ ☹

$$(A \cap B) \cup (B \cap C^c \cap D^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (C^c \cap D) = B \cup (C^c \cap D)$$

AB + BC'D' + A'BC + C'D =	absorption
AB + BC'D' + A'BC + (C'D + BC'D) =	commutative
AB + (BC'D' + BC'D) + A'BC + C'D =	distributive
AB + BC'(D'+D) + A'BC + C'D =	complement+unit
AB + BC' + A'BC + C'D =	complement+distributive
(ABC+ABC') + (ABC'+A'BC') + A'BC + C'D =	commutative
ABC + A'BC + (ABC' + ABC') + A'BC' + C'D =	idempotence
ABC + A'BC + ABC' + A'BC' + C'D =	distributive
(A+A')B(C+C') + C'D =	complement+unit
B + C'D	


KOEKEDOEDELDOE!

$4 \times 4 \times 4 \qquad 4^3$

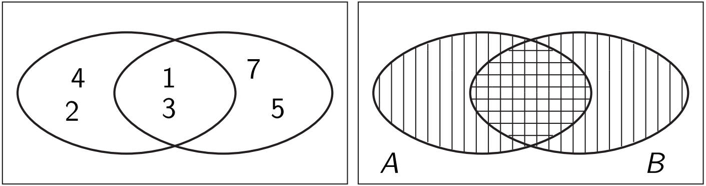


$3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1$

Jumbo Rubik's cube

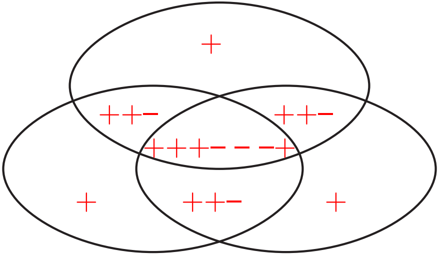
Schaum

A eindig *aantal elementen* $n(A)$ $|A|$ $\#A$



Lem.1.9

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Cor.1.10, Thm.5.8

Voor eindige verzamelingen A, B en C geldt dat
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Lem.1.9 *

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| \stackrel{*}{=} |A| + |\underbrace{B \cup C}_{1}| - |\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{2}|$$

1 $\quad |B \cup C| \stackrel{*}{=} |B| + |C| - |B \cap C|$

2 $\quad A \cap (B \cup C) \stackrel{\text{distr}}{=} (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$-|(A \cap B) \cup (A \cap C)| \stackrel{*}{=} -|A \cap B| - |A \cap C| + |\underbrace{(A \cap B) \cap (A \cap C)}_{A \cap B \cap C}|$$

Cor.1.10, Thm.5.8

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Cor.1.10, Thm.5.8

Voor eindige verzamelingen A, B en C geldt dat
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$U = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ getallen deelbaar door 2,3 of 5

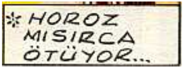
$$A_2 \cup A_3 \cup A_5$$

$$A_n = \{\ x \in U \mid x \text{ is deelbaar door } n\ \}$$

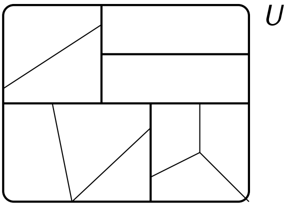
$$|A_n| = 1000 \div n \text{ (zonder rest)}$$

kgv!

$$\begin{gathered} |\ A_2 \cup A_3 \cup A_5\ | = \\ (1000 \div 2) + (1000 \div 3) + (1000 \div 5) \\ -(1000 \div 6) - (1000 \div 10) - (1000 \div 15) \\ +(1000 \div 30) = \\ 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734 \end{gathered}$$



HOROZ
MISIRCA
ÖTÜYOR...



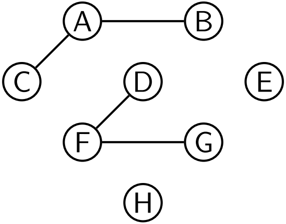
$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ $\quad \mathcal{A} = \{ A_i \}_{i \in I}$

$A_i \subseteq U,\ A_i \neq \varnothing$

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = U$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \bigcup_{i \in I} A_i = U$

$A_i \cap A_j = \varnothing$ als $i \neq j$



$\{ \{ A, B, C \}, \{ D, F, G \}, \{ E \}, \{ H \} \}$

$\mathbb{Z}$ restklassen $\{ [0], [1], \dots, [6] \}$

$[0] = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots\}$

$\dots$

$[6] = \{\dots, -8, -1, 6, 13, 19, \dots\}$

$\mathbb{N}^+$ $\{ D_k \}_{k \in \mathbb{N}}$

$D_0 = \{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$

$D_1 = \{ 2{\cdot}1, 2{\cdot}3, 2{\cdot}5, \dots \}$

$D_2 = \{ 4{\cdot}1, 4{\cdot}3, 4{\cdot}5, \dots \}$

$\dots$

$D_k = \{ 2^k{\cdot}m \mid m \text{ oneven} \}$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ $\neg \exists i : P(i) = \forall i : \neg P(i)$

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ desda *er is een* $i \in I$ met $x \in A_i$

$$\{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3\} \quad \{1,2,4\} \quad \{1,3,4\} \quad \{2,3,4\}$$

$$\{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{1,4\} \quad \{2,3\} \quad \{2,4\} \quad \{3,4\}$$

$$\{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{4\}$$

$$\varnothing$$

definitie

$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$ $\quad$ ($X \in \mathcal{P}(A)$ desda $X \subseteq A$)

$$\mathcal{P}(\{ a, b, c \}) = \{ \{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \varnothing \}$$

$\varnothing \subseteq A$ $\quad$ $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ $\quad$ $A \subseteq A$ $\quad$ $A \in \mathcal{P}(A)$

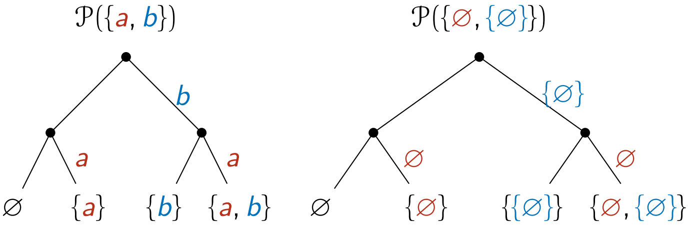
ook $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(A)$

A eindig dan $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

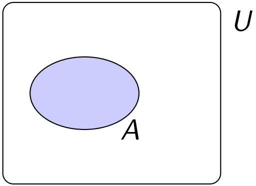
$2^0 = 1 \quad \mathcal{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$

$2^1 = 2 \quad \mathcal{P}(\ \mathcal{P}(\varnothing)\ ) = \mathcal{P}(\ \{\varnothing\}\ ) = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} = \{ \{ \ \}, \{ \varnothing \} \}$

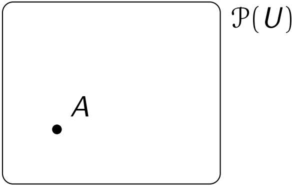
$2^2 = 4 \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \mathcal{P}(\{ \varnothing, \{\varnothing\} \}) = \{ \{ \ \}, \{ \varnothing \}, \{ \{\varnothing\} \}, \{ \varnothing, \{\varnothing\} \} \}$



$\{\ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$ $\qquad$ $\{\ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}$



$A \subseteq U$

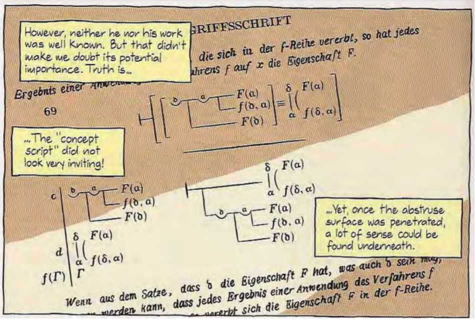


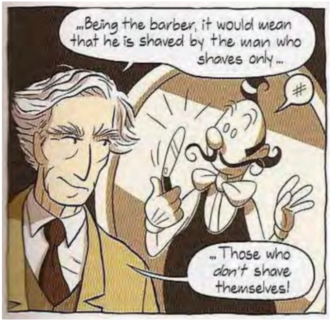
$A \in \mathcal{P}(U)$

$$\varnothing \notin \varnothing \qquad \varnothing \subseteq \varnothing$$

$$\varnothing \in \{\, \varnothing \,\} \quad \varnothing \subseteq \{\, \varnothing \,\}$$


GIGGERIGI!



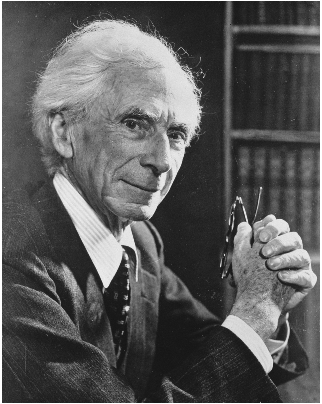


A. Doxiadis, C. Papadimitriou, A. Papadatos:
Logicomix, An epic search for truth, 2009.

$*54{\cdot}43. \quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

A.N. Whitehead, B. Russell, Principia Mathematica, 1910



Trellech 1872 –
Penrhyndeudraeth 1970

wikipedia nationaal archief

$$Z \stackrel{def}{=} \{ V \mid V \notin V \}$$

$$V \stackrel{?}{\in} Z \quad \text{desda} \quad V \notin V$$

$$Z \stackrel{?}{\in} Z \quad \text{desda} \quad Z \notin Z$$

Georg Cantor (1874) on-aftelbaar (*overaftelbaar*)

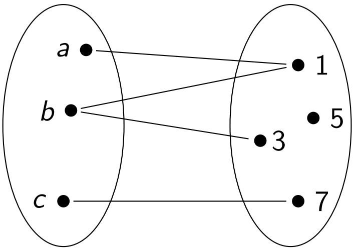
Entscheidungsproblem David Hilbert

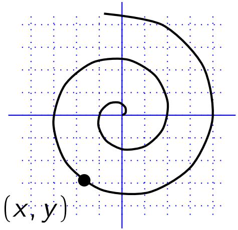
Kurt Gödel (1931) on-volledigheid 'deze stelling heeft geen bewijs'

Alonzo Church (1935) λ-calculus
Emil Post (1936) finite combinatory processes
Alan Turing (1936) on-berekenbaar Turing machine

Hoofdstuk 2

Relaties


a
b
c
1
5
3
7


(x, y)

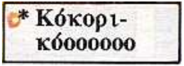
Augustus De Morgan

When two objects, qualities, classes, or attributes, viewed together by the mind, are seen under some connexion, that connexion is called a relation.

On the Syllogism, No. III, and on Logic in general, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1858

Madurai, India 1806 – 1871 London

wikipedia


* Κόκορι-
κόοοοοοο

(geordend) *paar* (x, y)

$$(3,5) \neq (5,3) \qquad \{3,5\} = \{5,3\}$$

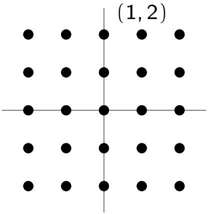
verzamelingen A, B

(Cartesisch) product $A \times B$ $\{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \}$

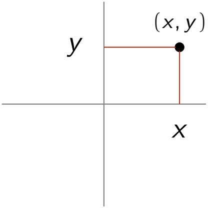
$\{a, b, c\} \times \{1, 3, 5, 7\}$

(a,1)	(a,3)	(a,5)	(a,7)
(b,1)	(b,3)	(b,5)	(b,7)
(c,1)	(c,3)	(c,5)	(c,7)

$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Def. 2.1

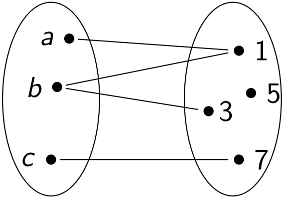
(binaire) *relatie* $\quad R \subseteq A \times B \quad$ "van A naar B"

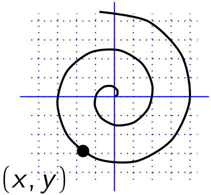
$$R \subseteq A \times A \quad \text{"in } A\text{"}$$

$x\,R\,y \quad (x,y) \in R \qquad a \not{R}\, b$

$$\{\,(a,1),(b,1),(b,3),(c,7)\,\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{1,3,5,7\}$$

$$\{\,(r\cdot\cos(r), r\cdot\sin(r)) \mid r \geqslant 0\,\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$





lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ (parallel) $\ell \perp m$ (loodrecht)

getallen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$x = y$ $x \leqslant y$ $x < y$ (kleiner/gelijk)

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ (deelverzameling) $A \cap B = \varnothing$ (disjunct)

figuren (in het vlak)

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (congruent)

(gehele) getallen $\mathbb{N}$

$x \mid y$ (deler)

element vs verzameling

$x \in A$

$$\begin{array}{cccc} < & > & \nless & \ngtr \\ \leqslant & \geqslant & \nleqslant & \ngeqslant \end{array}$$

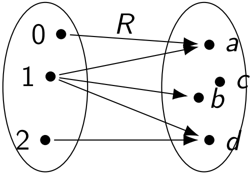
$$< \; > \; \nless \; \ngtr \; \leqslant \; \geqslant \; \nleqslant \; \ngeqslant \; \nleq \; \ngeq \; \lesseqgtr \; \lessdot \; \lessapprox \; \lesseqgtr \; \lesseqqgtr \; \lesssim \; \Subset \; \Supset$$
$$\prec \; \succ \; \nprec \; \nsucc \; \preceq \; \succeq \; \npreceq \; \nsucceq \; \ll \; \gg \; \lll \; \ggg \; \subset \; \supset \; \subseteq \; \supseteq \; \nsubseteq$$
$$\nsupseteq \; \sqsubset \; \sqsupset \; \sqsubseteq \; \sqsupseteq \; = \; \neq \; \doteq \; \equiv \; \approx \; \cong \; \simeq \; \sim \; \propto \; \parallel \; \nparallel \; \asymp \; \bowtie \; \vdash$$
$$\dashv \; \in \; \ni \; \smile \; \frown \; \models \; \perp \; \mid \; \triangleleft \; \triangleright \; \trianglelefteq \; \trianglerighteq \; \leftarrow \; \rightarrow \; \Leftarrow \; \Rightarrow \; \mapsto$$

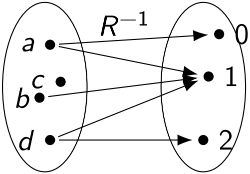
Mathematical symbols in Unicode

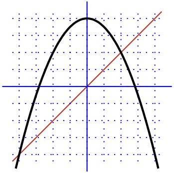
$R \subseteq A \times B$

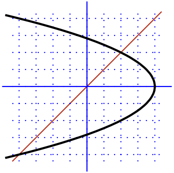
inverse $\quad R^{-1} \quad \{ (y,x) \mid x \mathrel{R} y \} \subseteq B \times A.$

$x \leqslant y \quad y \geqslant x \qquad x \in A \quad A \ni x$



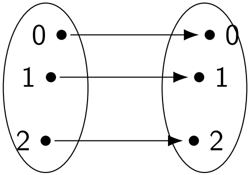


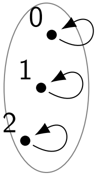


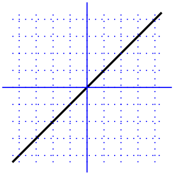


identiteit id_A $\{\,(a,a) \mid a \in A\,\} \subseteq A \times A$

gelijkheid, diagonaal $=_A$ Δ_A







$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$R, S \subseteq A \times B$

$$R \cup S \quad R \cap S \quad R^c \qquad \subseteq A \times B$$

$$x \; R^c \; y \text{ desda } x \not R \; y$$

$$\text{“}<\text{”} \cup \text{“}=\text{”} = \text{“}\leqslant\text{”} \qquad (?)$$

$$R_< \cup R_= = R_\leqslant$$

$$R_\subseteq \cap R_\supseteq = R_=$$

Overzicht

2 Relaties

- Cartesisch product
- Representaties
- Eigenschappen
- Compositie
- Relaties "in"
- Afsluiting
- Partiële ordening
- Equivalentierelatie

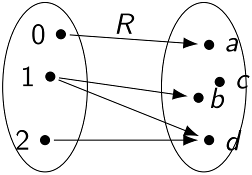
$$\{\ (0, a), (1, b), (1, d), (2, d)\ \}$$

matrix

van\naar	a	b	c	d
0	$\times$			
1		$\times$		$\times$
2				$\times$

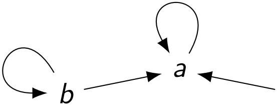
	a	b	c	d
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	0	1

pijldiagram



gerichte graaf

$$\{(a, a), (b, a), (b, b), (c, a)\}$$

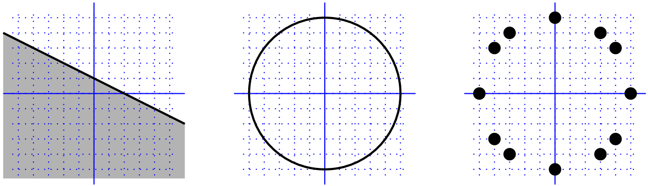


grafiek 'nette' figuur

halfvlak $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + 2y \leqslant 2 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

cirkel $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 25 \}$

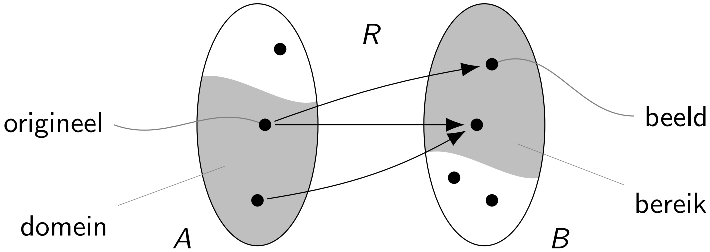
discreet $\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 25 \}$



$R \subseteq A \times B$

domein $\mathrm{dom}(R) = \{\, x \in A \mid x\, R\, y \text{ voor zekere } y \in B \,\}$

bereik $\mathrm{ran}(R) = \{\, y \in B \mid x\, R\, y \text{ voor zekere } x \in A \,\}$ *range*

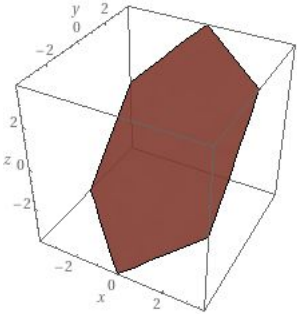


multidimensionaal — *n*-tupel

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

studentnr × cursuscode × cijfer

stnr	**cuco**	**cf**	**stnr**	**cuco**	**cf**
8303	M250	7	9594	T250	6
8303	T350	8	9352	U161	9
4722	B140	7	2592	A470	8
4722	S570	10	2592	M350	9
4722	T480	9	2592	V400	6

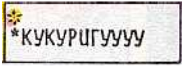


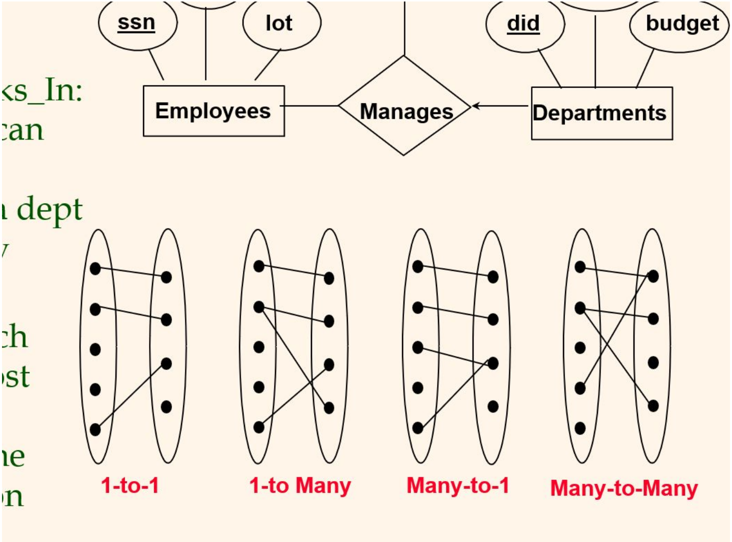
wolframalpha.com

Plus $= \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \,\}$

2 Relaties

- Cartesisch product
- Representaties
- Eigenschappen
- Compositie
- Relaties "in"
- Afsluiting
- Partiële ordening
- Equivalentierelatie





Database Management Systems 3ed, Ramakrishnan & Gehrke

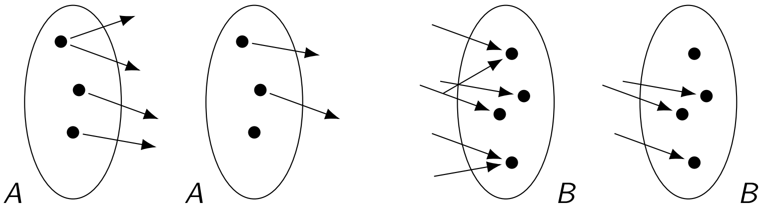
$R \subseteq A \times B$

vanuit A overal

- minimaal één pijl *totaal*
- maximaal één pijl *functioneel*

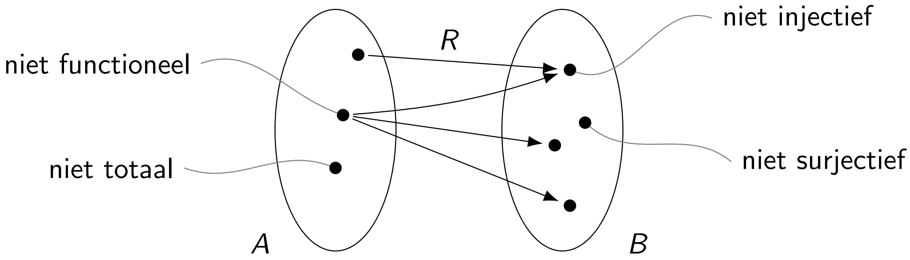
naar B overal

- minimaal één pijl *surjectief* (of '*op*')
- maximaal één pijl *injectief* (of *één-één*)

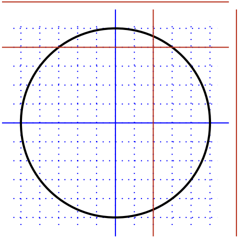


$R \subseteq A \times B$

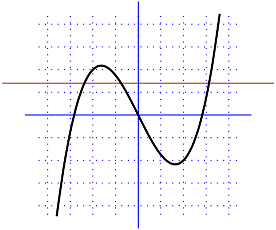
- *totaal* $\quad \mathrm{dom}(R) = A$
- *surjectief* $\quad \mathrm{ran}(R) = B \quad$ (of '*op*')
- *functioneel* $\quad$ uit $x \, R \, y$ en $x \, R \, z$ volgt dat $y = z$
- *injectief* $\quad$ uit $x \, R \, z$ en $y \, R \, z$ volgt dat $x = y \quad$ (of *één-één*)



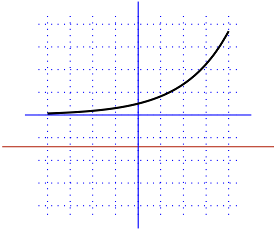
totaal surjectief functioneel injectief



- - - -



TSF -



T - FI

	1	2	3	4
a	1	0	~~0~~	~~0~~
b	0	1	~~1~~	~~0~~
c	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~

T - - -

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	~~0~~	~~0~~	~~0~~
4	0	0	1

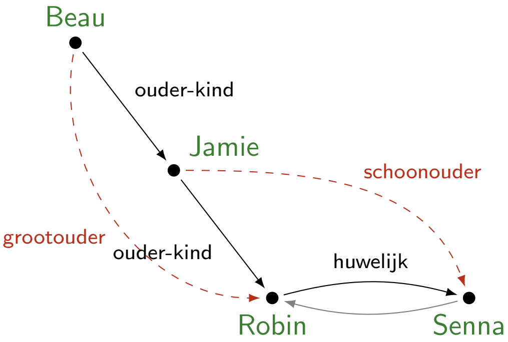
- SFI

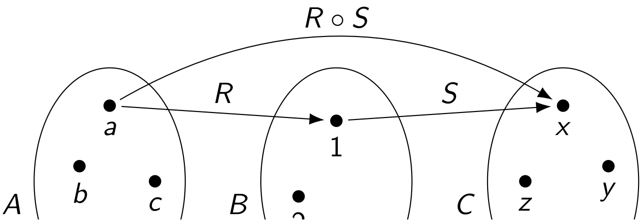
	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	1
c	0	1	0

TSFI

2 Relaties

- Cartesisch product
- Representaties
- Eigenschappen
- **Compositie**
- Relaties “in”
- Afsluiting
- Partiële ordening
- Equivalentierelatie


Beau
ouder-kind
Jamie
schoonouder
grootouder
ouder-kind
huwelijk
Robin
Senna



$R \subseteq A \times B \qquad S \subseteq B \times C$

$a \; R \; 1 \qquad 1 \; S \; x$

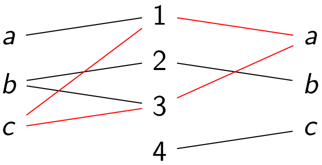
$a \; (R \circ S) \; x$

samenstelling (*compositie*) van R en S $\quad R \circ S \quad \subseteq A \times C$

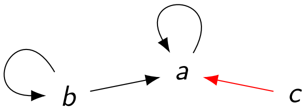
$\{ \, (x, z) \in A \times C \mid \text{ er is een } y \in B \text{ met } (x, y) \in R \text{ en } (y, z) \in S \, \}$

$$R = \{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3)\} \subseteq \{a,b,c\}\times\{1,2,3,4\}$$
$$S = \{(1,a),(2,b),(3,a),(4,c)\} \subseteq \{1,2,3,4\}\times\{a,b,c\}.$$

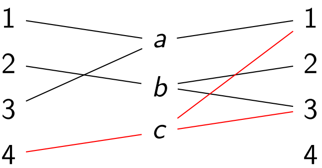
$R \circ S$

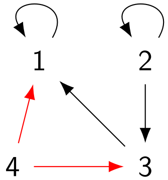


$R \circ S = \{(a,a),(b,a),(b,b),(c,a)\}$



$S \circ R$





relaties

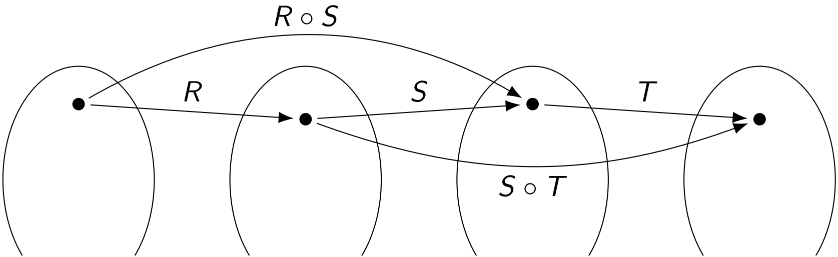
$$\overrightarrow{x\ R\ y} \qquad\qquad x\ (\overrightarrow{R \circ S})\ y$$

functies

$$y = \overleftarrow{f(x)} \qquad\qquad y = \overleftarrow{g(f}(x)) = (\overleftarrow{g \circ f})(x)$$

Thm. 2.1

$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$



matrixvermenigvuldiging☒

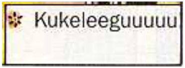
$A = (a_{ik}) \quad B = (b_{kj})$

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad c_{ij} = \bigvee_k a_{ik} \wedge b_{kj}$$

	1	2	3	4
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	1	0	1	0

	x	y	z
1	1	0	0
2	0	1	0
3	1	0	0
4	0	0	1

	x	y	z
a	1	0	0
b	1	1	0
c	1	0	0


Kukeleeguuuuu

lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ (parallel) $\quad \ell \perp m$ (loodrecht)

getallen $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$x = y \quad x \leqslant y \quad x < y$ (kleiner/gelijk)

verzamelingen $\quad \mathcal{P}(U) \quad$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ (deelverzameling) $\quad A \cap B = \varnothing$ (disjunct)

figuren (in het vlak)

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (congruent)

positieve gehele getallen $\quad \mathbb{N}^+$

$x \mid y$ (deler)

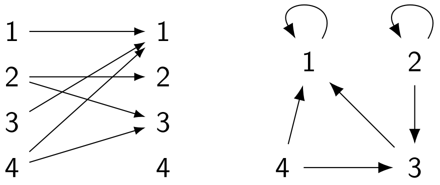
gehele getallen $\quad \mathbb{Z}$

$x \equiv y$ (zelfde rest, bij deling door n)

$R \subseteq A \times A$

representatie: gerichte graaf

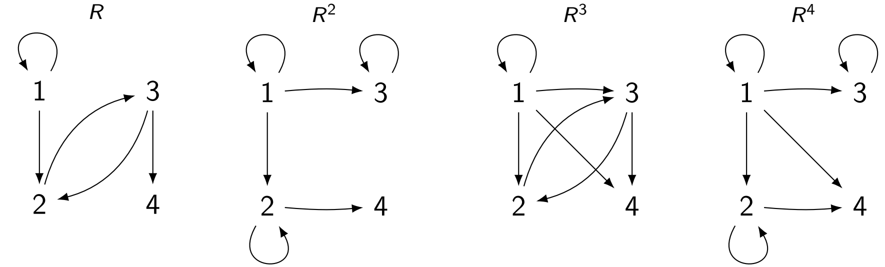
$\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$



$R \subseteq A \times A$

herhaald samenstellen

$$R^1 = R \quad R^2 = R \circ R \quad R^3 = R^2 \circ R \quad \dots$$

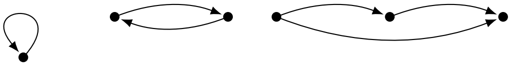


$R \;= \{\ (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (3,4)\ \}$

$R^2 = \{\ (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3)\}$

$R^3 = \{\ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,2), (3,4)\}$

$R^4 = \{\ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3)\}$



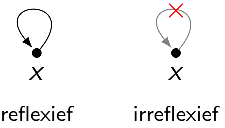
equivalentie

reflexief symmetrisch transitief

partiele ordening

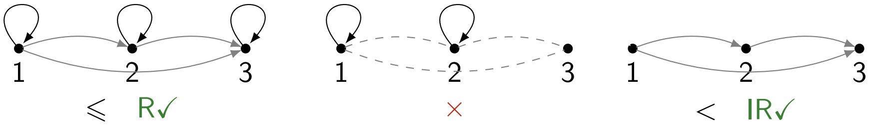
reflexief *anti*symmetrisch transitief

één knoop



$R \subseteq A \times A$

- *reflexief* $\quad x \, R \, x$ voor elk element x van A,
- *irreflexief* $\quad x \, R \, x$ voor *geen enkele* $x \in A$



lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ R✓ (parallel) $\ell \perp m$ R× IR✓ (loodrecht)

getallen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$x = y$ R✓ $x \leqslant y$ R✓ $x < y$ IR✓ (kleiner/gelijk)

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ R✓ (deelverzameling) $A \cap B = \varnothing$ R× IR× (disjunct)

figuren (in het vlak)

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ R✓ (congruent)

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

$x \mid y$ R✓ (deler)

gehele getallen $\mathbb{Z}$

$x \equiv y$ R✓ (zelfde rest, bij deling door n)

lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ R✓ (parallel) $\ell \perp m$ R× IR✓ (loodrecht)

"not reflexive since no line is parallel to itself." (? Schaum p.29)

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

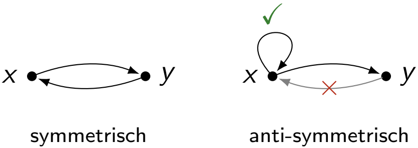
$A \subseteq B$ R✓ (deelverzameling) $A \cap B = \varnothing$ R× IR× (disjunct)

$\{a, b\} \cap \{a, b\} \neq \varnothing$ $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$ (!)

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

$x \mid y$ R✓ (deler)

$x = 1 \cdot x$



$R \subseteq A \times A$

- *symmetrisch* uit $x \, R \, y$ volgt dat $y \, R \, x$
- *anti-symmetrisch* uit $x \, R \, y$ en $y \, R \, x$ volgt dat $x = y$

anti-symmetrisch "geen … tussen *verschillende*"

lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ S✓ (parallel) $\ell \perp m$ S✓ (loodrecht)

getallen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$x = y$ S AS✓(!) $x \leqslant y$ AS✓ $x < y$ AS✓(!) (kleiner/gelijk)

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ AS✓ (deelverzameling) $A \cap B = \varnothing$ S✓ (disjunct)

figuren (in het vlak)

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ S✓ (congruent)

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

$x \mid y$ AS✓ (deler)

gehele getallen $\mathbb{Z}$

$x \equiv y$ S✓ (zelfde rest, bij deling door n)

getallen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$x = y$ S AS✓(!)

$x \leqslant y$ AS✓ als $x \leqslant y$ en $y \leqslant x$ dan $x = y$

$x < y$ AS✓(!) als $\underbrace{x < y \text{ en } y < x}_{\text{kan niet}}$ dan ...

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ AS✓ als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ dan $A = B$

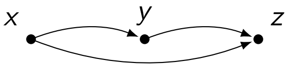
$A \subset B$ AS✓ "kan niet"

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

$x \mid y$ AS✓ (deler)

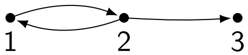
$x \mid y$ dan $x \leqslant y$

$y \mid x$ dan $y \leqslant x$

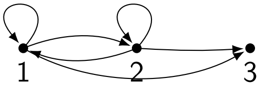


$R \subseteq A \times A$

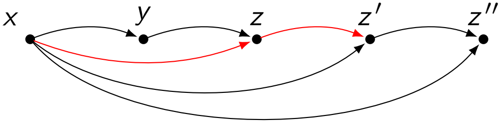
- *transitief* uit $x \mathrel{R} y$ en $y \mathrel{R} z$ volgt dat $x \mathrel{R} z$



×



✓



$R \subseteq A \times A$

- *transitief* uit $x \, R \, y$ en $y \, R \, z$ volgt dat $x \, R \, z$

lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ T✓ (parallel) $\ell \perp m$ × (loodrecht)

getallen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$x = y$ T✓ $x \leqslant y$ T✓ $x < y$ T✓ (kleiner/gelijk)

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ T✓ (deelverzameling) $A \cap B = \varnothing$ × (disjunct)

figuren (in het vlak)

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ T✓ (congruent)

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

$x \mid y$ T✓ (deler)

gehele getallen $\mathbb{Z}$

$x \equiv y$ T✓ (zelfde rest, bij deling door n)

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \cap B = \varnothing$ T× (deler)

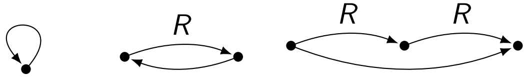
$\{1\} \cap \{2\} = \varnothing$, en $\{2\} \cap \{1\} = \varnothing$ maar $\{1\} \cap \{1\} \neq \varnothing$

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

$x \mid y$ T✓ (deler)

$x \mid y$ dwz $y = k \cdot x$

$y \mid z$ dwz $z = m \cdot y$ $z = mk \cdot x$ dus $x \mid z$



$\mathrm{id} \subseteq R$ $\quad R^{-1} \subseteq R$ $\quad R^2 \subseteq R$

$R \subseteq V \times V$ is

1. reflexief desda $\mathrm{id}_V \subseteq R$
2. irreflexief desda $\mathrm{id}_V \cap R = \varnothing$
3. symmetrisch desda $R^{-1} \subseteq R$
4. antisymmetrisch desda $R^{-1} \cap R \subseteq \mathrm{id}_V$
5. transitief desda $R^2 \subseteq R$

Thm. 2.2

$R \subseteq V \times V$ is

transitief desda $R^n \subseteq R$ voor alle $n \geqslant 1$


KIKERIKI!

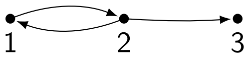
P relatie eigenschap

(ir)reflexief, (anti)symmetrisch, transitief, ...

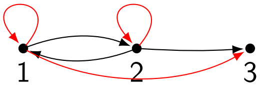
$R \subseteq A \times A$ P-afsluiting

– $R \subseteq P(R) \subseteq A \times A$ met eigenschap P.

– kleinste



$\times$



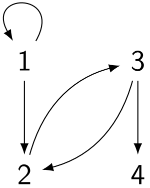
transitief ✓

– is er wel een $P(R)$?

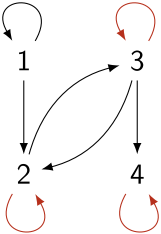
– is er een (unieke) kleinste?

vb reflexieve afsluiting

R



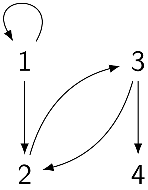
$R \cup \mathrm{id}$



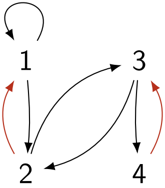
$$R = \{\ (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (3,4)\ \}$$

$$\mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}} = \{\ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\ \}$$

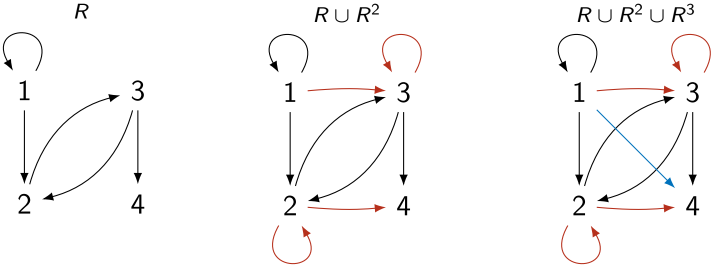
R



$R \cup R^{-1}$



$$R \;= \{\ (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (3,4)\ \}$$
$$R^{-1} = \{\ (1,1), (2,1), (3,2), (3,2), (4,3)\ \}$$



$R \;= \{\, (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (3,4) \,\}$

$R^2 = \{\, (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

$R^3 = \{\, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,2), (3,4)\}$

$R^4 = \{\, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3)\}$

$R \subseteq A \times A$

Thm. 2.3

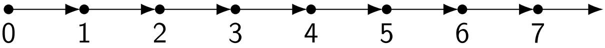
reflexief$(R) = R \cup \mathrm{id}_A$
symmetrisch$(R) = R \cup R^{-1}$

$R^1 = R,\ R^2 = R^1 \circ R,\ R^3 = R^2 \circ R,\ \ldots,\ R^{n+1} = R^n \circ R,$

$R^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$ "een, twee, of meer stappen"

Thm. 2.4

transitief$(R) = R^+$



$"+1" \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$R = \{\ (n, n{+}1) \mid n \in \mathbb{N}\ \}$$

$$R^k = \{\ (n, n{+}k) \mid n \in \mathbb{N}\ \} \quad k \text{ vast}$$

$$R^+ = \{\ (n, m) \mid n < m\ \} \quad \text{oneindige vereniging}$$

$R \subseteq A \times A$

$$R^0 = \mathrm{id}_A,\ R^1 = R,\ R^2 = R^1 \circ R,\ \ldots,\ R^{n+1} = R^n \circ R,$$

$R^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$ transitief

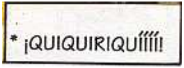
"een, twee, of meer stappen"

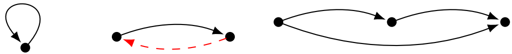
$R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n$ reflexief én transitief

"nul, een, twee, of meer stappen"

Overzicht

2 Relaties
- Cartesisch product
- Representaties
- Eigenschappen
- Compositie
- Relaties “in”
- Afsluiting
- Partiële ordening
- Equivalentierelatie





partiële ordening

“past in”

equivalentierelatie

“zelfde (kleur)”

reflexief, antisymmetrisch, transitief

reflexief, symmetrisch, transitief

lijnen (in het vlak)

$\ell \parallel m$ EqRel (parallel)

getallen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$x \leqslant y$ PartOrd $x = y$ EqRel

verzamelingen $\mathcal{P}(U)$ collectie $\mathcal{C}$

$A \subseteq B$ PartOrd (deelverzameling)

figuren (in het vlak)

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ EqRel (congruent)

positieve gehele getallen $\mathbb{N}^+$

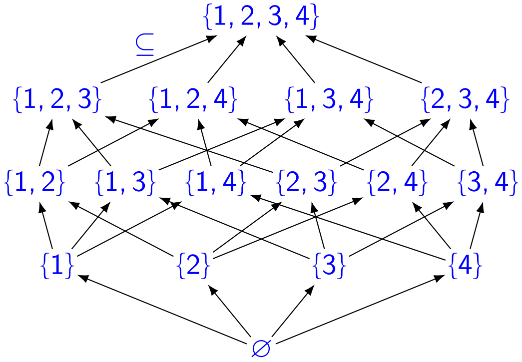
$x \mid y$ PartOrd (deler)

gehele getallen $\mathbb{Z}$

$x \equiv y$ EqRel (zelfde rest, bij deling door n)

$R \subseteq A \times A$ partiële ordening reflexief, antisymmetrisch, transitief

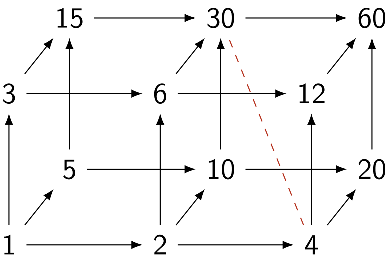
inclusie $\subseteq$ in $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$



Hasse diagram $\pm$reflexief $\pm$transitief

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 30, 60\}$ delers van 60

deler $|$ in D partieel

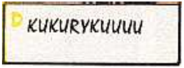


kleiner(gelijk) $\leqslant$ in D totaal

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] \arrow[rrrrrrr, bend right] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 10 \arrow[r] & 12 \arrow[r] & 15 \arrow[r] & 20 \arrow[r] & 30 \arrow[r] & 60 \end{tikzcd}$$

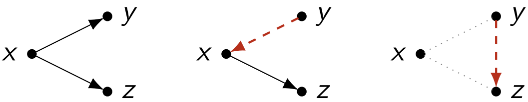
Overzicht

2. Relaties
   - Cartesisch product
   - Representaties
   - Eigenschappen
   - Compositie
   - Relaties “in”
   - Afsluiting
   - Partiële ordening
   - **Equivalentierelatie**

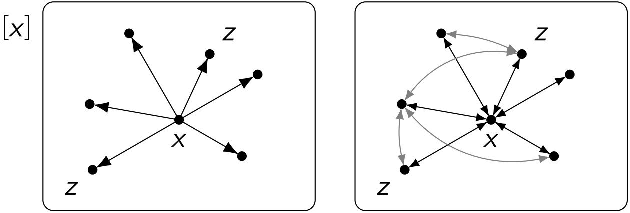


$R \subseteq A \times A$ equivalentierelatie reflexief, symmetrisch, transitief

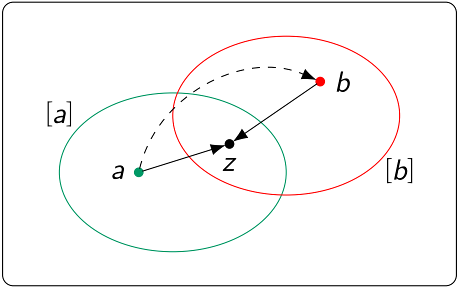
als $x \; R \; y$ en $x \; R \; z$ dan $y \; R \; z$



equivalentie klasse $[x] = \{ \, z \mid x \; R \; z \, \}$



$R \subseteq A \times A$ equivalentierelatie reflexief, symmetrisch, transitief



Thm. 2.6

1. $a \in [a]$
2. $[a] = [b]$ desda $a \; R \; b$
3. $[a] \neq [b]$ desda $[a] \cap [b] = \varnothing$

- in $\mathbb{Z}$ $x - y$ deelbaar door 5 $x \equiv y \pmod 5$

-11	-6	-1	4	9	14	19	$\cdots$
$\cdots$	-7	-2	3	8	13	18	$\cdots$
$\cdots$	-8	-3	2	7	12	17	$\cdots$
$\cdots$	-9	-4	1	6	11	16	$\cdots$
$\cdots$	-10	-5	0	5	10	15	$\cdots$

eigenschap: rest (bij deling door 5)

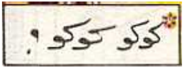
- parallele lijnen $\ell \parallel m$ richtingscoëfficiënt
- congruentie $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ grootte & vorm

– Cartesisch product
– relatie
– inverse
– Boolese operaties
– totaal, functioneel, surjectief, injectief
– compositie (samenstelling)
– ir/reflexief
– anti/symmetrie
– transitief

Hoofdstuk 3

Functies

$$\text{Functions } \underbrace{\text{and Algorithms}}_{\text{andere vakken}}$$

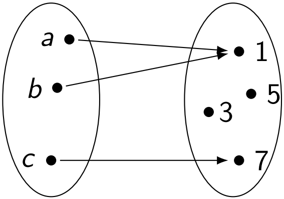


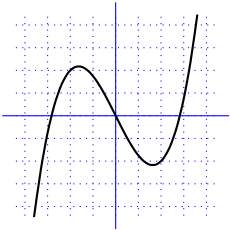
A, B verzamelingen

functie $f : A \to B$ afbeelding, *map*

definitie

een *voorschrift* dat voor elk element x in A één element $y \in B$ toevoegt





$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, \ldots$

functie $f : A \to B$

grafiek van f $\quad \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\} \subseteq A \times B$ $\quad$ binaire relatie

$$f(x) = 2(x+1) \qquad\qquad g(x) = 2x + 2$$

$$h(x) = (x{+}1)^2 - (x{+}3)(x{-}2) + (x{-}5)$$

dezelfde uitkomsten

$f, g : A \to B$ $\quad$ *gelijk*

$$f = g \quad \text{desda} \quad f(a) = g(a), \text{ voor alle } a \in A$$

(informeel) voorschrift $\rightsquigarrow$ grafiek $\rightsquigarrow$ binaire relatie (formeel)

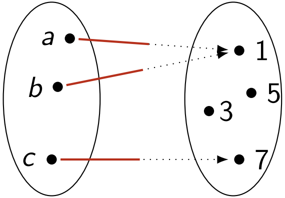
Definitie

$R \subseteq A \times B$ *functie* voor elke $x \in A$ precies één $y \in B$ zodat xRy

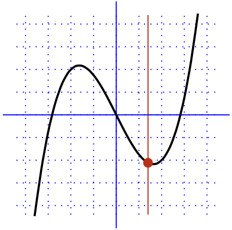
ten minste één totaal

ten hoogste één functioneel

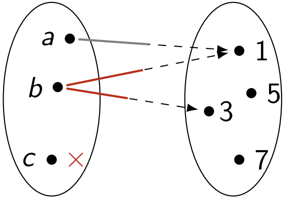
$R \subseteq A \times B$ *functie* totaal & functioneel *functie*



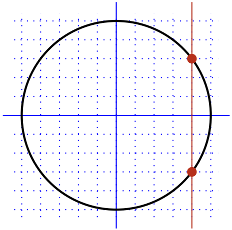
	1	2	3	4
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	0	1	0



maar niet . . .

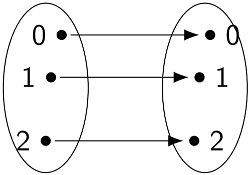


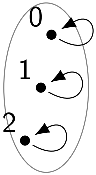
	1	2	3	4
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	0	0

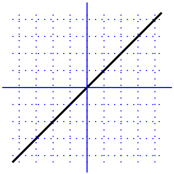


nu als functie

identiteit id_A 1_A $\{\, (a, a) \mid a \in A \,\} \subseteq A \times A$





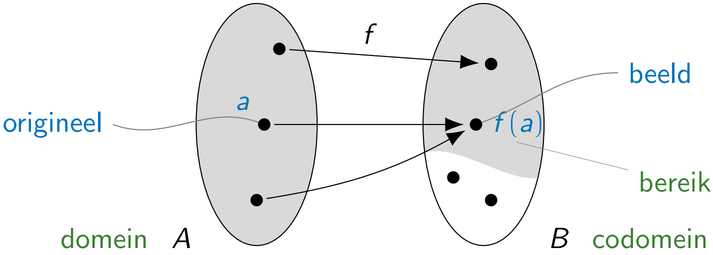


$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$f : A \to B$$

$$y = f(x)$$

$$x \mapsto f(x)$$

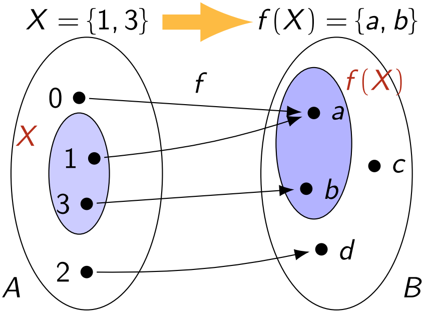


$f : A \to B$

$X \subseteq A$ *beeld* $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$

$= \{y \in B \mid y = f(x) \text{ voor zekere } x \in X\}$

$f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$

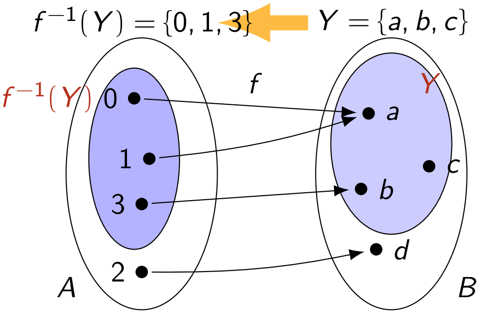


$f : A \to B$

$Y \subseteq B$ *origineel* $f^{-1}(Y) = \{\, x \in A \mid f(x) \in Y \,\}$

$= \{x \in A \mid f(x) = y \text{ voor zekere } y \in Y\}$

$f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$



$$f : \{0,1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$$

$X = \{1,3\}$

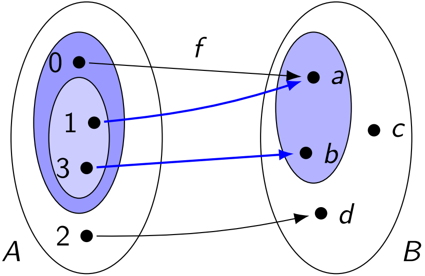
$f(X) = \{a,b\}$

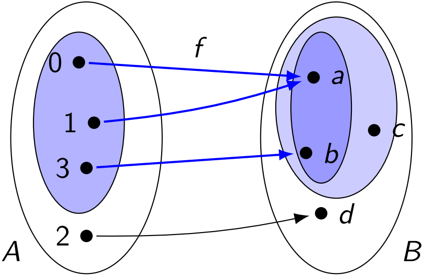
$f^{-1}(f(X)) = \{0,1,3\}$

$Y = \{a,b,c\}$

$f^{-1}(Y) = \{0,1,3\}$

$f(f^{-1}(Y)) = \{a,b\}$





Zij $f : A \to B$ een functie.

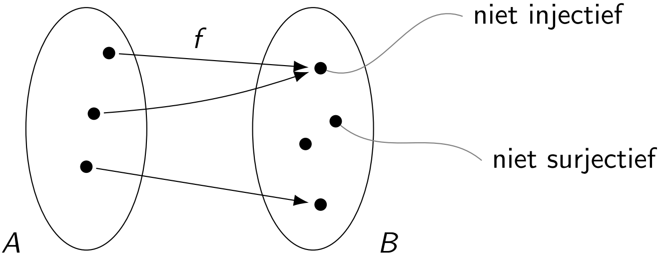
(i) Voor elke $X \subseteq A$ geldt: $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$.

(ii) Voor elke $Y \subseteq B$ geldt: $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

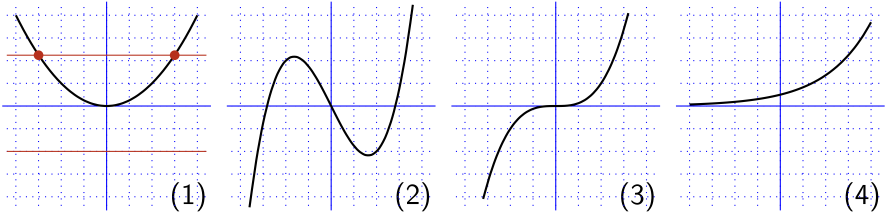
3 Functies
- Begrippen
- Injectief, surjectief
- Cardinaliteit
- Rijen

$f : A \to B$

- totaal $\quad \mathrm{dom}(R) = A$
- *surjectief* $\quad \mathrm{ran}(R) = B \quad$ (of '*op*')
- functioneel $\quad$ uit $x\,R\,y$ en $x\,R\,z$ volgt dat $y = z$
- *injectief* $\quad$ uit $f(x) = f(y)$ volgt dat $x = y \quad$ (of *één-één*)



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

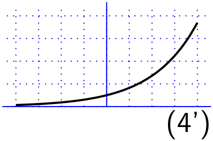


(4) $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto e^x$

niet surjectief

(4') $\quad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto e^x$

surjectief (en injectief)



surjectief injectief

	1	2	3	4
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0

injectief

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	1	0
4	0	0	1

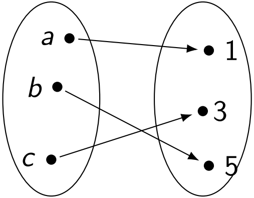
surjectief

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	1
c	0	1	0

sur-/injectief

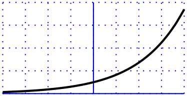
$f : A \to B$

bijectie surjectief & injectief op & 1-1



naar

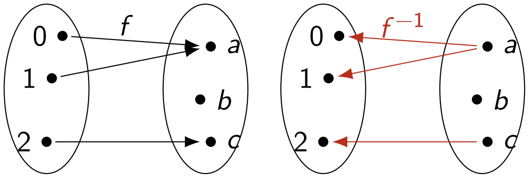
van	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0

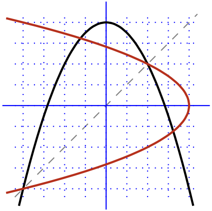


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

inverse *relatie*

$f : A \to B$ $\quad$ $f^{-1} : B \to A$ $\quad$ $\{\, (y, x) \mid y = f(x) \,\}$

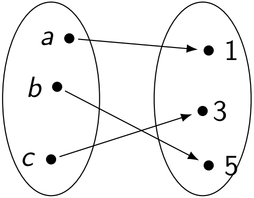




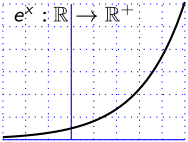
Thm. 3.1

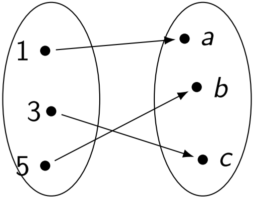
inverse functie f^{-1} van $f : A \to B$ bestaat desda f een bijectie is

bijectie $\quad$ surjectief & injectief $\quad$ precies één pijl aankomst

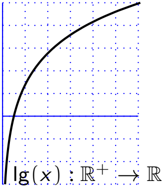


	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0

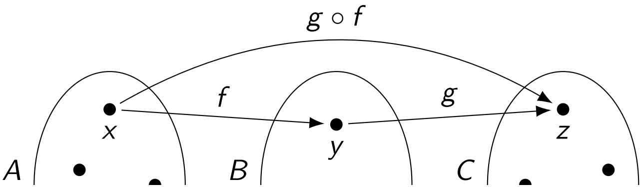




	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0



$$h(x) = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \qquad f(x) = x + \tfrac{\pi}{2} \qquad g(y) = \sin(y)$$



$$f : A \to B \qquad g : B \to C$$

$$f(x) = y \qquad g(y) = z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

samenstelling (*compositie*) van f en g $\quad g \circ f : A \to C$

$$x \mapsto g(f(x))$$

samenstelling is associatief $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

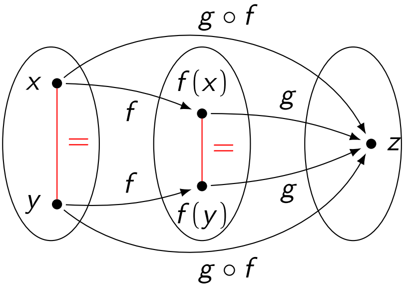
$f : A \to B \quad g : B \to C$

Prb. 3.7

als f, g *surjectief* 'op', dan ook $g \circ f$ minimaal één

als f, g *injectief* '1-1', dan ook $g \circ f$ maximaal één

h injectief $\quad h(x) = h(y) \quad$ dan $\quad x = y$



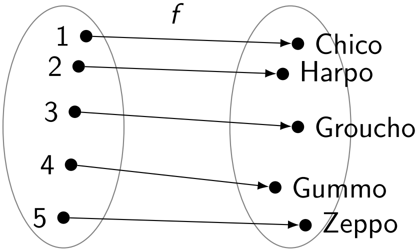
$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad \text{dan} \quad x = y$$

$$g(f(x)) = g(f(y)) \quad \underbrace{\text{dan}}_{g} \quad f(x) = f(y) \quad \underbrace{\text{dan}}_{f} \quad x = y$$

3 Functies
- Begrippen
- Injectief, surjectief
- Cardinaliteit
- Rijen

V eindig $\quad |V| = n$

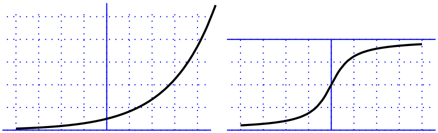
$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to V \quad$ bijectie



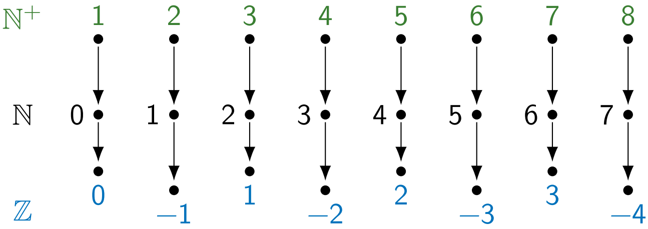
gelijkmachtig $A \simeq B$ bijectie $f : A \to B$

equipotent

$\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^+$ $\mathbb{R} \simeq (0,1)$



$\mathbb{N}^+ \simeq \mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$



gelijkmachtig $A \simeq B$ bijectie $f : A \to B$

equivalentierelatie

– $A \simeq A$ reflexief $\mathrm{id} : A \to A$ indentiteit

– als $A \simeq B$ dan $B \simeq A$ symmetrisch

$f : A \to B$ dan $f^{-1} : B \to A$ inverse

– als $A \simeq B$ en $B \simeq C$ dan $A \simeq C$ transitief

$f : A \to B$, $g : B \to C$ dan $g \circ f : A \to C$ compositie

Sch 3.7 Cardinality (later behandeld!)

3 Functies
- Begrippen
- Injectief, surjectief
- Cardinaliteit
- Rijen

- $1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 9, \ldots$
- $\heartsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \diamondsuit, \ldots$

rij $\quad a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad a : \mathbb{N}^+ \to A \qquad a : \mathbb{N} \to A$

a_n ipv $a(n)$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- $\underset{1^e}{\frac{1}{1}}, \underset{2^e}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$
- $\underset{0^e}{1}, \underset{1^e}{2}, \underset{2^e}{4}, 8, 16, \ldots \qquad (2^n)_{n \geqslant 0}$
- $\underset{0^e}{1}, \underset{1^e}{-1}, \underset{2^e}{1}, -1, 1, \ldots \qquad a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ even} \\ -1 & n \text{ oneven} \end{cases} \qquad (n \geqslant 0)$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \textit{for loop}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$$

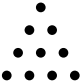
$$\textstyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \qquad \sum_{i=1}^{0} a_i = 0 \qquad (!)$$

- $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
- $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2^n$
- $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1 \qquad \bigcup_{i=1}^{0} A_i = \varnothing$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad \bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1 \qquad \bigcap_{i=1}^{0} A_i = U$$

triangular numbers $\boxed{\text{rij} \rightsquigarrow \text{reeks}}$



$$\begin{array}{ccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \end{array}$$

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ $\quad S_n$

$$\begin{array}{ccccccc} S_n & 1 & 2 & 3 & n-2 & n-1 & n \\ S_n & n & n-1 & n-2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2S_n & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 \end{array} \quad 2S_n = n \cdot (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & +2 & +4 & +8 & +16 & +32 & +64 & \dots \\ 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 63 & 127 & \end{array}$$

$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n \qquad S_n$

$$\begin{array}{cccccccc} 2S_n & & 2 & 4 & & 2^{n-1} & 2^n & 2^{n+1} \\ S_n & 1 & 2 & 4 & & 2^{n-1} & 2^n & \\ \hline S_n & -1 & & & & & & 2^{n+1} \end{array} \qquad S_n = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

rekenkundige reeks (*arithmetical*)

- $8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots$

$a_0 = a,\ a_1 = a + v,\ a_2 = a + 2v,\ \ldots$ verschil v

$a_i = a + iv \quad (n \geqslant 0)$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{(n+1)\cdot(2a + n\,v)}{2}}$$

(aantal termen) x (eerste + laatste) / 2

- $8+11+14+17+\ldots+41 = \frac{12\cdot 49}{2} = 394 \qquad \frac{41-8}{11-8} = 11$

meetkundige reeks (*geometric*)

- $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

$a_0 = a,\ a_1 = ra,\ a_2 = r^2 a,\ \ldots$ reden r (*ratio*)

$$a_i = a\,r^i \quad (n \geqslant 0)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a\,r^i = a\,\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad (r \neq 1)}$$

- $4+8+16+32+64 = 4\frac{2^5-1}{2-1} = 4{\cdot}31 \qquad (r=2,\ a=a,\ n{+}1=5)$
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^4-1}{2^4} = \frac{15}{16} \qquad (r=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{2},\ n{+}1=4)$
- $\underbrace{1-1}+\underbrace{1-1}+\cdots+1 = 1\frac{(-1)^{n+1}-1}{-1-1} \overset{n\text{ even}}{=} \frac{-2}{-2} = 1$

- $1+4+9+16+\cdots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $$\begin{array}{c|cccccccc} n & 1 & \times 2 & \times 3 & \times 4 & \times 5 & \times 6 & \times 7 & \dots \\ n! & 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 & \end{array}$$

  $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ $0! = 1$ faculteit *factorial*

  $$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n\cdot(n-1)! & n \geqslant 1 \end{cases}$$

- $$\begin{array}{c|ccccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ F_n & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \end{array}$$ Fibonacci

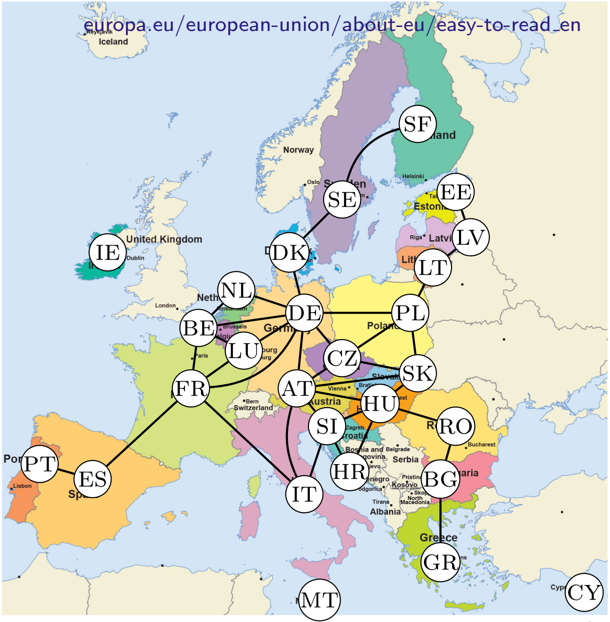
  $$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

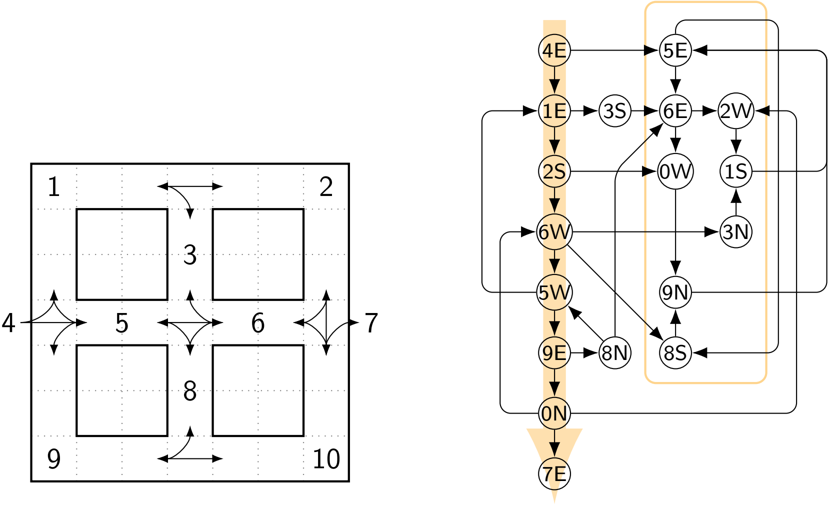
Sch 1.8 Mathematical induction (later behandeld!)

Hoofdstuk 4

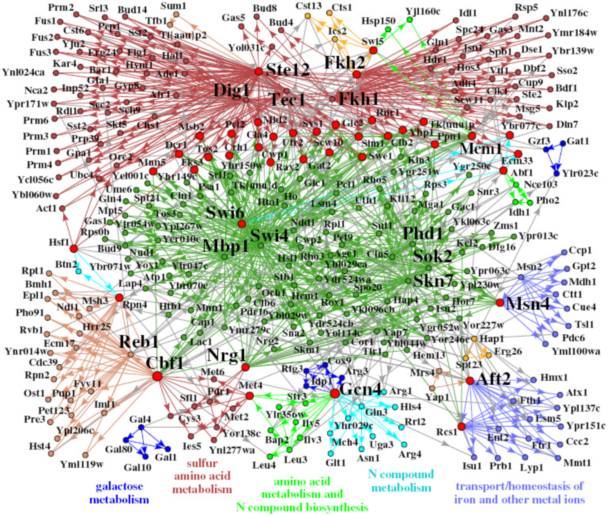
Grafen

europa.eu/european-union/about-eu/easy-to-read_en





Robert Abbott multistate maze. mathpuzzle.com



Directed network modules, Palla etal. New Journal of Physics, 2007.

zie ook college SNACS

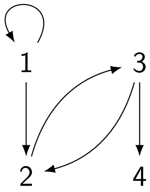
‘families’ grafen

punten + verbindingen

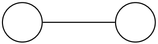
- gericht vs ongericht
- parallelle verbindingen multi-
- info verbindingen gewogen
- identiteit knopen abstract

wikipedia spoorlijnen

$$\{\ (1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (3,4)\ \}$$

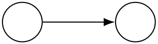


	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	0	0	0



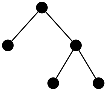
ONGERICHT

ch.8 Graph Theory



GERICHT

ch.9 Directed Graphs



ch.8.8 Tree graphs
ch.9.4 Rooted trees
ch.10 Binary Trees

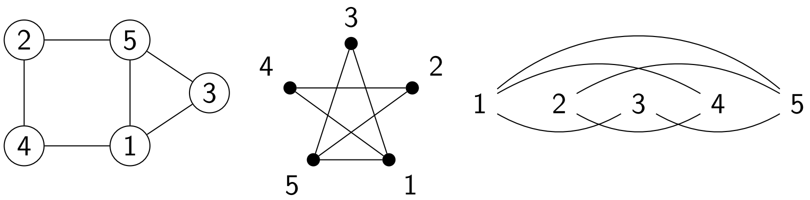

KYKELIKY!

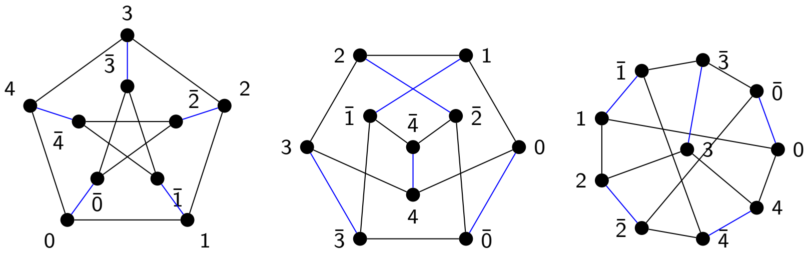
graaf $G = (V, E)$ verzamelingen V, E

- $V = V(G)$ knopen (punten; *vertices*, *nodes*)
- $E = E(G)$ lijnen (takken, zijden, kanten, bogen; *edges*, *arcs*)

lijn $\{u, v\}$ 'pair distinct vertices'

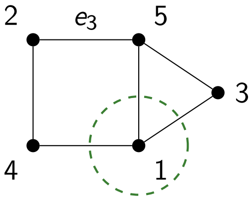
$V = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$
$E = \{\ \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\ \}$




3
$\bar{3}$
4
$\bar{2}$
2
$\bar{4}$
$\bar{1}$
$\bar{0}$
0
1
2
1
$\bar{1}$
$\bar{4}$
$\bar{2}$
3
0
4
$\bar{3}$
$\bar{0}$
$\bar{1}$
$\bar{3}$
$\bar{0}$
1
0
3
2
4
$\bar{2}$
$\bar{4}$

$G = (V, E)$ $e = \{u, v\}$ in E

- e *verbindt* u en v
- u *uiteinde* van e
- u en v *adjacent* (buren)
- u en e *incident*



graad van v aantal buren
$\deg(v)$

geïsoleerd $\deg(v) = 0$

$G = (V, E)$

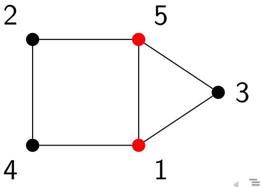
Thm. 8.1

som van de graden is twee keer aantal lijnen

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|$$

gevolg

het aantal knopen met oneven graad is even



$G = (V, E)$ met $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 'geordend'

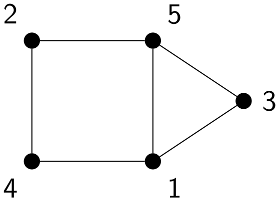
adjacency matrix burenmatrix

$n \times n$ matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{anders} \end{cases} .$$

ongerichte graaf:

- symmetrisch
- nullen op diagonaal



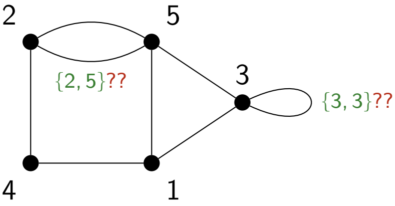
naar

van	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	0	1
4	1	1	0	0	0
5	1	1	1	0	0

algemener: multigraaf

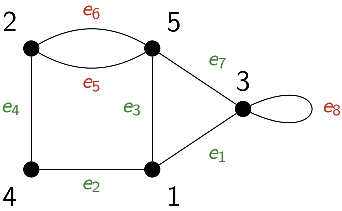
parallele lijnen

lus *loop*

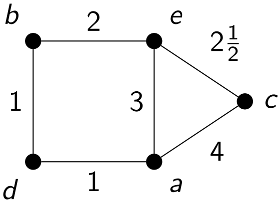


	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	2
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	0
5	1	2	1	0	0

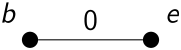
incidentie matrix



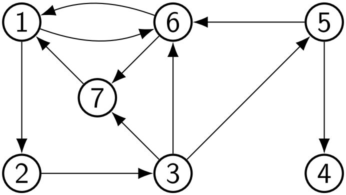
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	1	1	1	0

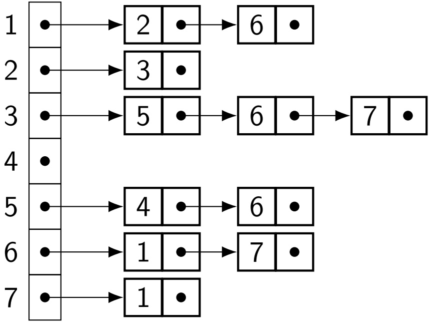


	a	b	c	d	e
a	0	0	4	1	3
b	0	0	0	1	2
c	4	0	0	0	$2\frac{1}{2}$
d	1	1	0	0	0
e	3	2	$2\frac{1}{2}$	0	0

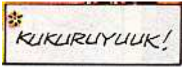


adjacency lists





Overzicht

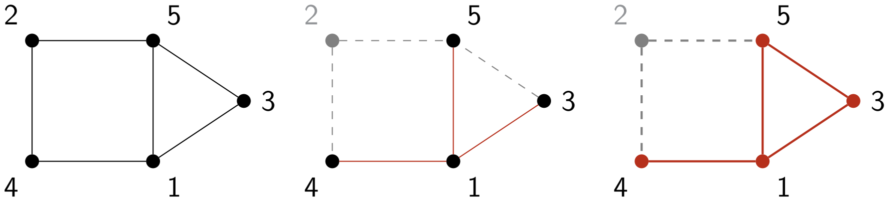


$G = (V, E)$

subgraaf $G' = (V', E')$ $\quad V' \subseteq V,\ E' \subseteq E$

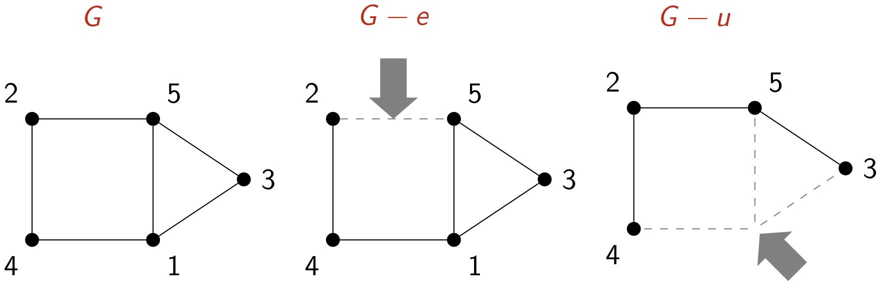
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad V' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

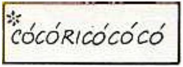
$E = \{\ 13, 14, 15, 24, 25, 35\ \}$ $\quad E' = \{\ 13, 14, 15, 24, 25, 35\ \}$ (luie notatie)



geïnduceerde subgraaf $G' = (V', E')$ $\quad V' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V' \subseteq V,\ E' = E \cap V' \times V'$ $\quad E' = \{\ 13, 14, 15, 24, 25, 35\ \}$


G
2
5
3
4
1
G − e
2
5
3
4
1
G − u
2
5
3
4


CÓCÓRICÓCÓCÓ

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots, e_n, v_n \qquad e_k = \{v_{k-1}, v_k\}$

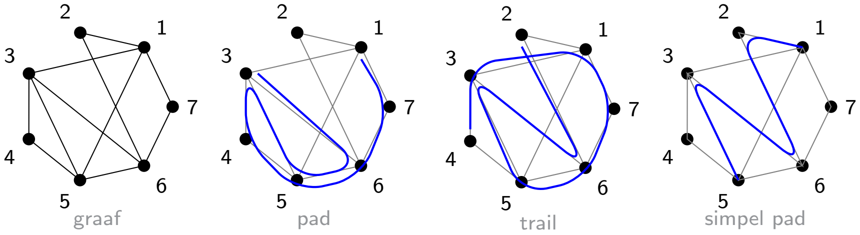
pad $\quad v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n \quad \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad 1, 7, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 3$

van v_0 naar v_n tussen . . .

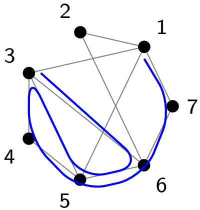
lengte n

trail verschillende *lijnen* 2, 6, 3, 5, 6, 7, 1, 3, 4

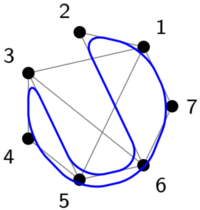
simpel pad verschillende *knopen* 1, 2, 6, 3, 5



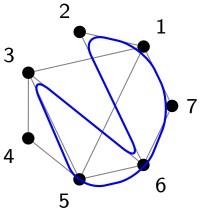
pad	$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$	$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$	1, 7, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 3
gesloten pad	$v_0 = v_n$	kring	1, 2, 6, 5, 3, 4, 5, 6, 7, 1
circuit	verschillende lijnen		1, 2, 6, 3, 5, 6, 7, 1
cykel	verschillende knopen		1, 2, 6, 3, 5, 1



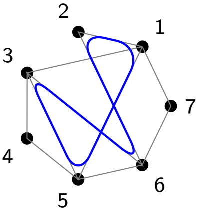
pad



gesloten pad



circuit



cykel

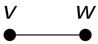
distinct		edge	vertex		edge	vertex
Schaum	path	trail	simple path	closed (path)	×circuit	≈cycle
Wiki	walk	trail	path	closed (walk)	circuit	cycle

Schaum "cycle (or circuit)" (zie p.160).

"Hamilton circuit" "Euler circuit"

heeft een kring een beginpunt?

$n \geqslant 3$



v, w, v géén cycle

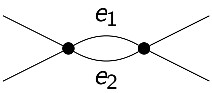
gewone (simpele) graaf

$$\text{simpel} \subseteq \text{trail} \subseteq \text{pad}$$

$$\text{verschillende knopen} \implies \text{verschillende lijnen}$$

multigraaf

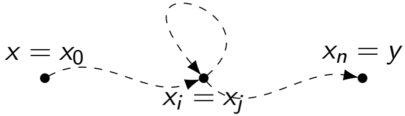
$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots, e_n, v_n$ $\quad e_k$ tussen v_{k-1} en v_k



graaf G $\quad x, y \in V(G)$

Thm. 8.2.

Als er een pad is van x naar y in G, dan is er ook een *simpel* pad van x naar y.



$$x = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \overbrace{x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n = y$$

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, \boxed{x_i = x_j}, x_{j+1} \ldots, x_n = y$$

(herhalen)

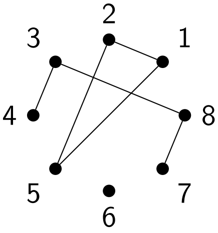
verbonden $x \sim y$ pad tussen x en y

equivalentierelatie

– $x \sim x$ reflexief pad van lengte nul

– als $x \sim y$ dan $y \sim x$ symmetrisch
pad omdraaien

– als $x \sim y$ en $y \sim z$ dan $x \sim z$ transitief
paden achter elkaar

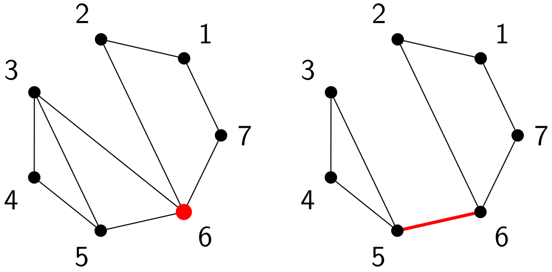


(samenhangs-)component $\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 7, 8\}, \{6\}$

aantal componenten neemt bij verwijderen toe

$G - v$ *articulatie punt* v (cutpoint)

$G - e$ *brug* e (cut edge)

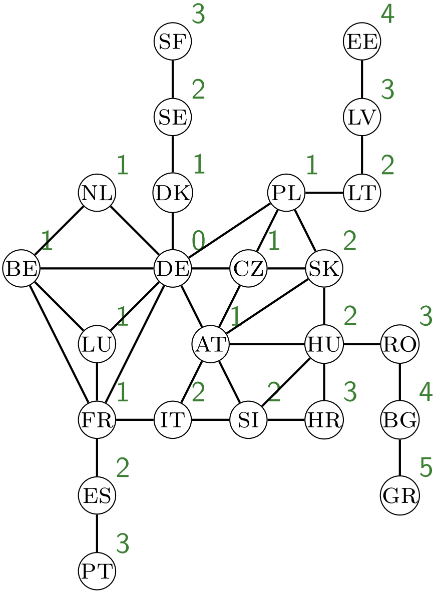


$d(x,y)$ afstand lengte kortste pad (gemeten in lijnen)

- $d(x,y) = 0$ desdals $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ *driehoeksongelijkheid*

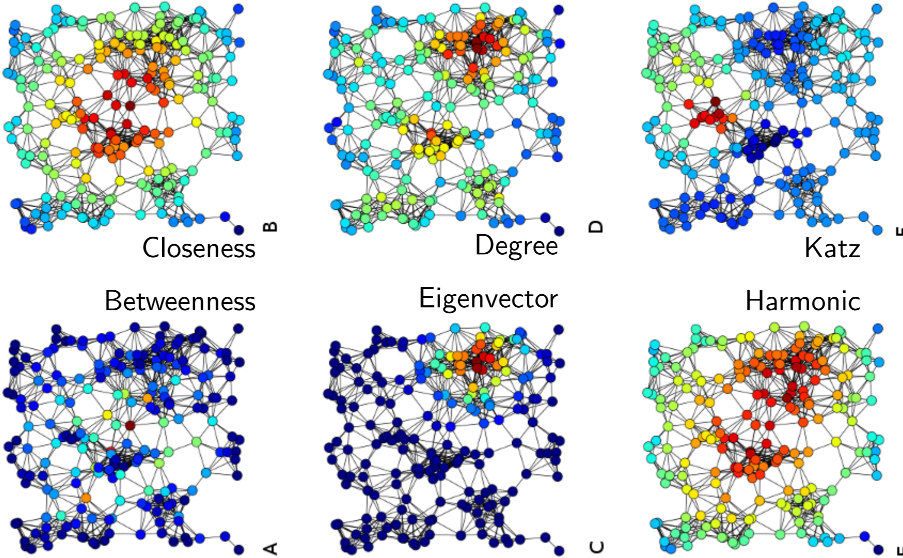
diameter G langste afstand

voorbeeld



$$d(\mathrm{GR}, \mathrm{EE}) \leqslant$$
$$d(\mathrm{GR}, \mathrm{DE}) + d(\mathrm{DE}, \mathrm{EE}) = 9$$

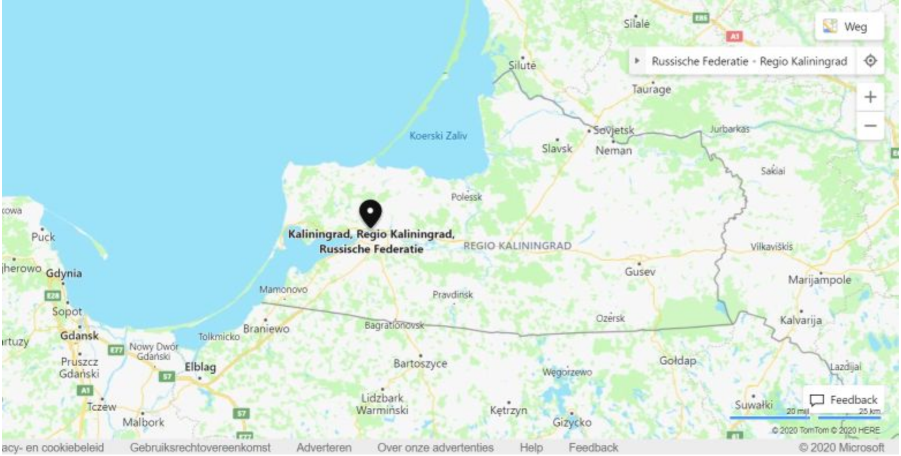
wikipedia: Centrality



Overzicht

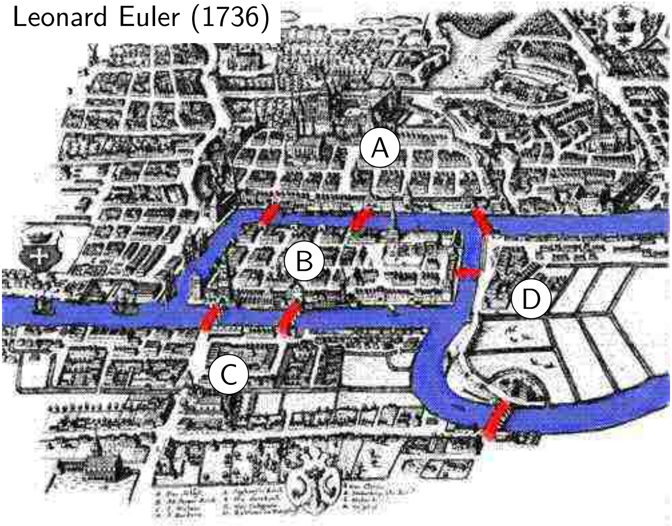
4 Grafen
- Definities
- Deelgraaf
- Paden
- Euler en Hamilton
- Isomorfie
- Speciale grafen
- Vlakke grafen☒
- Gerichte grafen

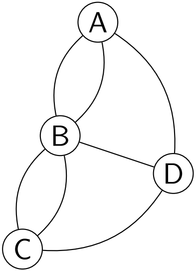
Kaliningrad / Königsberg in Preußen



bing maps

Leonard Euler (1736)





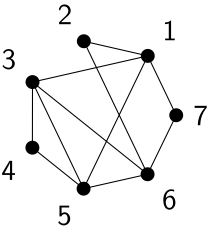
Leonhard Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

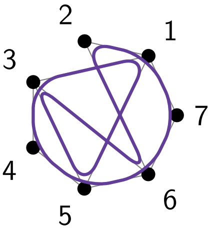
Euler circuit alle lijnen precies één keer

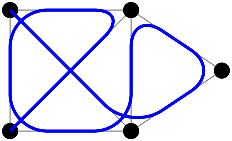
Euler graph heeft Euler circuit

Thm. 8.3

samenhangende graaf G is Euler desda elke knoop heeft even graad





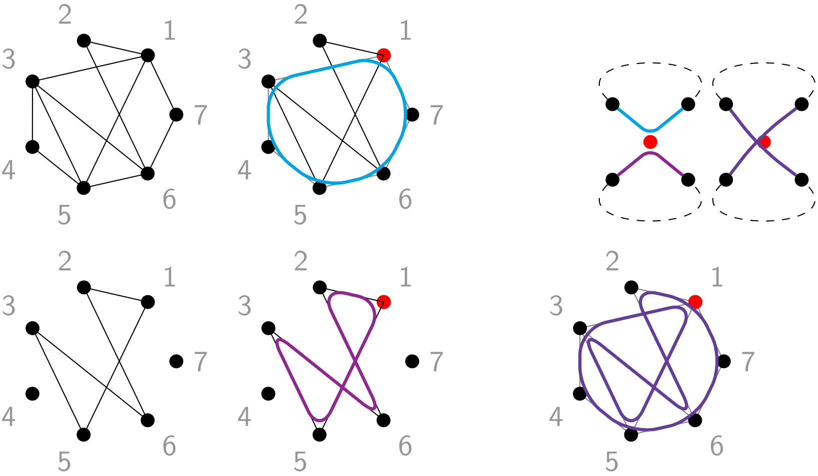


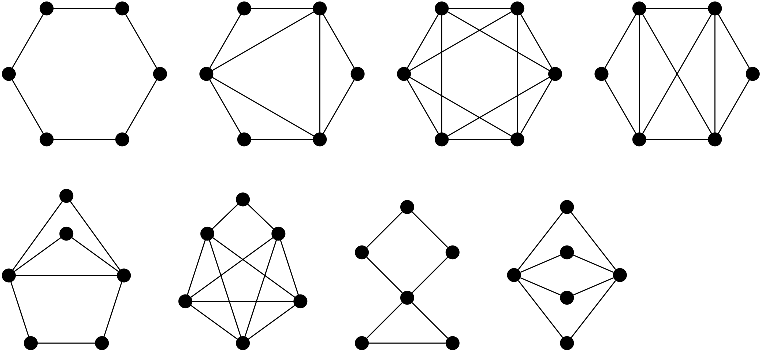
Cor. 8.4

Euler trail maximaal twee oneven graad

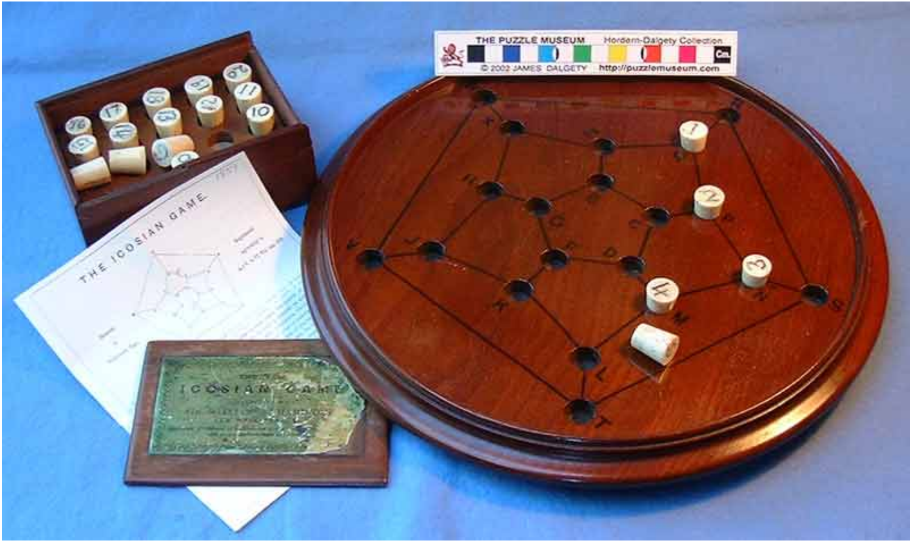
Euler circuit   alle lijnen precies één keer

samenhangende graaf G is Euler desda elke knoop heeft even graad





☒'Sloane' A003049 online encyclopedia of integer sequences

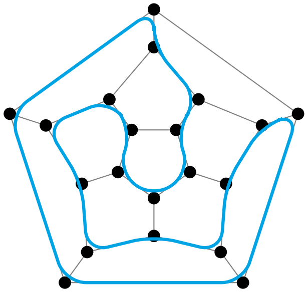


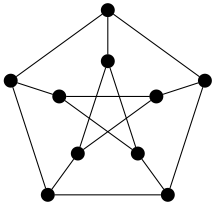
William Rowan Hamilton 1857

www.puzzlemuseum.com

Hamilton cykel   alle knopen precies één keer

Hamilton graph   heeft Hamilton cykel

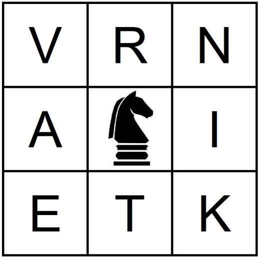




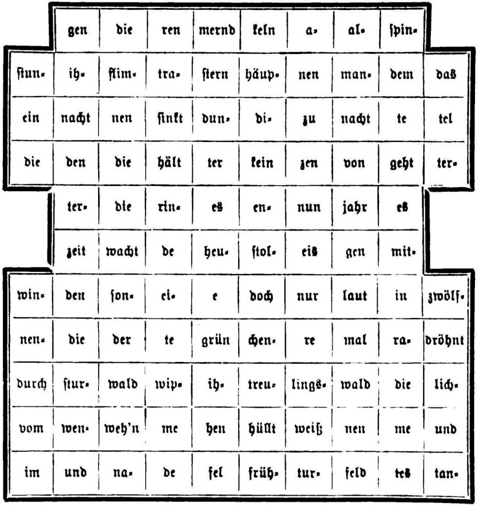
☒Ore's Theorem (1960)

A simple graph with n vertices ($n \geqslant 3$) is Hamiltonian if, for every pair of non-adjacent vertices, the sum of their degrees is n or greater.

$(u, v) \notin E$ dan $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$



wikipedia



	gen	die	ren	mernd	keln	a-	al-	ſpin-	
ſtun-	ih-	flim-	tra-	ſtern	häup-	nen	man-	dem	daß
ein	nacht	nen	ſinkt	dun-	di-	zu	nacht	te	tel
die	den	die	hält	ter	kein	zen	von	geht	ter-
	ter-	die	rin-	es	en-	nun	jahr	es	
	zeit	wacht	de	heu-	ſtol-	eis	gen	mit-	
win-	den	ſon-	ei-	e	doch	nur	laut	in	zwölf-
nen-	die	der	te	grün	chen-	re	mal	ra-	dröhnt
durch	ſtur-	wald	wip-	ih-	treu-	lings-	wald	die	lich-
vom	wen-	weh'n	me	hen	hüllt	weiß	nen	me	und
im	und	na-	de	ſel	früh-	tur-	feld	tes	tan-

Die Gartenlaube (1899) wikipedia

Hamilton cykel   alle knopen precies één keer

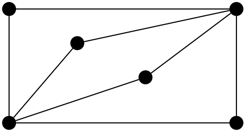
Hamilton graaf   heeft Hamilton cykel

Stelling

☒NP-compleet om te bepalen of G Hamilton is

Euler

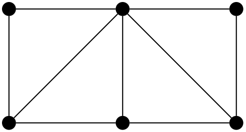
alle lijnen



eenvoudige karakterisatie

Hamilton

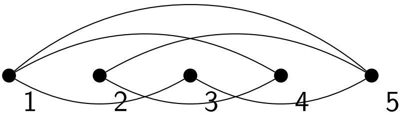
alle knopen



geen karakterisatie

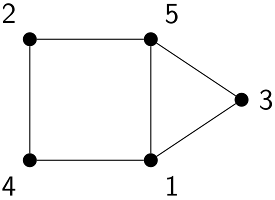
computationally hard

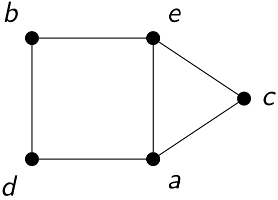

KUCKELIKUUU!



G

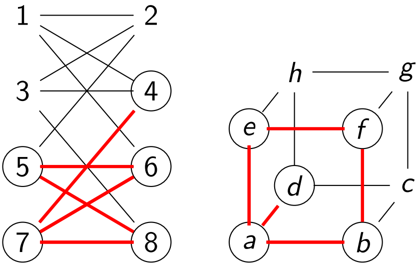
G'





u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(u)$	h	g	c	d	f	e	a	b

behoudt aantal knopen, aantal lijnen, graden, paden, . . .

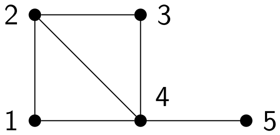


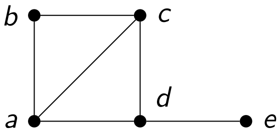
$G = (V, E)$ $\quad$ $G' = (V', E')$

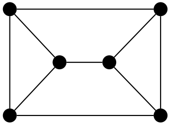
isomorfisme $\quad$ $\varphi : V \to V'$ $\quad$ bijectie

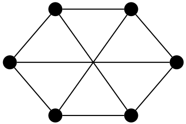
$(u, v) \in E$ desda $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E'$

behoudt aantal knopen, aantal lijnen, graden, paden, ...









‘abstracte’ grafen

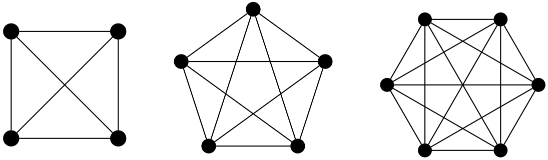
Unsolved problem in computer science

Can the graph isomorphism problem be solved in polynomial time?

P vs. NP

Overzicht

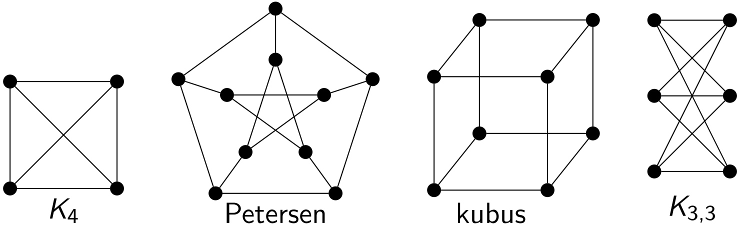
K_n complete graaf



K_4 K_5 K_6

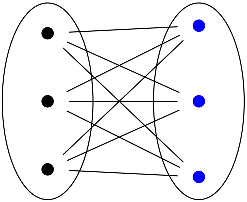
$$|V| = n \quad |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

k-regulier alle knopen graad k

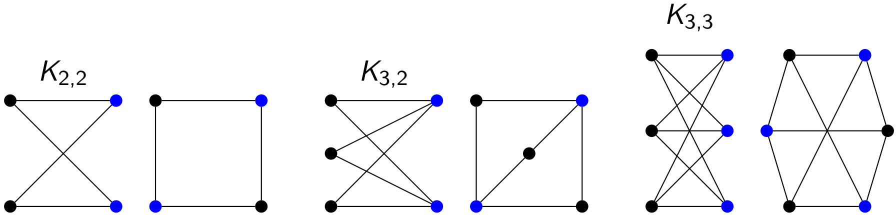


$|V| = n \quad |E| = \frac{k}{2} n$

$K_{m,n}$ *compleet bipartiet*

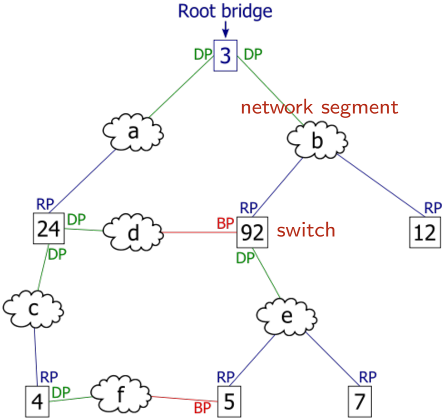


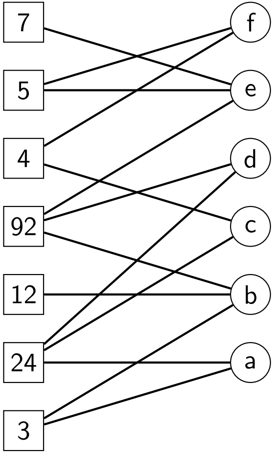
$$|V| = m + n$$
$$|E| = m \cdot n$$



bipartiete graaf

lijnen alleen tussen twee (disjuncte) deelverzamelingen knopen





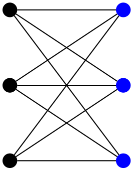
GhosT wikipedia

Thm. 8.11.

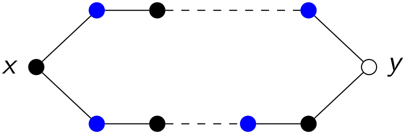
graaf G, equivalent zijn:

1. G is bipartiet
2. G heeft alleen cykels van even lengte
3. G is 2-kleurbaar

$(1,3) \implies (2)$

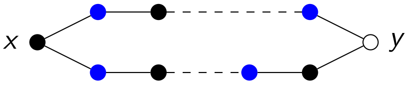


$(2) \implies (1,3)$



(1) $\Longrightarrow$ (2) Als de graaf bipartiet is loopt elk pad van een knoop naar zichzelf steeds heen en weer tussen de partities. Om terug te komen dus een even aantal stappen.

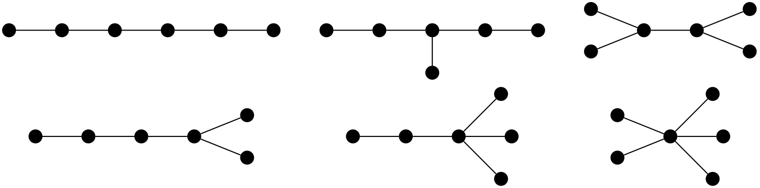
(2) $\Longrightarrow$ (1) Omgekeerd nemen we aan dat de graaf alleen kringen van even lengte heeft. We gaan de knopen uit de graaf zwart-blauw kleuren om zo de twee partities te onderscheiden. Kies een willekeurige knoop x van de graaf en kleur deze zwart. Als een knoop gekleurd is dan krijgen zijn buren de tegengestelde kleur. Dat leidt niet tot problemen: er is geen (ongekleurde) knoop y met zowel een zwarte als een blauwe buur. Dan zou namelijk y vanuit x te bereiken zijn met zowel een oneven als een even aantal lijnen, en vinden we een kring van oneven lengte.



boom

– samenhangend

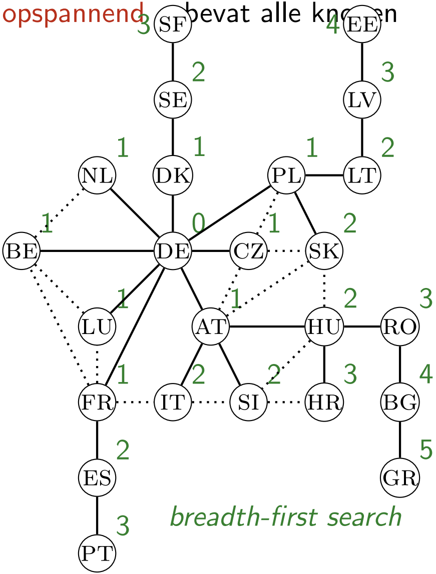
– acyclisch   geen cykels



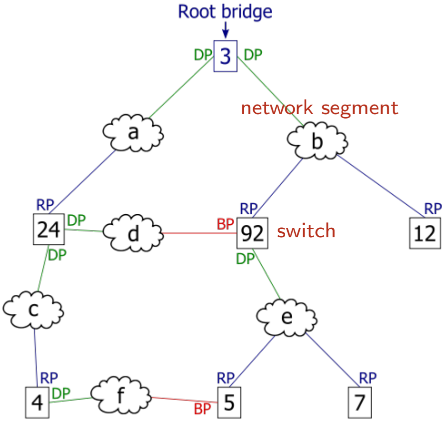
eigenschappen:

- tussen elk tweetal knopen precies één simpel pad
- $|E| = |V| - 1$

Sch 8.8 Tree graphs   Sch 10 Binary trees   (apart) opspannend: bevat alle knopen



breadth-first search

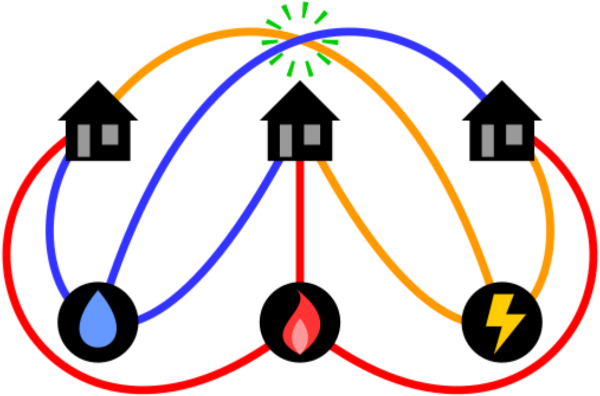


Overzicht

4 Grafen

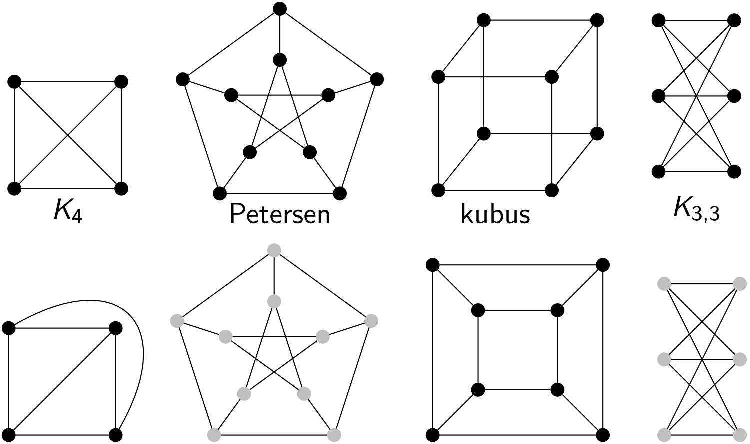
- Definities
- Deelgraaf
- Paden
- Euler en Hamilton
- Isomorfie
- Speciale grafen
- Vlakke grafen☒
- Gerichte grafen

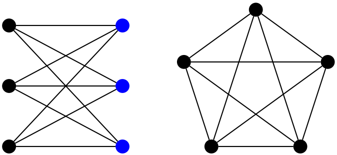
vlakke graaf



Cmglee wikipedia

vlakke graaf zonder kruisende lijnen

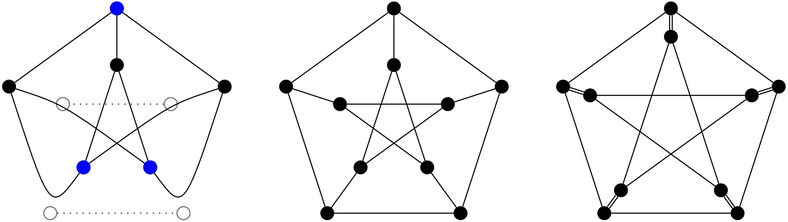




☒Thm. 8.10

Een graaf G is vlak desdals G niet $K_{3,3}$ of K_5 bevat

Kuratowski (1930) *Wagner* (1937)

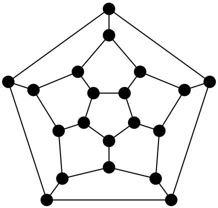


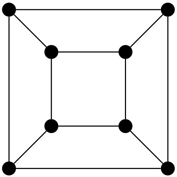
$G = (V, E)$ planaire graaf vlakken R (*regions*)

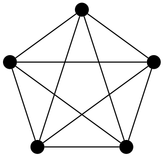
Thm. 8.8. Euler

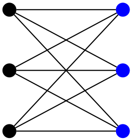
$|V| - |E| + |R| = 2$

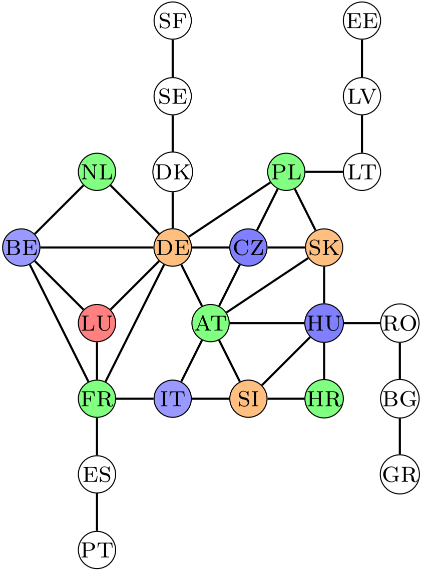
$\lvert V\rvert = 20,\ \lvert E\rvert = 30,$	$\lvert V\rvert = 8,\ \lvert E\rvert = 12,$	$\lvert V\rvert = 5,\ \lvert E\rvert = 10$	$\lvert V\rvert = 6,\ \lvert E\rvert = 9$
$\lvert R\rvert = 12$	$\lvert R\rvert = 6$	$\lvert R\rvert = 7?$	$\lvert R\rvert = 5?$
Thm.8.7. $5\lvert R\rvert = 2\lvert E\rvert$	$4\lvert R\rvert = 2\lvert E\rvert$	$3\lvert R\rvert \leqslant 2\lvert E\rvert$	$4\lvert R\rvert \leqslant 2\lvert E\rvert$











elke vlakke graaf heeft een 4-kleuring

Kempe 1879

Heawood 1890

☒**Thm.8.12** vijfkleurenstelling

Appel & Haken 1974

handwerk + computerbewijs

1,834 configurations

Overzicht

gerichte graaf $G = (V, E)$ verzamelingen

- $V = V(G)$ knopen (punten; *vertices*, *nodes*)
- $E = E(G)$ pijlen (takken, kanten; *edges*, *arcs*)

pijl (u, v) geordend tweetal

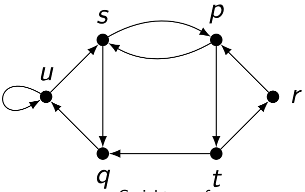
– e *van u naar v*

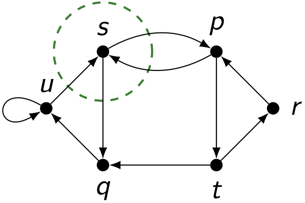
– u,v *begin*, *eind* van e

– $e = (u, u)$ *lus* *loop*

$V = \{ p, q, r, s, t, u \}$

$E = \{$ (p,s) $, (p, t), (q, u), (r, p),$ (s,p) $, (s, q), (t, q), (t, r), (u, s),$ (u,u) $\}$



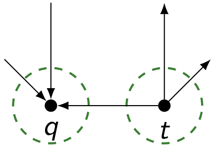


naar

van	p	q	r	s	t	u
p	0	0	0	1	1	0
q	0	0	0	0	0	1
r	1	0	0	0	0	0
s	1	1	0	0	0	0
t	0	1	1	0	0	0
u	0	0	0	1	0	1

in/uit-graad van v

	$indeg(v)$	$outdeg(v)$	
bron	$indeg(v) = 0$		source
put	$outdeg(v) = 0$		sink



Thm. 9.1

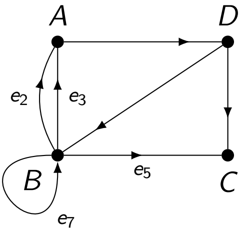
$$\sum_{x \in V} indeg(x) = \sum_{x \in V} outdeg(x) = |E|$$

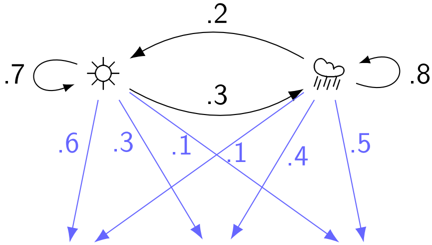
$\{\ldots, (B, A), (B, A), \ldots\}$

graaf met gewichten

(gerichte) multigraaf

☒Hidden Markov Model





$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots, e_n, v_n$

pad $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ $(v_i, v_{i+1}) \in E$

van v_0 naar v_n

lengte n aantal pijlen

– trail verschillende *lijnen*

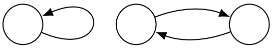
– simpel pad verschillende *knopen*

gesloten pad $v_0 = v_n$ kring

– circuit verschillende lijnen

– cykel verschillende knopen

opspannend pad bevat alle knopen



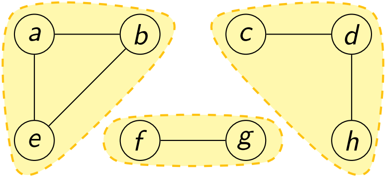
graaf sterk samenhangend   voor elke x en y is er een pad van x naar y

ongericht

pad tussen x en y

connected component

samenhangs-component



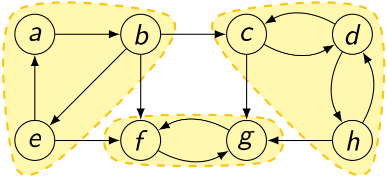
gericht

pad van x naar y

én pad van y naar x

strongly connected component

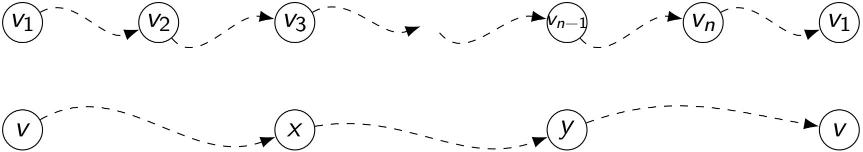
sterke samenhangs-component



Thm. 9.2

gerichte graaf G

sterk samenhangend desda heeft een gesloten opspannend pad



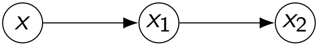
ongerichte graaf G

samenhangend desda heeft een opspannend pad

Thm. 9.2

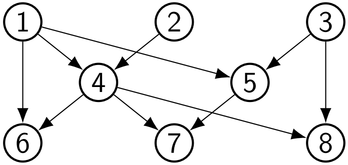
gerichte graaf G

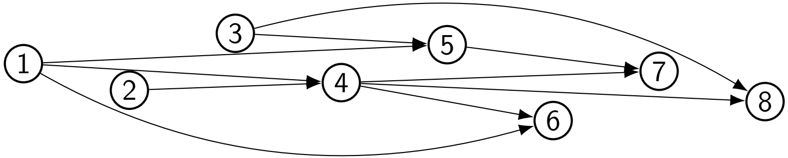
zonder cykels dan heeft G een put en een bron



$G = (V, E)$ gericht

topologische ordening van G $\quad (v_1, \ldots, v_n) \quad (v_i, v_j) \in E$ dan $i < j$





$(1, 2, \ldots, 7, 8) \quad (2, 1, 4, 6, 3, 5, 8, 7)$

Thm. 9.8

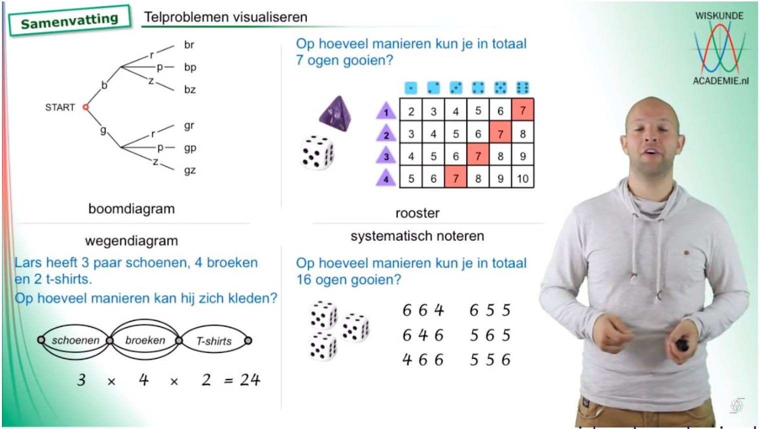
gerichte graaf G zonder cykels $\quad$ dan bestaat er een topologische ordening

Hoofdstuk 5

Combinatoriek

leer van het tellen

kansrekening



wiskundeacademie.nl

Chapter 5: Techniques of Counting

eindige A, B

parallel, naast elkaar

somregel

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

sequentieel, na elkaar

productregel

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

n objecten, r keer kiezen

– wel/niet herhaald

– wel/niet geordend   rijtje vs. verzameling

permutaties vs. combinaties

vb. $n = 5$ kleuren, kies $r = 3$

- herhaald, geordend (*rijtje met*) $5 \times 5 \times 5 = 125$
  111, 112, 113, ... 155, 211, 212, ... 553, 554, 555
- niet herhaald, geordend (*rijtje zonder*) $5 \times 4 \times 3 = 60$
  123, 124, 125, 134, 135, ... 352, 354, 412, 413, 415, ... 542, 543
- niet herhaald, ongeordend (*deelverzameling*) $\binom{5}{3} = 10$
  $\{123\}, \{124\}, \{125\}, \{134\}, \{135\}, \{145\}, \{234\}, \{235\}, \{245\}, \{345\}$
- herhaald, ongeordend (*multiset*) $\binom{7}{3} = 35$
  $\{111\}, \{112\}, \{113\}, \ldots \{225\}, \{233\}, \{234\}, \ldots \{345\}, \{355\}, \{445\}, \{455\}, \{555\}$

tien kandidaten, kies commissie van drie personen

tien kandidaten, kies bestuur (voorzitter, secretaris, penningmeester)

tien kleuren, verf de twaalf deuren in een straat

tien kleuren, verf twaalf houten blokken geordend, met herhaling

kies r keer uit n

$$n^r$$

- $2^3 = 8$ rijtjes $0, 1$ van lengte 3
  000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
- deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$ drie keer niet/wel kiezen
  $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

geordend, zonder herhaling permutatie

alle n elementen

Cor. 5.5

$n! = \prod_{k=1}^{n} k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

faculteit factorial $0! = 1$

- $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutaties van $\{1, 2, 3\}$: 123, 132, 213, 231, 312 en 321

Thm. 5.4 r elementen op rij

$$P(n, r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-r+1)}_{r \text{ factoren}} = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

- $12 = 4 \cdot 3$ rijtjes van twee elementen uit $\{1, 2, 3, 4\}$:
  12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 en 43

ongeordend, zonder herhaling   deelverzameling

kies k elementen uit n

binomiaalcoëfficiënt   *n boven k* (n *choose* k)

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+2}{2}\frac{n-k+1}{1}$$

- $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ twee elementen uit $\{1,2,3,4\}$: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ en $\{3,4\}$.

Lem. 5.1 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$

kies k elementen uit n

binomiaalcoëfficiënt *n boven k* (*n choose k*)

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\,\frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+2}{2}\,\frac{n-k+1}{1}$$

zet alle n objecten op rij

$$\overbrace{\boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \boxtimes\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square}^{n!}$$

kies de eerste k

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{k!}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(n-k)!}$$

volgorde binnen de wel/niet groep geeft zelfde keuze

$\binom{n}{r} = 0$ als $r < 0$ of $r > n$

Thm. 5.3

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

kies n en nog $k-1$ elementen, of

kies n niet, en dan nog k elementen

driehoek van Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\
&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\
&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\
&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\
& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 2 && 1 &&& \\
&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\
& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\
1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$(x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$

Thm. 5.2 *binomium van Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

- $(x+1)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
- neem $x = y = 1$

ongeordend, met herhaling   multiset

- vier kleuren M&M, kies er zeven
  111, 112, 115, ... 122, 123, ... 333, 334, ... 355, 444, 445, 555

kies r uit n $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$

$$\underbrace{1\ldots1}_{r_1}0\underbrace{1\ldots1}_{r_2}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{r_n}$$

- $1011011101 \sim (1,2,3,1)$ $1111011001 \sim (4,2,0,1)$

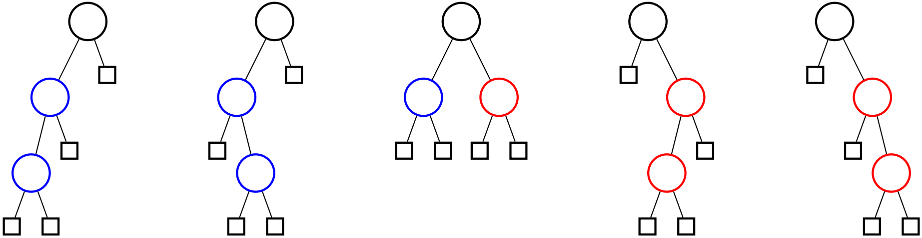
$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

- $\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120$

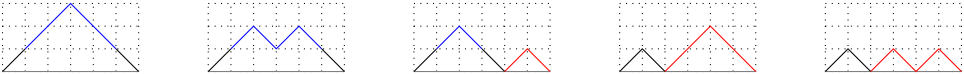
- permutaties "BENZEEN" $\binom{7}{2,3} = \binom{7}{1,1,2,3}$
  $BE_1N_1ZE_2E_3N_2$ 7!

Thm. 5.6

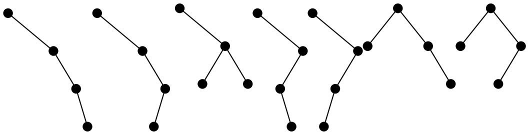
$$P(n; n_1, \ldots, n_r) = \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$$



NNNLLLL	NNLNLLL	NNLLNLL	NLNNLLL	NLNLNLL
$a+b)+c)+d$	$(a+(b+c))+d$	$(a+b)+(c+d)$	$a+((b+c)+d)$	$a+(b+(c+d$



((()))	(()())	(())()	()(())	()()()



1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, ...

Catalan getallen⊠ OEIS A108

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \, C_{n-i}$$

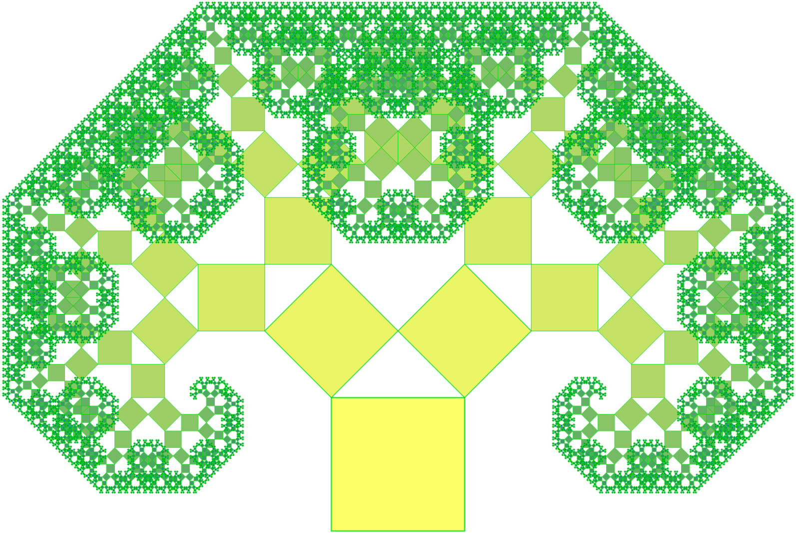
Brugge 1814 – Luik 1894

wikipedia

Hoofdstuk 6

Recursie en Inductie

Overzicht



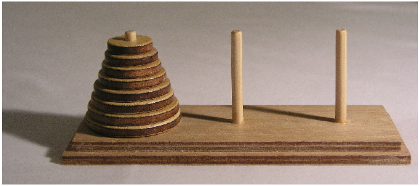
Albert E. Bosman (1942)

torens van Hanoi	Algoritmiek
sorteren	Complexiteit
Backus-Naur-Form*	Programmeertalen
formules*	Logica
*context-vrije grammatica	Automata theory
Fibonacci reeks	Programmeermethoden (en FoCS)

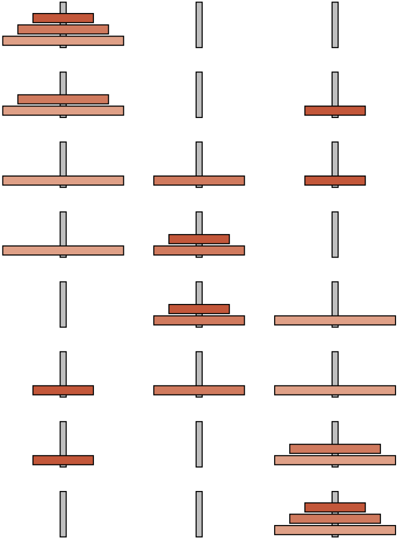
inductie
definitie / bewijsmethode
van klein naar groot
bottom-up

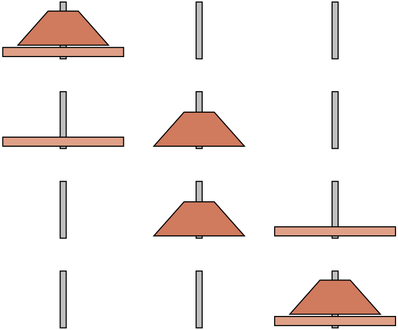
recursie
definitie / programmeren
in termen van zichzelf
top-down

soms een kwestie van perspectief . . .



Édouard Lucas (1883)





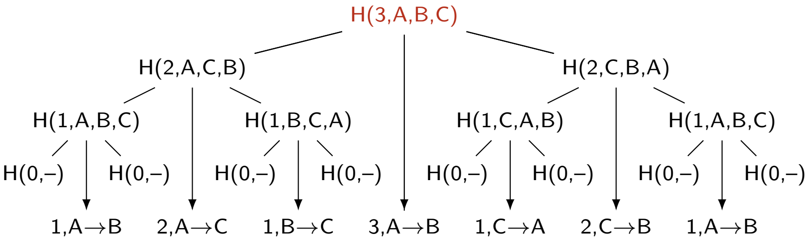
Hanoi(n,van,naar,via) ::=

    als $n > 0$

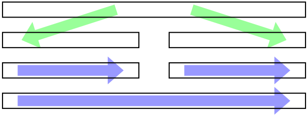
        Hanoi($n - 1$,van,via,naar)

        move(n,van,naar)

        Hanoi($n - 1$,via,naar,van)



Sorteer $A[L,R]$ ::=
  verdeel $A[L,R]$ in $A[L,R']$ en $A[L',R]$
    Sorteer $A[L,R']$
    Sorteer $A[L',R]$
  voeg $A[L,R']$ en $A[L',R]$ samen



quicksort

3	7	8	5	2	1	9	4
3	1	2	4	5	8	9	7
1	2	3	4	5	7	9	8
1	2	3	4	5	7	8	9

Tony Hoare, 1959

mergesort

3	7	8	5	2	1	9	4
3	7	5	8	1	2	4	9
3	5	7	8	1	2	4	9
1	2	3	4	5	7	8	9

John von Neumann, 1945

Backus–Naur Form *context-vrije grammatica*

$\langle \text{xxx} \rangle$ definitie concept `yyy` in programma

$$\langle \textit{geheel} \rangle ::= \langle \textit{teken} \rangle \langle \textit{natuurlijk} \rangle \mid \langle \textit{natuurlijk} \rangle$$
$$\langle \textit{natuurlijk} \rangle ::= \langle \textit{cijfer} \rangle \mid \langle \textit{cijfer} \rangle \langle \textit{natuurlijk} \rangle$$
$$\langle \textit{cijfer} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \mid 8 \mid 9$$
$$\langle \textit{teken} \rangle ::= + \mid -$$

$$\langle \text{geheel} \rangle \Rightarrow \langle \text{teken} \rangle \langle \text{natuurlijk} \rangle \Rightarrow - \langle \text{natuurlijk} \rangle \Rightarrow - \langle \text{cijfer} \rangle \langle \text{natuurlijk} \rangle$$
$$\Rightarrow -3 \langle \text{natuurlijk} \rangle \Rightarrow -3 \langle \text{cijfer} \rangle \langle \text{natuurlijk} \rangle \Rightarrow -31 \langle \text{natuurlijk} \rangle$$
$$\Rightarrow -31 \langle \text{cijfer} \rangle \langle \text{natuurlijk} \rangle \Rightarrow -315 \langle \text{natuurlijk} \rangle \Rightarrow -315 \langle \text{cijfer} \rangle \Rightarrow -3157$$

$$
\begin{aligned}
\langle \textit{assignment} \rangle &::= \langle \textit{variable} \rangle \; \texttt{=} \; \langle \textit{expression} \rangle \\
\\
\langle \textit{statement} \rangle &::= \langle \textit{assignment} \rangle \mid \\
&\quad\; \langle \textit{compound-statement} \rangle \mid \\
&\quad\; \langle \textit{if-statement} \rangle \mid \\
&\quad\; \langle \textit{while-statement} \rangle \mid \ldots \\
\langle \textit{if-statement} \rangle &::= \texttt{if} \; \langle \textit{test} \rangle \; \texttt{then} \; \langle \textit{statement} \rangle \mid \\
&\quad\; \texttt{if} \; \langle \textit{test} \rangle \; \texttt{then} \; \langle \textit{statement} \rangle \; \texttt{else} \; \langle \textit{statement} \rangle \\
\langle \textit{while-statement} \rangle &::= \texttt{while} \; \langle \textit{test} \rangle \; \texttt{do} \; \langle \textit{statement} \rangle
\end{aligned}
$$

$PVar = \{p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots\}$

The formulas φ *of propositional logic are given by the following context free grammar, in which* p *ranges over the propositional variables* $PVar$.

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid (\varphi)$$

Reading conventions:

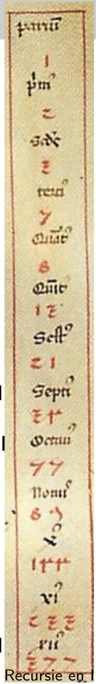
1. $\wedge$ *and* $\vee$ *have precedence over* $\to$
2. *all connectives associate to the right*

$$\varphi ::= \underbrace{p \mid \bot}_{} \mid \underbrace{\varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid (\varphi)}_{}$$

1. *Basis.* Formules zijn $\bot$ (*false*), en de propositievariabelen p in PVar.
2. *Inductiestap.* Als φ_1 en φ_2 formules zijn, dan ook $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$ en (φ_1).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & p \to \bot \to (p \to q) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & p \to \bot \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (p \to q) \arrow[d, dash] & \\
p & & \bot & p \to q \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & p & & q
\end{tikzcd}$$

$p \wedge q \vee p = (p \wedge q) \vee p$ reading conventions



1
I
2
II
3
III
5
IV
8
V
13
VI
21
VII
34
VIII
55
IX
89
X
144
XI
233
XII
377

How many pairs of rabbits are created by one pair in one year

"One of these, namely the first, bears in the second month, and thus there are in the second month 3 pairs; of these in one month two are pregnant, and in the third month 2 pairs of rabbits are born, and thus there are 5 pairs in the month; in this month 3 pairs are pregnant, and in the fourth month there are 8 pairs, of which 5 pairs bear another 5 pairs; these are added to the 8 pairs making 13 pairs in the fifth month; "

engelse vert. Laurence Sigler (2002)

Leornardo di Pisa "Fibonacci" (Pisa, ~1170 – ~1250)
Liber Abaci (Rekenboek, 1202)
wikipedia

recurrente betrekking

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geqslant 2$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

reeks van *Fibonacci* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ OEIS A000045

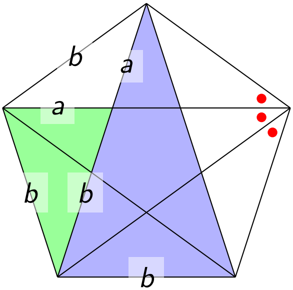
oplossing *formule van Binet* ⊠

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} .$$

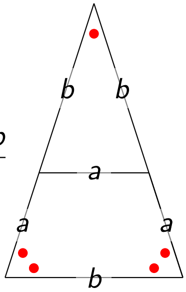
$$x^2 = x + 1$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a,\ b,\ a+b$$



$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$



6 Recursie en Inductie
- Recursie!
- Recurrente betrekkingen
- Volledige inductie
- Escher en Droste☒

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

recurrente betrekking

$$a_n = \text{in termen van } a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \text{ en } n$$

$a_n = \sum_{i=0}^{n} i \quad = \underbrace{a_{n-1}}_{\sum_{i=0}^{n-1} i} + n$ *inductief* gedefinieerd

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & 28 & & 36 \\ a_0 & \xrightarrow{+1} & a_1 & \xrightarrow{+2} & a_2 & \xrightarrow{+3} & a_3 & \xrightarrow{+4} & a_4 & \xrightarrow{+5} & a_5 & \xrightarrow{+6} & a_6 & \xrightarrow{+7} & a_7 & \xrightarrow{+8} & a_8 \end{array}$$

recursief bepaald *top-down*,

$a_4 = a_3 + 4 \qquad\qquad = 6 + 4 = 10$

$a_3 = a_2 + 3 \qquad\qquad = 3 + 3 = 6$

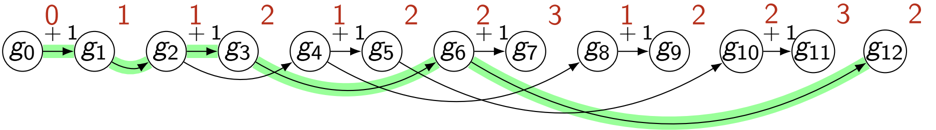
$a_2 = a_1 + 2 \qquad\qquad = 1 + 2 = 3$

$a_1 = a_0 + 1 \qquad = 0 + 1 = 1$

$a_0 = 0$

$$\begin{cases} g_0 = 0 \\ g_n = g_{n-1} + 1 & (n \geqslant 1, \text{n oneven}) \\ g_n = g_{n/2} & (n \geqslant 1, \text{n even}) \end{cases}$$

$g_{12} = g_6 = g_3 = g_2 + 1 = g_1 + 1 = g_0 + 1 + 1 = 0 + 2 = 2.$



vraag: *wat* berekent $g(n) = g_n$ eigenlijk?

Fib iteratief

reeks van *Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ OEIS A000045

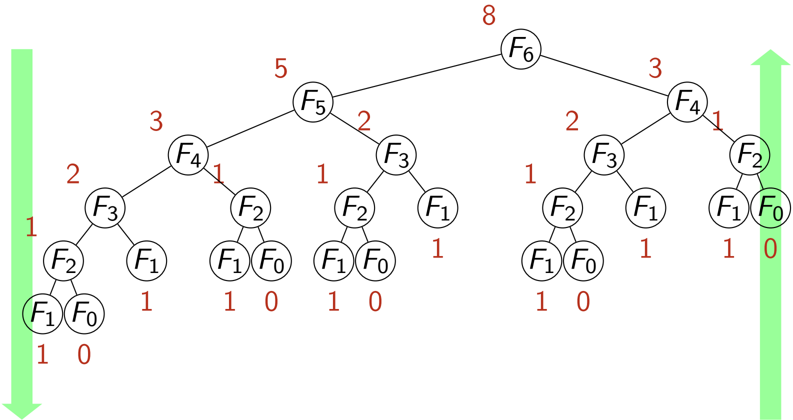
$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geqslant 2$$

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}

zie Programmeermethoden

```
long fib3 (int n) { //
    long eerste = 1, tweede = 1, hulp;
    int teller;
    for ( teller = 2; teller <= n; teller++ ) {
        // eerste == fib (teller-2) en tweede == fib (teller-1)
        hulp = tweede;
        tweede = eerste + tweede;
        eerste = hulp;
    }//for
    return tweede;
}//fib3
```




```
long fib1 (int n) {// verschoven begin(!)
    if ( ( n == 0 ) || ( n == 1 ) )
        return 1;
    else
        return ( fib1 (n-1) + fib1 (n-2) );
}//fib1
```

recursief   met matrices☒

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k + F_{k-1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Q^{2n} & = Q^n \, Q^n \\ Q^{2n+1} & = Q^{2n} \, Q \end{cases}$$

$$Q^{10} = Q^5 \, Q^5 \qquad Q^5 = Q^4 \, Q \qquad Q^4 = Q^2 \, Q^2 \qquad Q^2 = Q \, Q$$

$$\begin{bmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$t_0 = 5 \quad t_1 = 6$

$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geqslant 2)$

lineaire recurrentie

$$t_2 = 6 + 6{\cdot}5 - 12{\cdot}2 + 8 = 20$$
$$t_3 = 20 + 6{\cdot}6 - 12{\cdot}3 + 8 = 28$$

geheim recept (☒Sch.6.8)

$$x^2 = x + 6$$
$$x = 3 \text{ of } x = -2$$

$t_n = 3^n + (-2)^n + 2n + 3$

oplossing / *gesloten formule*

$$t_2 = 3^2 + (-2)^2 + 2{\cdot}2 + 3 = 20$$
$$t_3 = 3^3 + (-2)^3 + 2{\cdot}3 + 3 = 28$$

volledige inductie formule is inderdaad oplossing

- reeksen recurrente betrekking
  1. *basis* $F_0 = 0 \quad F_1 = 1$
  2. *inductie* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- formules $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid (\varphi)$
  1. *basis* formules $\bot$, en variabelen p
  2. *inductie* φ_1 en φ_2 formules, dan $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ en (φ_1)
- talen (verzamelingen strings)
  1. *basis* $a, b \in L$
  2. *inductie* $x, y \in L$ dan $cxy \in L$

  a, b, caa, cab, ccabb, ccaacab

  cccaacabccabb

6. Recursie en Inductie
   - Recursie!
   - Recurrente betrekkingen
   - Volledige inductie
   - Escher en Droste☒

$f(n) = n^2 + n + 41$ Euler (1772)

priemgetallen

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601, . . .

toch niet . . .

$f(41) = 41 \cdot 41 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$

tegenvoorbeeld

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
5^0 - 2^0 &= \quad 1{-}1 &&= 0\\
5^1 - 2^1 &= \quad 5{-}2 &&= 3\\
5^2 - 2^2 &= \ 25{-}4 &&= 21\\
5^3 - 2^3 &= 125{-}8 &&= 117\\
5^4 - 2^4 &= 625{-}16 &&= 609
\end{aligned}$$

tegenvoorbeeld ? (nee)

gaat dit altijd goed ? (ja)

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

$$5^4 - 2^4 = 625 - 16 = 609$$

$5^5 - 2^5 = 5{\cdot}5^4 - 2{\cdot}2^4 =$
$5{\cdot}(5^4 - 2^4) + 3{\cdot}2^4$

$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5{\cdot}5^n - 2{\cdot}2^n =$
$5{\cdot}(5^n - 2^n) + 3{\cdot}2^n$

drievoud   zonder uitrekenen

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

inductie-bewijs

1. *basis* $\quad (n = 0)$
   $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ is een drievoud
2. *inductiestap*
   inductie-aanname $\quad 5^n - 2^n$ is een drievoud $\quad (n \in \mathbb{N})$
   laat nu zien dat $5^{n+1} - 2^{n+1}$ is een drievoud

$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot (5^n - 2^n) + 3 \cdot 2^n$ is een drievoud

want $5^n - 2^n$ is een drievoud (inductie-aanname)

en $3 \cdot 2^n$ ook

principe van volledige/natuurlijke inductie

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

$P(n)$ eigenschap

1. *basis*
   bewijs $P(0)$ of $P(m)$
2. *inductiestap*
   bewijs, voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$
   als $\underbrace{P(n) \text{ waar is}}_{\text{inductie-aanname}}$, dan is $P(n+1)$ waar

dan geldt $P(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ resp. alle $n \geqslant m$

$2\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)$

$$1 = 1 = 1{\cdot}2{\cdot}3/6$$
$$1+4 = 5 = 2{\cdot}3{\cdot}5/6$$
$$1+4+9 = 14 = 3{\cdot}4{\cdot}7/6$$
$$1+4+9+16 = 30 = 4{\cdot}5{\cdot}9/6$$
$$1+4+9+16+25 = 55 = 5{\cdot}6{\cdot}11/6$$
$$1+4+9+16+25+36 = 91 = 6{\cdot}7{\cdot}13/6$$

$6\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$

$6 \sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

basis

$n = 0 \quad 6{\cdot}0^2 = 0(0+1)(0+1) \quad \checkmark$

inductiestap

inductie-aanname $6 \sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)$ de formule voor n

te bewijzen $6 \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = (n+1)(n+2)(2n+3)$

de formule klopt voor $n+1$

$6 \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \boxed{6 \sum_{i=0}^{n} i^2} + 6(n+1)^2 =$ (vul aanname in)

$\boxed{n(n+1)(2n+1)} + 6(n+1)^2 =$

$(n+1)(2n^2+n+6n+6) = (n+1)(n+2)(2n+3) \quad \checkmark$

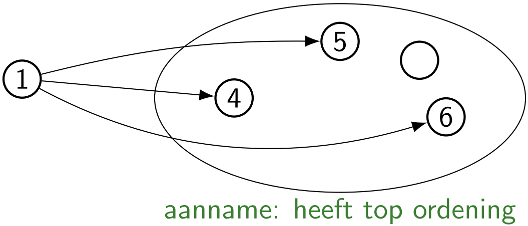
gerichte grafen

Thm. 9.2 G zonder cykels dan heeft G een put en een bron

Thm. 9.8

G zonder cykels dan bestaat er een topologische ordening

inductie op het aantal knopen n van de graaf



principe van volledige / natuurlijke inductie

$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

$P(n)$ eigenschap

1. *basis*
   bewijs $P(0)$
2. *inductiestap*
   bewijs, voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$
   als $\underbrace{P(k) \text{ waar is voor } k \leqslant n}_{\text{inductie-aanname}}$, dan is $P(n+1)$ waar

$t_0 = 5 \quad t_1 = 6$

$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geqslant 2)$

$3^n + (-2)^n + 2n + 3$ is een oplossing

basis

$n = 0 \quad 3^0 + (-2)^0 + 2{\cdot}0 + 3 = 1 + 1 + 0 + 3 = 5 = t_0 \quad \checkmark$

$n = 1 \quad 3^1 + (-2)^1 + 2{\cdot}1 + 3 = 3 - 2 + 2 + 3 = 6 = t_1 \quad \checkmark$

inductiestap

inductie-aanname $\quad t_k = 3^k + (-2)^k + 2k + 3 \quad$ voor $k \leqslant n$

de formule klopt tm. n

te bewijzen $\quad t_{n+1} = 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2(n+1) + 3$

de formule klopt voor $n + 1$

bewering (aanname: oplossing klopt tot en met n)

$3^n + (-2)^n + 2n + 3$ oplossing voor $t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8$

te bewijzen $t_{n+1} = 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2(n+1) + 3$

definitie

$$t_{n+1} = \boxed{t_n} + 6\boxed{t_{n-1}} - 12(n+1) + 8$$

inductieaanname

$$= \boxed{3^n + (-2)^n + 2n + 3} + 6(\boxed{3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 2(n-1) + 3}) - 12(n+1) + 8$$

$$= (1+2)3^n + (1-3)(-2)^n + (2+12-12)n + 3 - 12 + 18 - 12 + 8$$

$$= 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2n + 5 \quad \checkmark$$

echt waar

inductieve definitie V

te bewijzen eigenschap $P(x)$ voor alle $x \in V$

1. *basis*
   bewijs $P(x)$ voor elke x in de basis
2. *inductiestap*
   bewijs dat $P(y)$ geldt voor y geconstrueerd met inductie-regel, onder de inductie-aanname dat $P(x)$ waar is voor alle x waaruit y geconstrueerd is   ('kleinere' gevallen)

soms meerdere basisgevallen, meerdere inductiegevallen

1. *basis* $a, b \in L$
2. *inductie* $x, y \in L$ dan $cxy \in L$

a, b, caa, cab, ccabb, ccaacab, cccaacabccabb

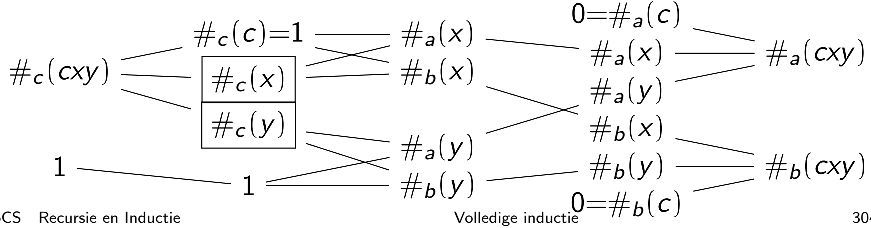
string x $\#_a(x)$ aantal letters a in x $\#_a(xy) = \#_a(x) + \#_a(y)$

(*) $\#_c(z) + 1 = \#_a(z) + \#_b(z)$ voor alle $z \in L$

basis klopt voor $z = a$ en $z = b$ bv. $\#_c(a) + 1 = \#_a(a) + \#_b(b) = 1$

inductiestap aanname (*) geldt voor $z = x$ en $z = y$

te bewijzen (*) geldt voor $z = cxy$

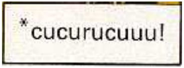


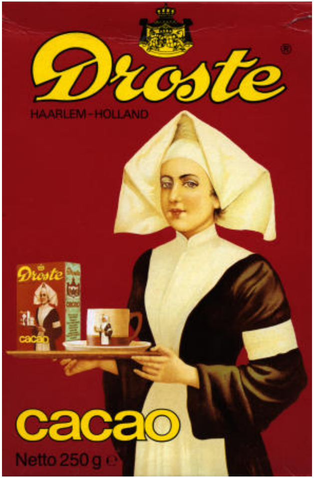
van klein naar groot

natuurlijke/volledige inductie naar $n \in \mathbb{N}$

structurele inductie naar de opbouw

klein minder knopen, minder letters
vaak zonder expliciete n


*cucurucuuu!

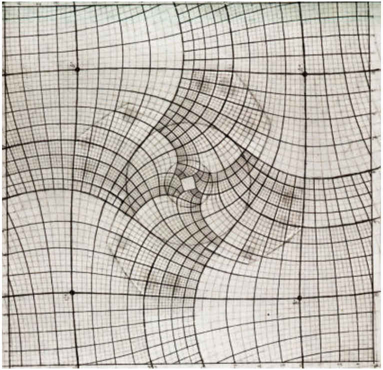


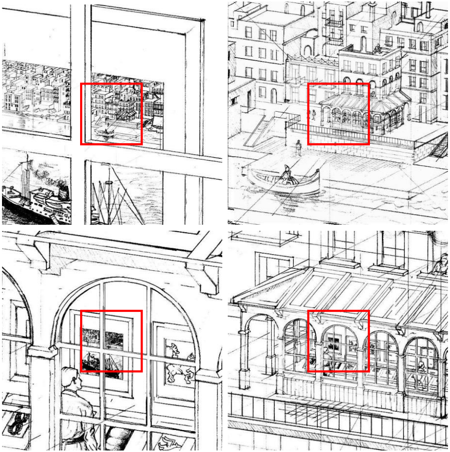
Droste effect

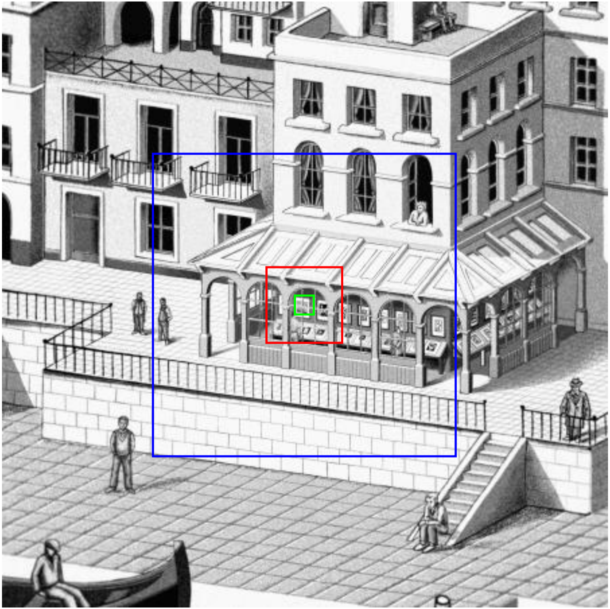
prentententoonstelling

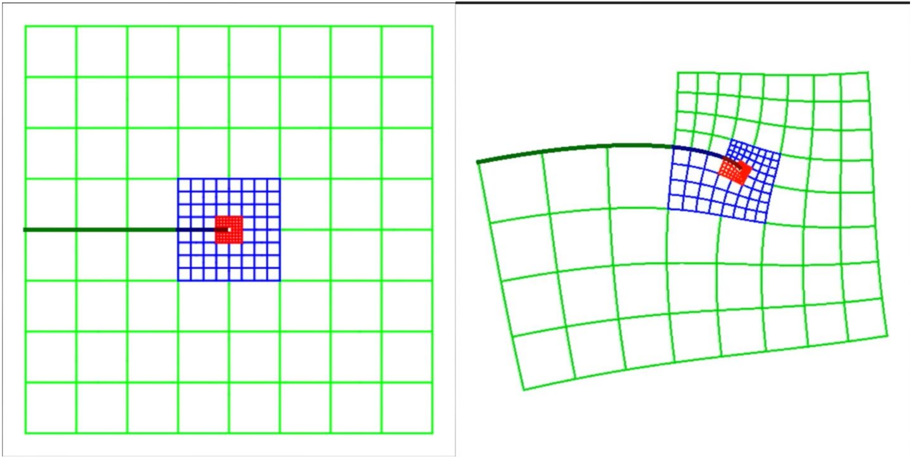
math.leidenuniv Escher and the Droste effect

rooster

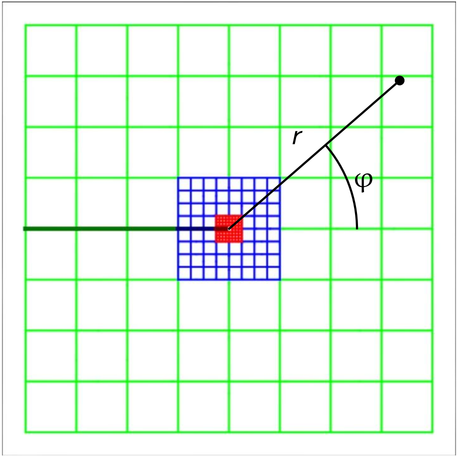


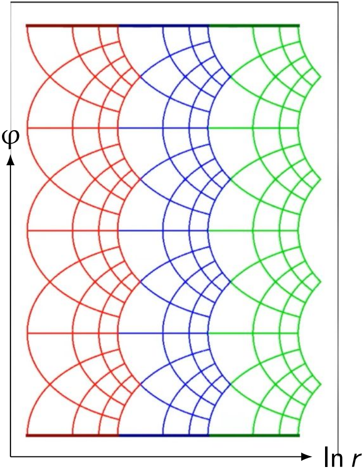






Youtube Oxford Mathematics, Jon Chapman





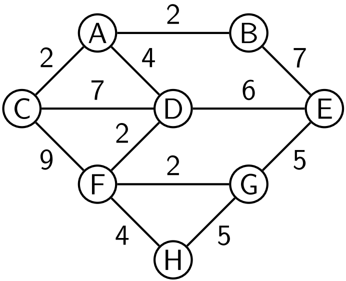
Youtube Oxford Mathematics, Jon Chapman
Hendrik Lenstra: Escher and the Droste effect

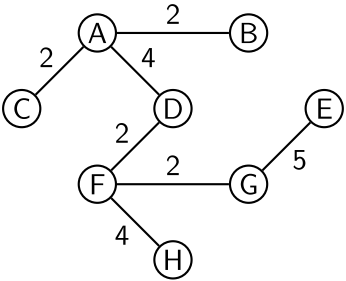
opgerold

youtube EscherGranada

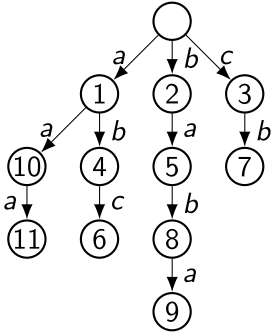
Hoofdstuk 7

Bomen

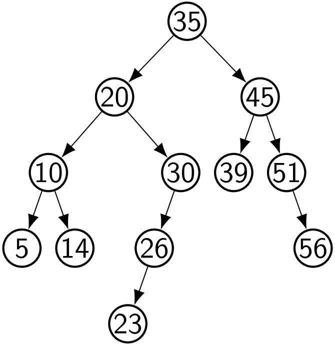




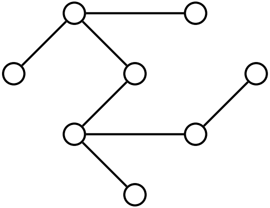
minimaal opspannende boom



trie

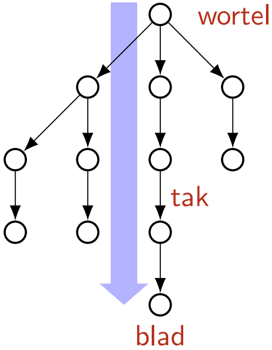


binaire zoekboom



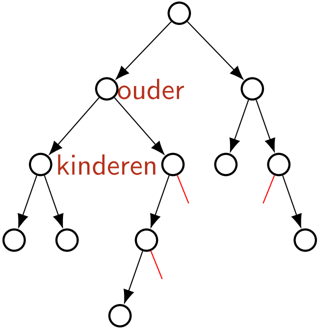
ongerichte boom
(graaf)

Ch. 8.8



gerichte boom

Ch. 9.4



binaire boom

Ch. 10


* КУКАРЕКУ!

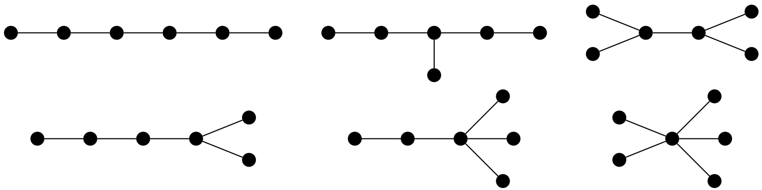
boom

– samenhangend

tussen elk tweetal knopen een pad

– acyclisch (geen cykels)

geen gesloten (simpel) pad



bos verzameling bomen acyclisch

Prob. 8.13

T boom desda tussen elk tweetal punten precies één simpel pad
T boom, e lijn dan $T - e$ niet samenhangend
T boom, $e = (u, v)$ geen lijn dan heeft $T \cup \{e\}$ cykel

$T = (V, E)$ boom, dan $|E| = |V| - 1$

Theorem (Thm. 8.6, Prob. 8.14)

equivalent zijn

1. *G is een boom (acyclisch en samenhangend)*
2. *G is acyclisch en heeft $n - 1$ lijnen*
3. *G is samenhangend en heeft $n - 1$ lijnen*

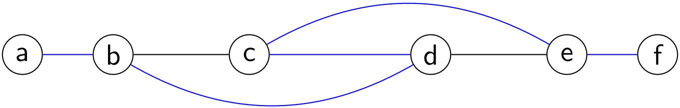
ongerichte grafen

kring		gesloten
cykel	cycle	gesloten, unieke knopen

Prob. 8.37 Opg. 39

twee verschillende simpele paden tussen u en v, dan heeft G een cykel

$$a - b - c - d - e - f \quad \text{vs.} \quad a - b - d - c - e - f$$



kringen wegknippen

pad tussen u en v, dan een *simpel* pad tussen u en v

Prob. 8.37 Opg. 39

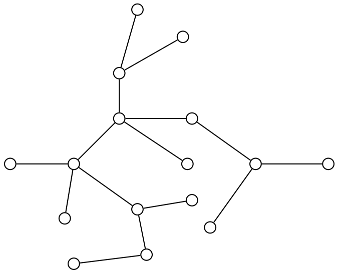
twee verschillende simpele paden tussen u en v, dan heeft G een cykel

niet waar

G heeft een kring, dan heeft G een cykel

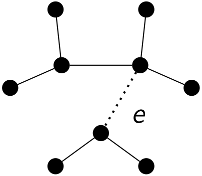
Prob. 8.13

T boom desda tussen elk tweetal punten precies één simpel pad

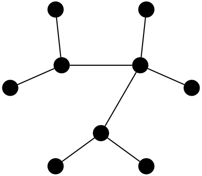


– samenhang desda overal tenminste één (simpel) pad

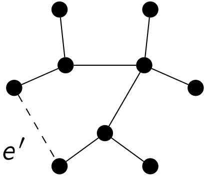
– acyclisch desda nergens twee simpele paden niet samenhangend



samenhangend

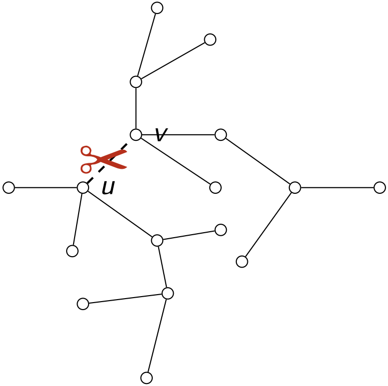


acyclisch



heeft cykel

T boom, e lijn dan $T - e$ niet samenhangend



dus: elke lijn is een brug

T boom, e lijn   dan $T - e$ niet samenhangend

gebruik: Prob. 8.37
twee verschillende simpele paden tussen u en v, dan heeft G een cykel

bewijs, door middel van tegenspraak.

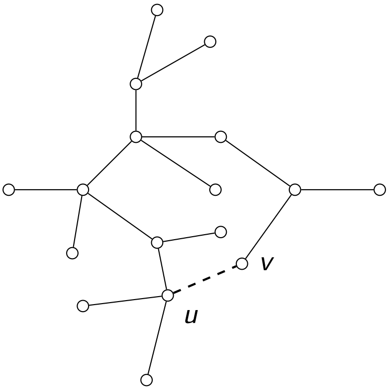
stel $T - e$ nog steeds samenhangend,

dan is er behalve $u - v$ nog een pad tussen u en v, omdat de graaf nog steeds samenhangend en de lijn $e = (u, v)$ weggehaald is

dat zijn twee paden tussen u en v dus is er een cykel in T, en dat mag niet in een boom

tegenspraak: $T - e$ niet samenhangend

T boom, $e = (u, v)$ geen lijn   dan heeft $T \cup \{e\}$ cykel



T boom, $e = (u, v)$ geen lijn   dan heeft $T \cup \{e\}$ cykel

gebruik: Prob. 8.37
twee verschillende simpele paden tussen u en v, dan heeft G een cykel

bewijs.

omdat T samengangend is er een pad tussen u en v.

door (u, v) toe te voegen ontstaat een nieuw pad tussen u en v.

dus zijn er twee verschillende paden tussen u en v.

en daarom heeft $T \cup \{e\}$ een cykel

$T = (V, E)$ boom, dan $|E| = |V| - 1$

bewijs inductie (naar het aantal knopen)

basis. één knoop

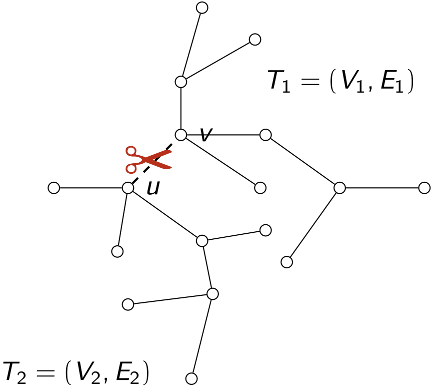
inductiestap.

$|E_1| = |V_1| - 1$
$|E_2| = |V_2| - 1$

$E = E_1 \cup E_2 \cup \{e\} \quad V = V_1 \cup V_2$

optellen

$|E| - 1 = |V| - 2$



$G(V, E)$ graaf met $n = |V| > 1$.

Theorem (Thm. 8.6, Prob. 8.14)

equivalent zijn

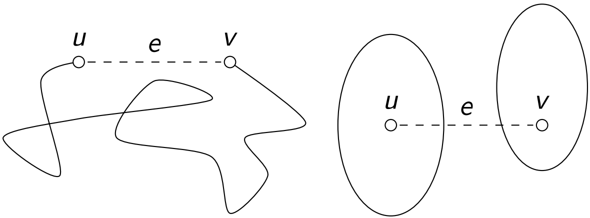
1. *G is een boom (acyclisch en samenhangend)*
2. *G is acyclisch en heeft $n-1$ lijnen*
3. *G is samenhangend en heeft $n-1$ lijnen*

$(1) \Rightarrow (2, 3)$ ✓ want $n-1$ lijnen

Prob. 8.41 Opg. 40

G samenhangend lijn $e = \{u, v\}$

- cykel C bevat e, dan $G - e$ nog steeds samenhangend
- $G - e$ onsamenhangend, dan u en v in verschillende componenten



Theorem (Thm. 8.6, Prob. 8.14)

equivalent zijn

1. *G is een boom (acyclisch en samenhangend)*
2. *G is acyclisch en heeft $n-1$ lijnen*
3. *G is samenhangend en heeft $n-1$ lijnen*

(2) $\Rightarrow$ (1) nog: G samenhangend
stel niet samenhangend

extra lijn tussen twee componenten
dit geeft geen cykel

(herhaal)
we krijgen zo een samenhangende acyclische graaf (boom) met méér dan $n-1$ lijnen.
tegenspraak.

(3) $\Rightarrow$ (1) nog: G acyclisch
stel G heeft een cykel

verwijder een lijn uit een cykel
dit behoudt de samenhang

(herhaal)
we krijgen zo een samenhangende acyclische graaf (boom) met minder dan $n-1$ lijnen.
tegenspraak.

$G(V, E)$ graaf met $n = |V| > 1$.

Theorem (Thm. 8.6, Prob. 8.14)

G is een boom desda twee van de volgende eigenschappen

1. *G is acyclisch*
2. *G is samenhangend*
3. *G heeft $n - 1$ lijnen*

$G(V, E)$ graaf met $|V| > 1$.

maximaal acyclisch

– zonder cykel, na toevoegen lijn ontstaat cykel

minimaal samenhangend

– samenhangend, na verwijderen lijn onsamenhangend

Theorem (Prob. 8.13)

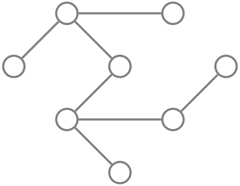
De volgende beweringen zijn equivalent.

1. *G is een boom*
2. *G is maximaal acyclisch*
3. *G is minimaal samenhangend*

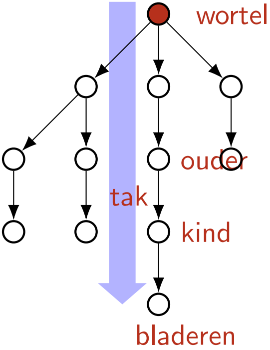
$(1) \Rightarrow (2, 3)$ al gezien

7 Bomen
- Ongerichte bomen
- Gerichte bomen
- Binaire bomen

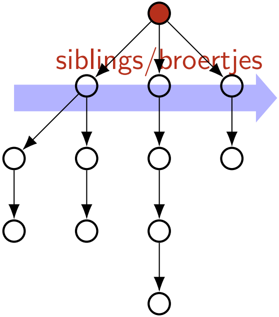
ongerichte boom



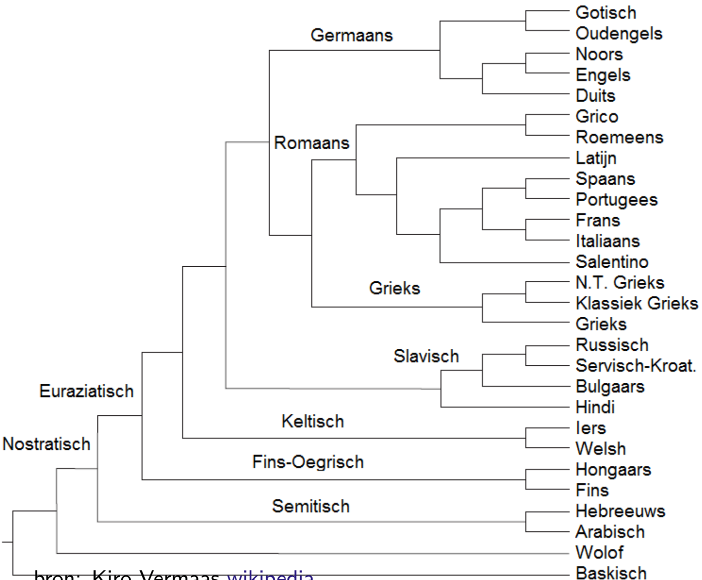
gerichte boom = gewortelde boom



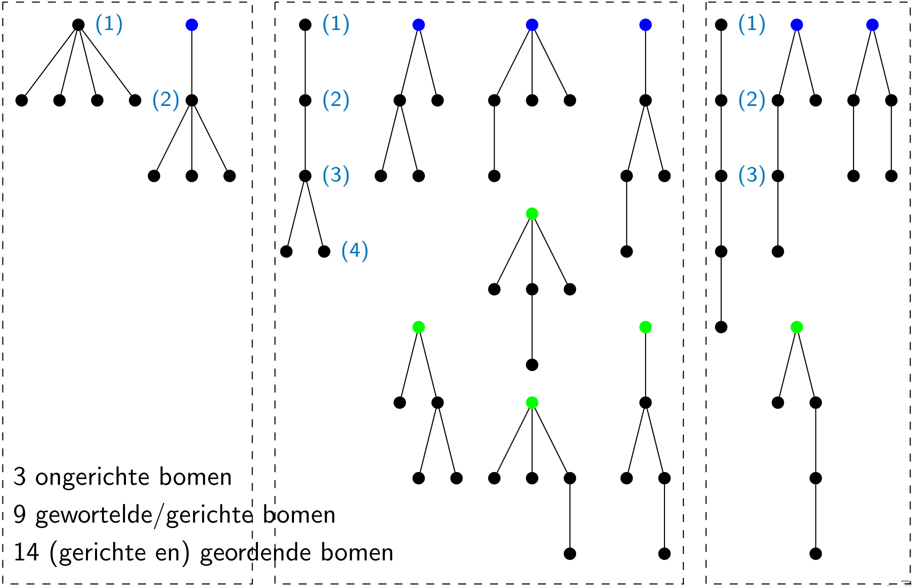
gericht



geordend



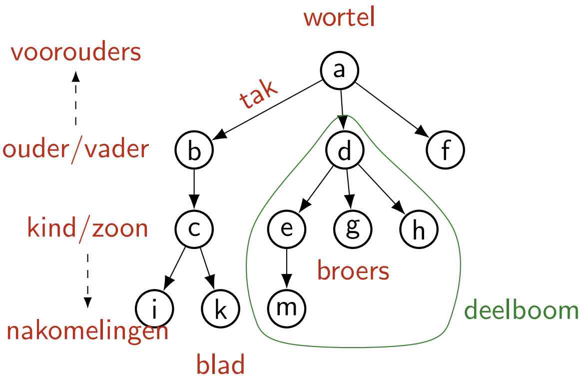
bron: Kiro Vermaas wikipedia



3 ongerichte bomen

9 gewortelde/gerichte bomen

14 (gerichte en) geordende bomen



wortel
voorouders
tak
a
ouder/vader
b
d
f
kind/zoon
c
e
g
h
broers
i
k
m
deelboom
nakomelingen
blad

ongerichte boom

is een (ongerichte) graaf   knopen (punten) + lijnen

eindpunt   knoop graad één
interne knoop   graad tenminste 2
geïsoleerd   graad nul

bos = verzameling bomen   ∼ acyclische graaf

gerichte boom

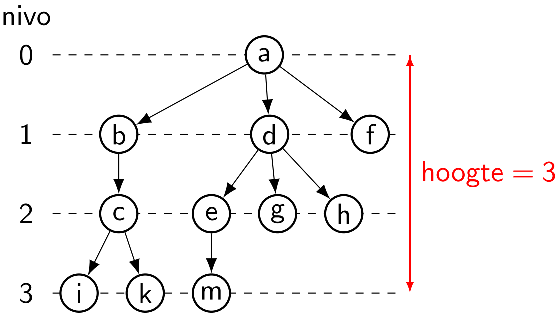
knopen + takken (pijlen)
unieke wortel, alle takken vanaf de wortel gericht
    wortel bovenaan (ja) vaak lijnen ipv pijlen getekend

(directe) bovenbuur = ouder / vader   voorouders / voorgangers
    wortel heeft geen ouder, verder ouder is uniek

(directe) benedenburen = kinderen   nakomelingen / opvolgers

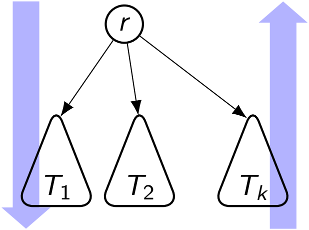
blad = knoop zonder kinderen

deelboom (=subboom)   geïnduceerd door knoop en alle nakomelingen



elke knoop heeft inkomende tak, behalve wortel

$$|E| = |V| - 1$$



copy tree   pre-orde

- copy r
- copy T_1 ← recursief

  ...
- copy T_k

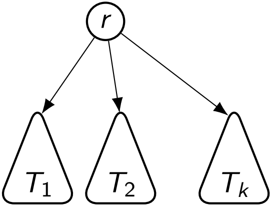
delete tree   post-orde

- delete T_1

  ...
- delete T_k
- delete r

pre-orde   wortel, dan deelbomen

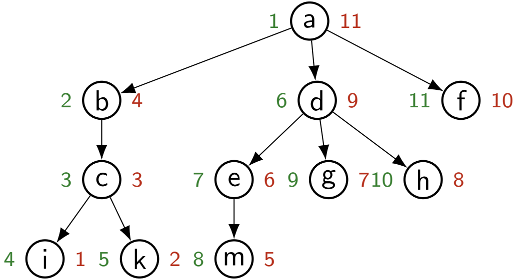
post-orde   deelbomen, dan wortel



boom T wortel r
deelbomen $T_1, \ldots, T_k$

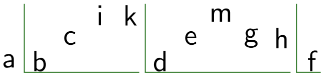
$\text{pre}(T) = r,\ \text{pre}(T_1),\ \ldots,\ \text{pre}(T_k)$

$\text{post}(T) = \text{post}(T_1),\ \ldots,\ \text{post}(T_k),\ r$

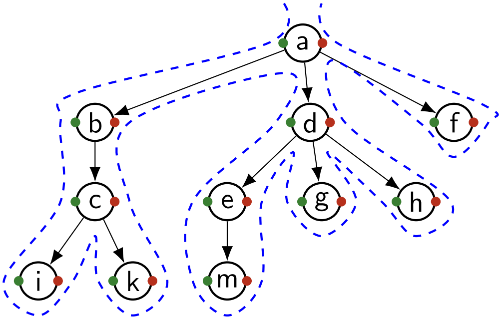


nummering

pre-orde



post-orde



pre-orde eerste

a b c i k d e m g h f

post-orde laatste

i k c b m e g h d f a

$f(\, h(\, g(\, b,\ a\,)\,),\ f(\, h(\, b\,),\ b,\ a\,),\ a\,)$

$f(a_1, a_2, a_3)$ functie / operatie

plaatsigheid *ariteit* rank (aantal argumenten)

$ar(a) = 0$ constante $\pi, \varnothing, \perp, x$ (variabele)

$ar(h) = 1$ unair $\sqrt{\cdot}, \cdot^c, \neg$ prefix, suffix

$ar(g) = 2$ binair $+, \cup, \wedge$ infix $2+3$

☒(algebraic) *signature* / ranked alphabet

$\sigma = (\mathcal{F}, ar)$ $\mathcal{F}$ functiesymbolen $ar : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$

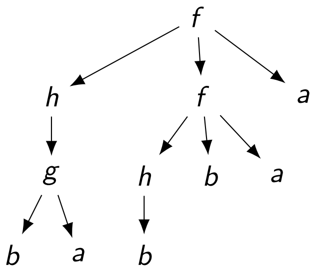
T_σ termen over σ

als $f \in \mathcal{F}$ met $ar(f) = k$, en $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, dan $f(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in T_\sigma$

inductief waar is de basis?

$x^{(k)}$ ariteit k $\quad$ k kinderen

$f^{(3)}$, $g^{(2)}$, $h^{(1)}$, $a^{(0)}$, $b^{(0)}$



gehaakt

$f(\,h(\,g(\,b,\ a\,)\,),\ f(\,h(\,b\,),\ b,\ a\,),\ a\,)$

prefix $\quad$ *Polish notation*

$f\ \underline{h\,g\,b\,a}\ \underline{f\,h\,b\,b\,a}\ \underline{a}$ $\quad$ (pre-orde)

postfix $\quad$ *reverse Polish notation*

$\underline{b\,a\,g\,h}\ \underline{b\,h\,b\,a\,f}\ \underline{a}\ f$ $\quad$ (post-orde)

ariteiten bekend, dan geen haakjes nodig $\quad$ (omloop-methode)

HP 35

wikipedia

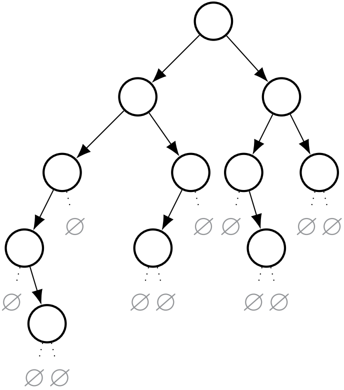
Jan Łukasiewicz

1878 Lemberg/Lwów/Lviv – 1956 Dublin

wikipedia

Overzicht

7. Bomen
   - Ongerichte bomen
   - Gerichte bomen
   - Binaire bomen



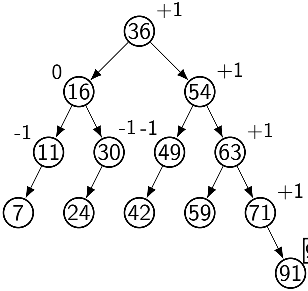
recursieve definitie

binaire boom B is

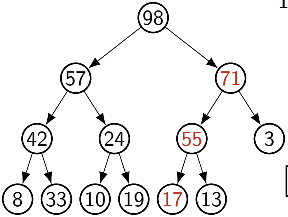
1. leeg of
2. bestaat uit een speciale knoop (de wortel) en een linker subboom B_ℓ en een rechter subboom B_r (disjunct) beide ook binaire boom

die ∅ tekenen we normaal niet

10.6 Binaire zoekboom

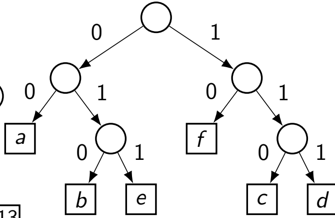


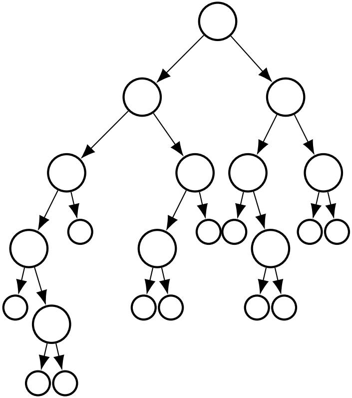
10.7 Heap–priority queue

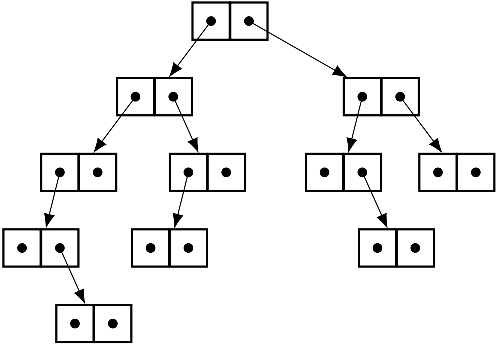


98	57	71	42	24	55	3	8	33	10	19	17	13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

10.8 Huffman–codeboom





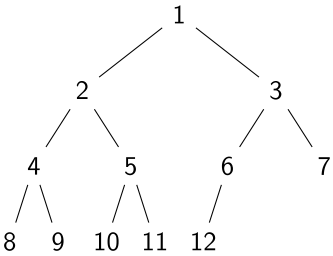


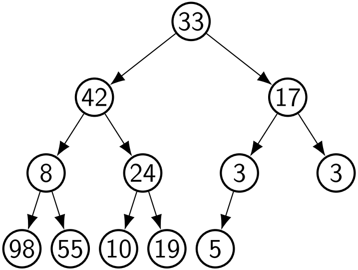
volle boom (2-boom) elke interne knoop [niet-blad] twee kinderen

extended tree voeg ontbrekende kinderen toe

pointer structuur☒ blad ∼ nul-pointer

complete boom





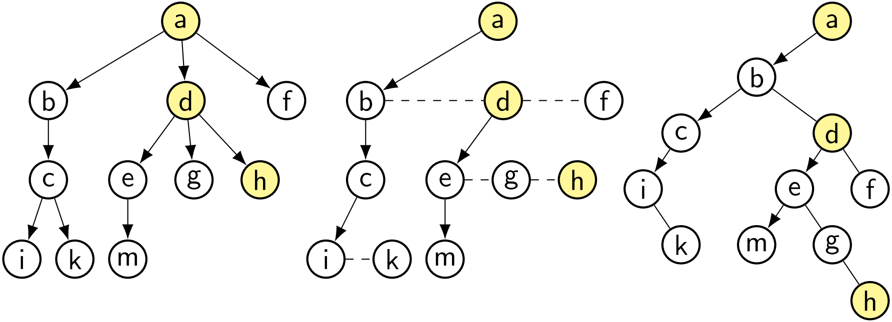
33	42	17	8	24	3	3	98	55	10	19	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

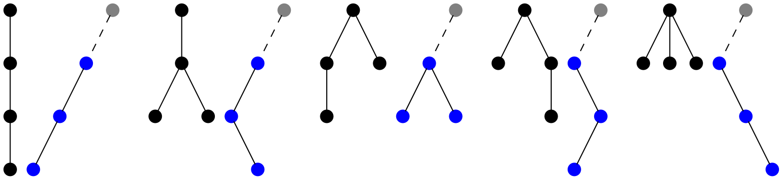
complete boom per nivo, van links naar rechts gevuld

array representatie

left-child right-sibling Sec. 10.19

(gerichte) boom $\rightsquigarrow$ binaire boom

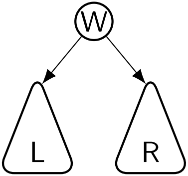




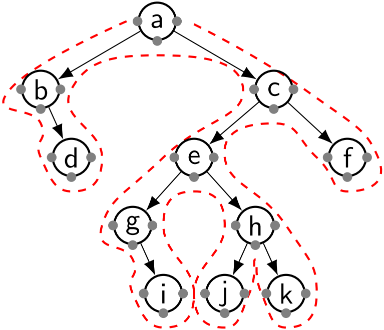
evenveel gerichte bomen met n knopen als binaire bomen met $n-1$ knopen

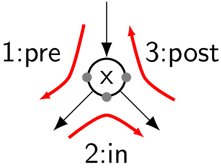
boomwandelen

recursief



omloop-methode

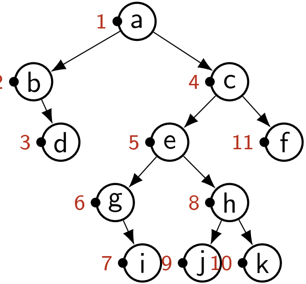




WLR pre-orde

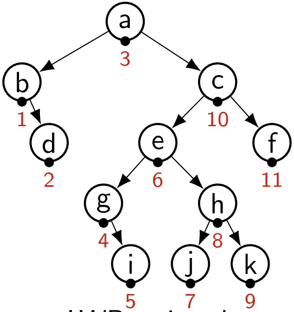
LWR in-orde
symmetrisch

LRW post-orde



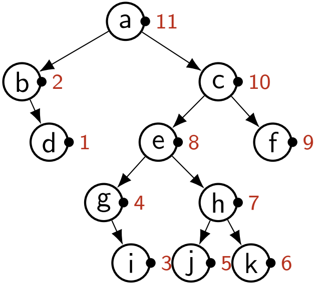
WLR = preorde

$\boxed{a}$ $\underline{b}$ d $\underline{c}$ e g i h j k f



LWR = inorde

$\underline{b}$ d $\boxed{a}$ g i e j h k $\underline{c}$ f

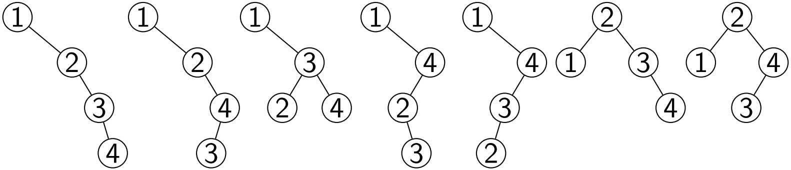


LRW = postorde

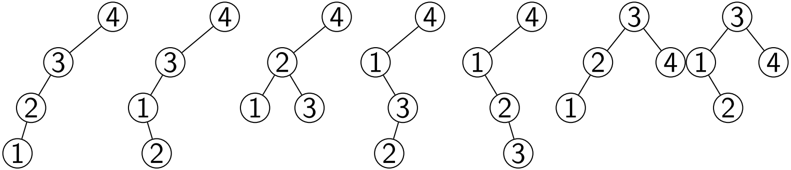
d $\underline{b}$ i g j k h e f $\underline{c}$ $\boxed{a}$

inorde

1,2,3,4



1,2,3,4 1,2,4,3 1,3,2,4 1,4,2,3 1,4,3,2 2,1,3,4 2,1,4,3

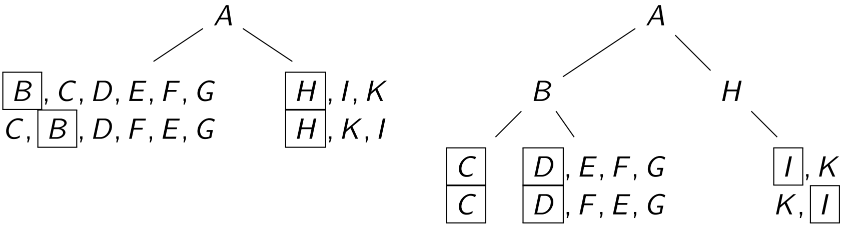


4,3,2,1 4,3,1,2 4,2,1,3 4,1,3,2 4,1,2,3 3,2,1,4 3,1,2,4

preorde

$\boxed{W}$ L R pre-orde: $\boxed{A}, \underbrace{B, C, D, E, F, G}, \underbrace{H, I, K}$

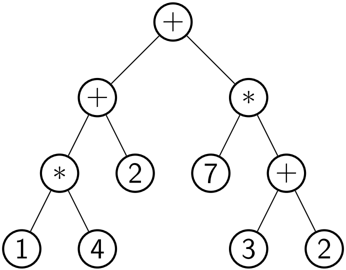
L $\boxed{W}$ R in-orde: $\underbrace{C, B, D, F, E, G}_{\text{links}}, \boxed{A}, \underbrace{H, K, I}_{\text{rechts}}$



expressie met binaire operaties $\rightsquigarrow$ volle binaire boom

interne knopen operaties *binair*

bladeren waardes constanten



prefix *Polish notation*

$+ + * 1\, 4\, 2 * 7 + 3\ \ 2$ (pre-orde)

infix (volledig) gehaakt

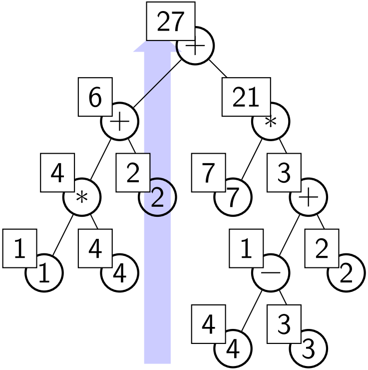
$((1 * 4) + 2) + (7 * (3 + 2))$

postfix *reverse Polish notation*

$1\, 4 * 2 + 7\, 3\, 2 + * +$ (post-orde)

prefix en postfix leggen de formule/boom vast zonder haakjes

bij infix hebben we haakjes nodig (soms voorrangsregels) recursief (bottom-up)

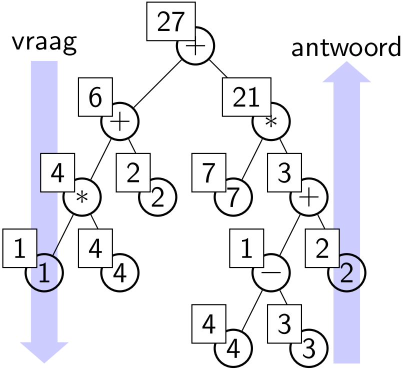


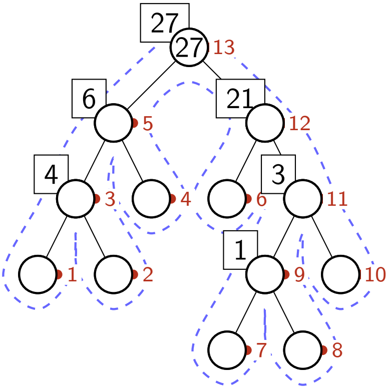
basis

blad 'x': f(blad) $=$ getalswaarde x

recursie

knoop '@' : f(knoop) $=$ f(links) @ f(rechts)





postorde evaluatie

1 4 ∗ 2 + 7 4 3 − 2 + ∗ +

4 2 + 7 4 3 − 2 + ∗ +

6 7 4 3 − 2 + ∗ +

6 7 1 2 + ∗ +

6 7 3 ∗ +

6 21 +

27

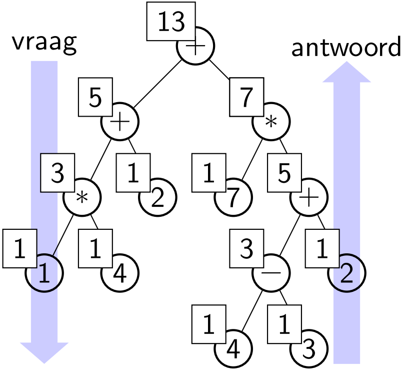
aantal knopen aangenomen dat de boom vol is

basis

blad : f(blad) = 1

recursie

knoop : f(knoop) = 1 + f(links) + f(rechts)



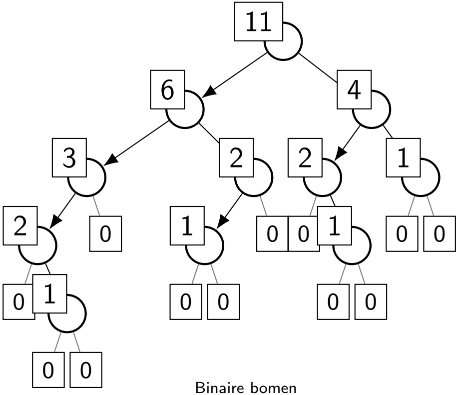
aantal knopen algemene binaire bomen 'extern' blad

basis

blad : f(leeg) = 0

recursie

knoop : f(knoop) = 1 + f(links) + f(rechts)



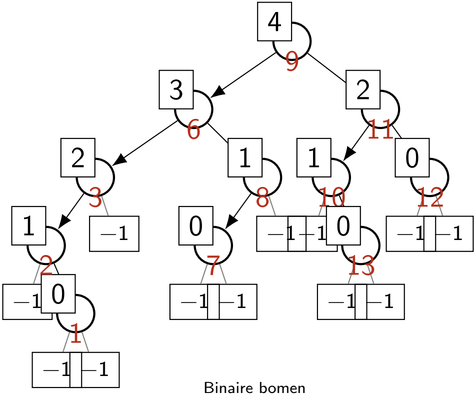
hoogte gemeten in takken

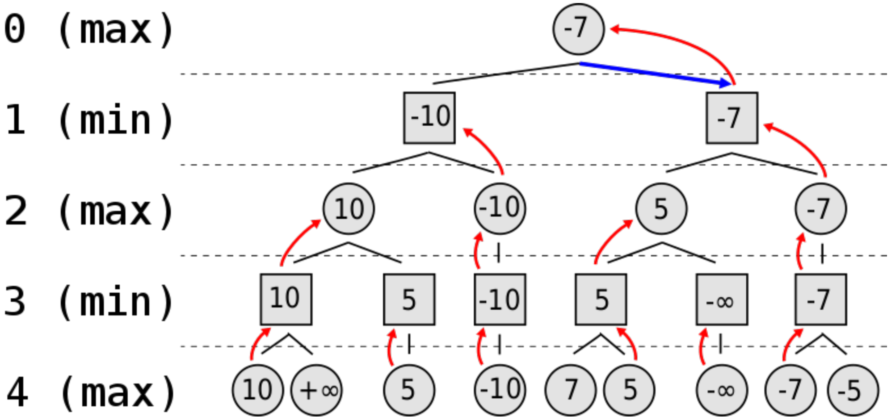
basis

blad : f(leeg) = -1 (!?)

recursie

knoop : f(knoop) = 1 + max { f(links), f(rechts) }



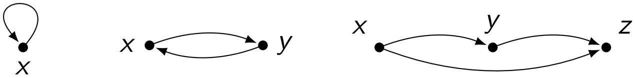


Nmnogueira wikipedia

Hoofdstuk 8

Twee Equivalentierelaties

equivalentierelatie



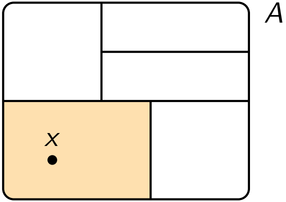
reflexief symmetrisch transitief

$R \subseteq A \times A$ *equivalentierelatie*

- *reflexief* $x \; R \; x$ voor alle $x \in A$
- *symmetrisch* uit $x \; R \; y$ volgt dat $y \; R \; x$ voor alle ...
- *transitief* uit $x \; R \; y$ en $y \; R \; z$ volgt dat $x \; R \; z$ voor alle ...
  als $x \; R^n \; z$ dan $x \; R \; z$ voor alle $n \geqslant 1$ voor alle ...

$R \subseteq A \times A$ equivalentierelatie

partitie van A



equivalentieklasse $[x] = \{\, z \mid x \; R \; z \,\}$

1. rekenen met resten modulo
2. kardinaliteit aantal elementen aftelbaarheid

- in $\mathbb{Z}$ $x \equiv y \pmod 5 \iff x - y$ deelbaar door 5

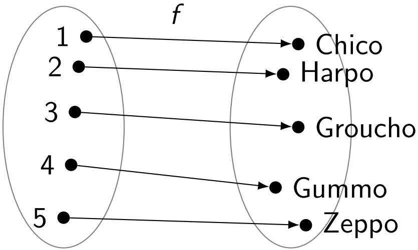
-11	-6	-1	4	9	14	19	$\cdots$
$\cdots$	-7	-2	3	8	13	18	$\cdots$
$\cdots$	-8	-3	2	7	12	17	$\cdots$
$\cdots$	-9	-4	1	6	11	16	$\cdots$
$\cdots$	-10	-5	0	5	10	15	$\cdots$

eigenschap: rest (bij deling door 5)

Sch 11.8 Congruence relation

V eindig $\quad |V| = n$

$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to V \quad$ bijectie



gelijkmachtig *equipotent* $\quad A \simeq B \iff$ bijectie $f : A \to B$

Sch 3.7 Cardinality

Overzicht

8 Twee Equivalentierelaties
- Modulo rekenen
- Aftelbaarheid

17u.

8 uur later

1u.

$$17 + 8 \equiv 1 \pmod{24}$$

rekenen modulo 24

```
// is jaar een schrikkeljaar?
bool schrikkel (int jaar) {
   return ( jaar % 4 == 0
            && ( jaar % 400 == 0 || jaar % 100 != 0 ) );
}//schrikkel
```

```
i = 0
while i < 100:
    if i % 10 == 0:
        print("This happens once every ten times!")
    i += 1
```

rekenen met resten

$x \equiv y \pmod 7$

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
0	**1**	2	**3**	**4**	5	6
7	**8**	9	10	11	12	13
14	15	16	**17**	18	19	20
21	22	23	24	**25**	26	27

$$1 + 3 = 4$$
$$8 + 17 = 25$$

$x \equiv y \pmod{m} \iff x - y$ deelbaar door m
gelijk/congruent modulo m ($m > 1$, geheel, vast gekozen)

Thm. 11.21, Prob. 11.34

$\equiv \pmod{m}$ is een equivalentierelatie

bewijs. (slordige modulo notatie)

reflexief $a \equiv a\ (m)$ voor alle a
$a - a = 0$ is deelbaar door m

symmetrisch als $a \equiv b\ (m)$ dan $b \equiv a\ (m)$ voor alle a, b
$b - a = -(a - b)$ is deelbaar door m

transitief als $a \equiv b\ (m)$ en $b \equiv c\ (m)$ dan $a \equiv c\ (m)$ voor ...
$a - c = (a - b) + (b - c)$ is deelbaar door m

$\mathbb{Z}$ gehele getallen
$m > 1$, vast

rest $x = q \cdot m + r$ $0 \leqslant r < m$

`%` `div` `rem` `mod`

- $x \equiv y \pmod{m}$
- $x - y$ deelbaar door m
- $x - y$ is een veelvoud van m
- x en y hebben dezelfde rest (bij deling door m)
- $\dfrac{x-y}{m}$ is geheel

- $x \equiv 0 \pmod{m}$
- x deelbaar door m
- x is een veelvoud van m
- x heeft rest 0 (bij deling door m)
- $\dfrac{x}{m}$ is geheel

$\equiv$ (mod m) gedraagt zich netjes bij operaties $+$ en $*$

Thm. 11.22 tov. vaste m

als $a \equiv a'$ (m) en $b \equiv b'$ (m) dan

- $a + b \equiv a' + b'$ (m)
- $a - b \equiv a' - b'$ (m)
- $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$ (m)

voorbeeld $72 \equiv 2$ $143 \equiv 3$ modulo 7

$$72 + 143 = 215 \quad 2 + 3 = 5 \quad 215 \equiv 5$$
$$72 - 143 = -71 \quad 2 - 3 = -1 \quad -71 \equiv -1$$
$$72 \cdot 143 = 10296 \quad 2 \cdot 3 = 6 \quad 10296 \equiv 6$$

bewijs. gegeven $a - a'$ en $b - b'$ deelbaar door m

$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b')$ deelbaar door m

$(a - b) - (a' - b') = (a - a') - (b - b')$ deelbaar door m

$(a \cdot b) - (a' \cdot b') = a \cdot (b - b') + (a - a') \cdot b'$ deelbaar door m

$$a^{2k} = (a^k)^2$$
$$a^{2k+1} = a^{2k} \cdot a$$

$12^{43} \pmod{71}$

recursief

$$\begin{array}{ll}
43 = 42 + 1 & 12^{43} \equiv 25 \cdot 12 \equiv 300 \equiv 16 \\
42 = 2 \cdot 21 & 12^{42} \equiv -5 \cdot -5 \equiv 25 \\
21 = 20 + 1 & 12^{21} \equiv 30 \cdot 12 \equiv 360 \equiv -5 \\
20 = 2 \cdot 10 & 12^{20} \equiv 32 \cdot 32 \equiv 1024 \equiv 30 \\
10 = 2 \cdot 5 & 12^{10} \equiv 48 \cdot 48 \equiv 2304 \equiv 32 \\
5 = 4 + 1 & 12^{5} \equiv 4 \cdot 12 \equiv 48 \\
4 = 2 \cdot 2 & 12^{4} \equiv 2 \cdot 2 = 4 \\
2 = 2 \cdot 1 & 12^{2} \equiv 12 \cdot 12 = 144 \equiv 2 \\
 & 12^{1} \equiv 12
\end{array}$$

bij berekeningen met optellen en vermenigvuldigen getallen door simpele equivalente waarde vervangen

laatste cijfer $\rightsquigarrow$ modulo 10

dag van de week $\rightsquigarrow$ modulo 7

deelbaar door m $\rightsquigarrow$ modulo m

vb. bepaal laatste cijfer van 3^{234}

laatste cijfer $\rightsquigarrow$ modulo 10 rekenen

machten van 3 (modulo 10)

$$\begin{array}{lllll} 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 = 3^3 \cdot 3 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \equiv 7 & 7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \end{array}$$

$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$$3^{234} = 3^{4 \cdot 58 + 2} = \underbrace{(3^4)^{58}}_{(3^4) \cdot \ldots \cdot (3^4)} \cdot 3^2 \equiv 1^{58} \cdot 9 \equiv 9$$

let op: de exponent is *niet* modulo 10 genomen!

x deelbaar door 9 als som van de cijfers van x deelbaar door 9

$232.029 = 25781 \cdot 9$
$2 + 3 + 2 + 0 + 2 + 9 = 18$

x deelbaar door 9 $\iff$ $x \equiv 0 \pmod 9$

$$10 \equiv 1 \pmod 9$$
$$10^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 9$$
$$10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 9$$

$c_k \dots c_2 c_1 c_0 =$
$c_k 10^k + \dots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0 \equiv$
$c_k + \dots + c_2 + c_1 + c_0 \pmod 9$

$$\sum_{i=0}^{k} c_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i \pmod 9$$

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor $n \geqslant 0$

$$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot (5^n - 2^n) + 3 \cdot 2^n \text{ is een drievoud}$$

drievoud $\rightsquigarrow$ modulo 3 rekenen

$5 \equiv 2 \pmod 3$

$5^n \equiv 2^n \pmod 3$ (voor alle n)

$5^n - 2^n \equiv 2^n - 2^n \equiv 0 \pmod 3$

op welke dag valt 13 mei 23 ? (1 jan 2000 zaterdag)

weekdag $\rightsquigarrow$ modulo 7 rekenen

za	zo	ma	di	wo	do	vr
1	2	3	4	5	6	0

jaar 365 dagen $365 \equiv 1 \pmod 7$

jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
31	28*	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
3	0*	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3

*elke vier jaar schrikkeldag (ook in 2000. . .) tip: knokkels

23 jaar × 365 dagen/jaar
\+ 6 schrikkeldagen 2000 tm 2022 $\lceil \frac{23}{4} \rceil$
\+ jan tm apr + 13 dagen in 2023

$23{\cdot}365 + 6 + 31 + 28 + 31 + 30 + 13 \equiv$

$2{\cdot}1 + 6 + 3 + 0 + 3 + 2 + 6 \equiv 22 \equiv 1$ zaterdag

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$

$4 + 5 = 3 + 6 \qquad 4 \cdot 5 = 2 + 18$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

let op: *nuldelers* $3 \cdot 4 = 0$

niet ‘$x \cdot y = 0$ dan $x = 0$ of $y = 0$’

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$

$$4 + 5 = 2 + 7 \qquad 4 \cdot 5 = 6 + 14$$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

*	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

x even $\quad x \equiv 0 \pmod 2 \quad \dfrac{x}{2}$ is geheel

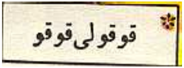
x oneven $\quad x \equiv 1 \pmod 2 \quad \dfrac{x-1}{2}$ is geheel

$\cdots$	-3	-1	1	6	11	16	$\cdots$	oneven
$\cdots$	-4	-2	0	2	4	6	$\cdots$	even

nul is even

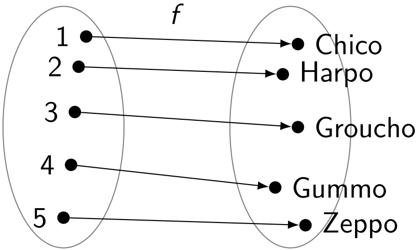
8 Twee Equivalentierelaties

- Modulo rekenen
- Aftelbaarheid



V eindig $\quad |V| = n$

$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to V \quad$ bijectie



gelijkmachtig *equipotent* $A \simeq B \iff$ bijectie $f : A \to B$

Sch 3.7 Cardinality

gelijkmachtig $A \simeq B \iff$ bijectie $f : A \to B$

'evenveel elementen als'

equivalentierelatie zie Functies

- reflexief $A \simeq A$

  indentiteit $\mathrm{id} : A \to A$

- symmetrisch als $A \simeq B$ dan $B \simeq A$

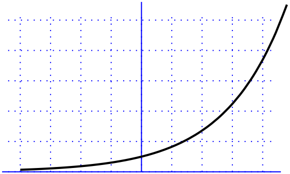
  inverse $f : A \to B$ dan $f^{-1} : B \to A$

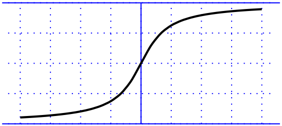
- transitief als $A \simeq B$ en $B \simeq C$ dan $A \simeq C$

  compositie $f : A \to B$, $g : B \to C$ dan $g \circ f : A \to C$

gelijkmachtig $A \simeq B \iff$ bijectie $f : A \to B$

$\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $\mathbb{R} \simeq (0,1)$





aftelling, opsomming

$$\begin{array}{lllllllllll} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ A: & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots \end{array}$$

aftelbaar – eindig of
– $\mathbb{N} \simeq A$ bijectie tussen $\mathbb{N}$ en A

Prob. 3.11

$\mathbb{Z}$ is aftelbaar

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als n even} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{anders} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lllllllllll} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & \cdots \end{array}$$

Hilbert's Hotel

$$\mathbb{N}^+ \simeq \mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$$

$\mathbb{N}^+$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4

the Open University: youtube

		aftelbaar	overaftelbaar
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
		$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$
		Cantor wandeling	diagonalisatie

Thm. 3.3. $(0,1)$ is overaftelbaar

$0.999\cdots = 1.000\cdots$

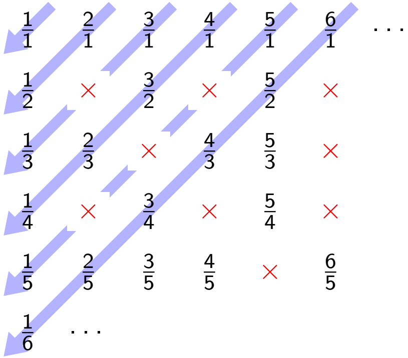
Cantor wandeling $\mathbb{Q}$ aftelbaar

Thm. 3.2. aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar

diagonalisatie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is niet aftelbaar

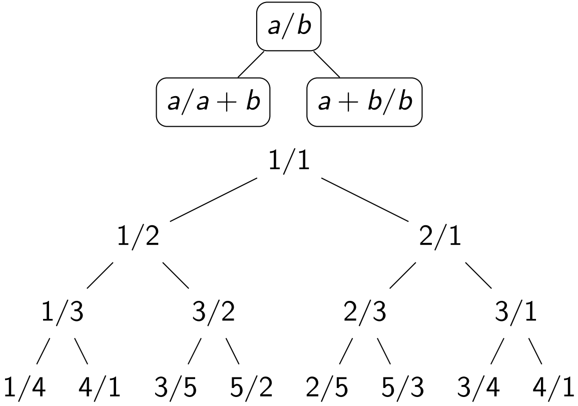
Thm. 3.4. A is niet gelijkmachtig met $\mathcal{P}(A)$

$\mathbb{Q}^+$ is aftelbaar



$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Calkin-Wilf breuken zonder herhaling



diagonalisatie

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is *niet* aftelbaar

ongerijmde, stel wél $V_0, V_1, V_2, \ldots$ opsomming

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
V_0	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
V_1	−	−	+	+	−	+	−	+	−	−	−	+	−	+	−
V_2	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−
V_3	+	−	+	+	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+
V_4	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
V_5	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
V	−	+	+	−	+	−	·	·	·						

$V = \{\, k \in \mathbb{N} \mid k \notin V_k \,\}$ maar $V \neq V_k$ (alle k)

A_k aftelbaar   voor $k \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ is aftelbaar

A_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\times$	a_{04}	a_{05}	a_{06}	$\cdots$
A_1	$\times$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\times$	a_{16}	
A_2	a_{20}	a_{21}	$\times$	a_{23}	$\times$	a_{25}	a_{26}	
A_3	a_{30}	a_{31}	a_{32}	$\times$	a_{34}	a_{35}	$\times$	
A_4	a_{40}	$\times$	$\times$	a_{43}	$\times$	a_{45}	$\times$	

$A_k = \{a_{kj} \mid j \in \mathbb{N}\}$ verzameling - horizontaal

$D_k = \{a_{ij} \mid i + j = k\}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ diagonalen

$B_n = D_n - \bigcup_{k<n} D_k$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ nieuwe elementen

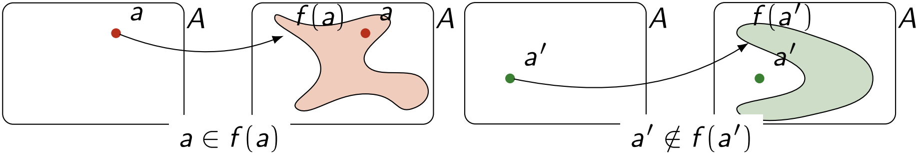
	$\lvert B_0\rvert$	$\lvert B_1\rvert$			$\lvert B_2\rvert$			$\lvert B_3\rvert$				$\lvert B_4\rvert$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{11}	a_{20}	a_{12}	a_{21}	a_{30}	a_{04}	a_{13}	a_{31}	a_{40}	a_{05}

Thm. 3.4, Prob. 3.25

voor elke verzameling A geldt $\quad A \not\approx \mathcal{P}(A)$

ongerijmde $\quad$ stel bijectie $f : A \to \mathcal{P}(A)$

$a \in A$ dan $f(a) \subseteq A$



definieer $\quad B = \{\, x \in A \mid x \notin f(x) \,\}$

f surjectief: $\quad$ er is een b met $f(b) = B$

$$b \notin f(b) \underset{\substack{\text{definitie } B\\ x \notin f(x)}}{\iff} \boxed{b \in B} \underset{\substack{\text{keuze } b\\ B = f(b)}}{\iff} b \in f(b)$$

$|A| \leqslant |B| \quad f : A \to B$ injectief

hoogstens evenveel

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|$$

steeds grotere 'oneindigheden'

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

$|A| = n$ A eindig

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ *aleph nul*

kleinste oneindige kardinaalgetal

$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

$\aleph_1$ aleph één?   eerste kardinaalgetal na $\aleph_0$

continuümhypothese $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

$(0,1) \simeq (0,1)^2 = (0,1) \times (0,1)$

$0.b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots \mapsto (0.b_1 b_3 \ldots, 0.b_2 b_4 \ldots)$

je le vois, mais je ne le crois pas

$|A| \leqslant |B| \quad f : A \to B$ injectief

hoogstens evenveel

☒Thm. 3.5 Schroeder-Bernstein

$|A| \leqslant |B|$ en $|B| \leqslant |A|$ dan $A \simeq B$

☞ er bestaat geen verzameling V van alle verzamelingen (!)

$$D = \{ X \in V \mid X \notin X \} \quad \text{diagonalisatie}$$

$$D \in D \quad \stackrel{\text{definitie}}{\Longleftrightarrow} \quad D \notin D$$

Hoofdstuk 9

Talen en Automaten

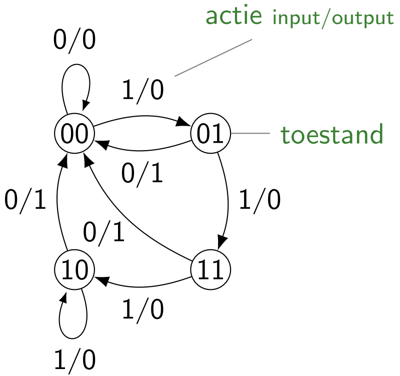
woord $\sim$ reeks acties

taal $\sim$ gedrag van systemen

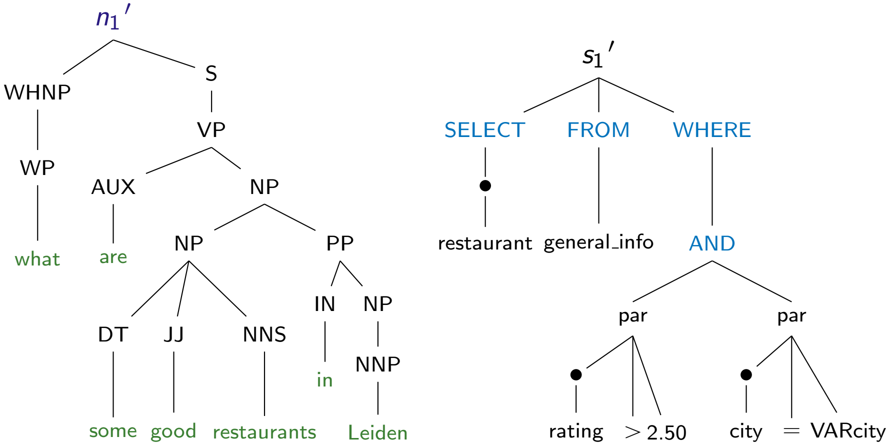
- specificeren $L = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$
  $L = \{\ w \mid w \text{ heeft eigenschap P }\}$
  - taal operaties
    reguliere talen Ch. 12.4
  - grammatica
    context-vrije grammatica ⊠ Ch. 12.6
  - (niet-deterministische) automaat
    eindige automaat, Turing machine ⊠
- herkennen $w \in L$?
  - (deterministische) automaat
    eindige automaat Ch. 12.5
    Turing machine ⊠ Ch. 13.4

Ch. 12. Languages, Automata, Grammars

Ch. 13. Finite State Machines and Turing Machines



Digital Technique by Todor Stefanov, Leiden University



Corpora for Automatically Learning to Map Natural Language Questions into SQL Queries (Giordani and Moschitti, LREC 2010)

1. logic and recursive-function theory   Logica
2. switching circuit theory and logical design   DiTe
3. modeling of biological systems, particularly developmental systems and brain activity
4. mathematical and computational linguistics
5. computer programming and the design of ALGOL and other problem-oriented languages

Chomsky hierarchy

S.A. Greibach. Formal Languages: Origins and Directions.
Annals of the History of Computing (1981) doi:10.1109/MAHC.1981.10006

Overzicht

9 Talen en Automaten

- Letter, woord, taal
- Reguliere talen
- Eindige automaten
- Voorbeelden
- Context-vrije grammatica's☒
- Turing machines☒

letter, symbool σ $0, 1$ a, b, c

alfabet Σ, A $\{a, b, c\}$

(eindig, niet-leeg)

string, woord over Σ eindig rijtje

$w = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \in \Sigma$ $abbabb$

lege string λ Λ, ε, 1

Σ^* alle strings $\{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, \dots, aaa, aab, \dots\}$

lengte $|w|$ aantal symbolen $\cancel{\ell(w)}$

$|abbab| = 5$ $|\lambda| = 0$

taal over Σ $L \subseteq \Sigma^*$

eindige, niet-lege, verzameling

- $\{0,1\}$ $\{a,b,c\}$ $\{0,1,\uparrow,\boxplus\}$
- $\{\clubsuit,\spadesuit,\heartsuit,\diamondsuit\}\times\{H,V,B,10,9,\ldots,2,A\}$ $(\spadesuit,V)$
- $\Sigma_G = \{\,(u,v)\mid(u,v)\in E\}$
  taal: paden in graaf
- $\{$ $\underline{\text{if}}$, $\underline{\text{then}}$, $\underline{\text{function}}$, $\underline{\text{return}}$, $\ldots\}$

concatenatie $a_1 \dots a_m \cdot b_1 \dots b_n$

$ab \cdot babb = abbabb$

wordt vaak weggelaten $u \cdot v = uv$

Thm. 12.1

$w\lambda = \lambda w = w$ eenheid

$(xy)z = x(yz)$ associatief

niet commutatief bei·aard $\neq$ aard·bei

$|xy| = |x| + |y|$

macht $w^n = \underbrace{w \cdot \ldots \cdot w}_{n \text{ keer}}$

$w^0 = \lambda$ (!)
$w^1 = w,\ w^2 = ww,\ \ldots$
$w^{n+1} = w^n \cdot w$

$(ab)^3 bab^4 a = ababab babbbba$

$(\text{ker})^5 = \text{kerk}\cdot\text{erker}\cdot\text{kerker}$

$x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

$|w^n| = n \cdot |w|$

$$\underbrace{aaba}_{\text{prefix}}\, bba\, \overbrace{bbbabb}^{\text{subwoord}}\, bb\, \underbrace{abbbbb}_{\text{suffix}}$$

$x, y \in \Sigma^*$

x is een *deelwoord* van y als $y = u \cdot x \cdot v$ voor $u, v \in \Sigma^*$

prefix als $y = x \cdot v$ voor $v \in \Sigma^*$

suffix als $y = u \cdot x$ voor $u \in \Sigma^*$

= *subwoord*

lekkerkerker deelwoord kerk

twee *voorkomens*

aarzelaar prefix én suffix

$x \preceq y$ als x prefix van y

partiële ordening

– reflexief $\quad x \preceq x \quad$ voor alle $x \in \Sigma^*$

– anti-symmetrisch $\quad$ als $x \preceq y$ en $y \preceq x$ dan $x = y \quad$ voor alle . . .

– transitief $\quad$ als $x \preceq y$ en $y \preceq z$ dan $x \preceq z$

$$
\begin{array}{lllll}
x \preceq y & \xleftrightarrow{\;x\;}\xleftrightarrow{\qquad u \qquad} & & y = x{\cdot}u & \\
y \preceq z & \xleftrightarrow{\qquad\quad y \qquad\quad} & \xleftrightarrow{\;v\;} & z = y{\cdot}v & \\
 & \xleftrightarrow{\qquad\qquad\qquad z \qquad\qquad\qquad} & & z = x{\cdot}uv & x \preceq z
\end{array}
$$

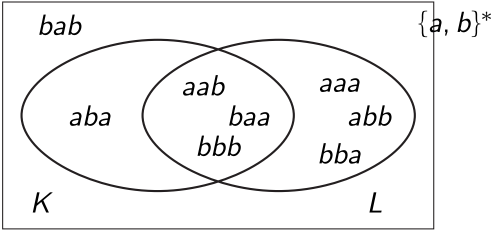
ook: deelwoord en suffix

opsommen, eigenschap

- $\varnothing$ nul woorden
- $\{ \lambda \}$ één woord
- $\{ a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N} \} = \{ \lambda, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb, \ldots \}$
- $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ \lambda, ab, aabb, aaabbb, a^4 b^4, \ldots \}$
- $\{ a^m b a^n \mid m, n \in \mathbb{N} \}$ precies één b
- $L = \{ x \in \{a, b, c\}^* \mid x \text{ heeft subwoord } aab \}$

$K = \{\, x \in \{a,b\}^* \mid x$ heeft een even aantal a's $\}$
$= \{\, \lambda, b, aa, bb, aab, aba, baa, bbb, \dots \}$

$L = \{\, x \in \{a,b\}^* \mid x$ heeft (ergens) twee gelijke letters achter elkaar$\}$
$= \{\, aa, bb, aaa, aab, abb, baa, bba, bbb, \dots \}$



$aab, baa, bbb \in K \cap L$ $\quad aba \in K \setminus L$ $\quad aaa, abb, bba \in L \setminus K$ $\quad bab \in (K \cup L)^c$

doorsnede, vereniging, complement

$K = \{\, x \in \{a, b\}^* \mid x$ heeft een even aantal a's $\}$
$= \{\, \lambda, b, aa, bb, aab, aba, baa, bbb, \dots \}$

$L = \{\, x \in \{a, b\}^* \mid x$ heeft (ergens) twee gelijke letters achter elkaar$\}$
$= \{\, aa, bb, aaa, aab, abb, baa, bba, bbb, \dots \}$

- $K \cap L = \{\, aa, bb, aab, baa, bbb, aaaa, aabb, baab, \dots \}$
- $\{a, b\}^* - L = \{\, \lambda, a, b, ab, ba, aba, baba, ababa, \dots \}$
- $K - L = \{\, \lambda, b, aba, abab, baba, babab, ababaa, \dots \}$
- $L - K = \{\, aaa, abb, bba, aaab, aaba, baaa, baab, \dots \}$

spiegelbeeld w^R, $\mathrm{mir}(w)$

$$\mathrm{mir}(a_1 a_2 \dots a_n) = a_n \dots a_2 a_1$$

voor talen $\mathrm{mir}(L) = \{ \mathrm{mir}(w) \mid w \in L \}$

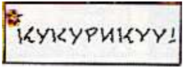
inductief

- $\mathrm{mir}(\lambda) = \lambda$
- $\mathrm{mir}(w \cdot a) = a \cdot \mathrm{mir}(w)$ voor $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$

palindroom $w = \mathrm{mir}(w)$

- snorfrons, netebeten
- *aabaa*, *abba·abba*

$$\mathrm{PAL} = \{ w \in \Sigma^* \mid w = \mathrm{mir}(w) \}$$

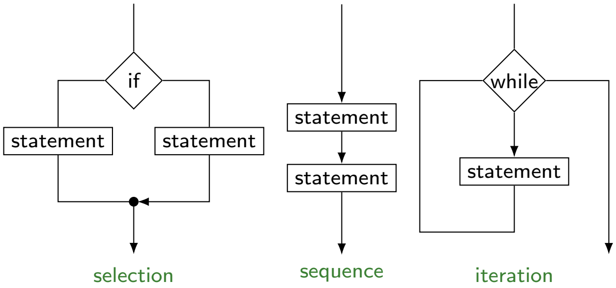

КУКУРИКУУ!

Boolese operaties

$\cup$	vereniging	$\bigvee$
$\cap$	doorsnede	$\bigwedge$
^{c}	complement	$\neg$

reguliere operaties

$\cup$	vereniging
$\cdot$	concatenatie
$*$	ster



concatenatie

$K \cdot L = KL = \{ x{\cdot}y \mid x \in K, y \in L \}$

$\{ a, ab \}{\cdot}\{ a, ba \} = \{ a{\cdot}a, a{\cdot}ba, ab{\cdot}a, ab{\cdot}ba \} = \{ aa, aba, abba \}$

een	$\{\lambda\}{\cdot}L = L{\cdot}\{\lambda\} = L$
nul	$\varnothing{\cdot}L = L{\cdot}\varnothing = \varnothing$
associatief	$(KL)M = K(LM)$

- $\{ \lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots \} \cdot \{ b \} =$
  $\{ \lambda b, ab, bb, aab, abb, bab, bbb, aaab, aabb, \dots \}$
- $\{ a, ab, abb, abbb, abbbb, \dots \} \cdot \{ a, ba, aba, baba, ababa, \dots \} =$
  $\{ aa, aba, aaba, abba, ababa, abbba, aababa, abbaba, abbbba, \dots \}$
  $abb \cdot aba = ab \cdot baba$

$$K^n = \underbrace{K \cdot K \cdot \ldots \cdot K}_{n \text{ keer}}$$

$K^n = \{\, w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_1, w_2, \ldots, w_n \in K \,\}$ vaste n 'buiten'

- $\{\, a, bb \,\}^3 = \{\, aaa, aabb, abba, ab^4, bbaa, bbabb, b^4a, b^6 \,\}$
- $\{\, \lambda, a, ab \,\}^3 = \{\, \lambda, a, aa, ab, aaa, aab, ab{\cdot}a, aaab, aaba, abaa,$
  $abab, a{\cdot}ab{\cdot}ab, abaab, ababa, ababab \,\}$

- $L = \{\, a^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{b, aba, aabaa, a^3ba^3, \ldots\}$
  $L^2 = \{\, a^m ba^{m+n} ba^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

- $(\, \{a\}^*\{b\}\{a\}^* \,)^3 = \{\, w \in \{a,b\}^* \mid w$ bevat 3 voorkomens van $b \,\}$
- $\{\, \lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \ldots \}^4 = \{a\}^*$ Lagrange's four-square theorem

$$K^* = \underbrace{K \cdot K \cdot \ldots \cdot K}_{\text{willekeurig}}$$

$$K^* = \{\, w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_1, w_2, \ldots, w_n \in K, n \in \mathbb{N} \,\}$$ *n* varieert 'binnen'

- $\{a, b\}^*$ alle woorden over $\{a, b\}$
  $\{a, b\}^n$ alle woorden over $\{a, b\}$ van lengte n
- $\{a\}^* \cdot \{b\} = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\} \cdot \{b\} = \{b, ab, aab, aaab, \ldots\}$
- $(\ \{a\}^* \cdot \{b\}\ )^* =$
  $\{b, ab, aab, aaab, \ldots\}^* = \{\lambda, b, ab, bb, aab, abb, bab, bbb, aaab, \ldots\}$
  $= \{a, b\}^* \cdot \{b\} \cup \{\lambda\}$

korte notatie $\{a\} \leftrightarrow a$ $a^* b,\ (a^* b)^*$ zie ook straks

$K^0 = \{\lambda\}$
$K^{n+1} = K^n K \qquad n \geqslant 0$

$\varnothing^0 = \{\lambda\}$ afspraak!

$K^1 = K^0 \cdot K = \{\lambda\} \cdot K = K$ (gelukkig)

$K^m K^n = K^{m+n}$

Kleene ster

$K^* = \bigcup_{n \geqslant 0} K^n$

Kleene plus

$K^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} K^n$

$K^* = K^+ \cup \{\lambda\}$

alfabet Σ

reguliere talen

- $\varnothing$, $\{\lambda\}$ en $\{a\}$ zijn regulier $\quad a \in \Sigma$
- als K en L regulier, dan ook $K \cup L$, $K \cdot L$ en K^*

- $\{a\}^*\{b\}\{a\}^*$ één b $\quad a^*ba^*$
- $\{b\}^*\{a\}\{b\}^*\{a\}\{b\}^*$ precies twee a's $\quad b^*ab^*ab^*$
- $(\{a\} \cup \{b\})^*\{b\} = \{a, b\}^*\{b\}$ eindigt op b
- $\{a\}\{a\}^*\{b\}\{b\}^*$ één of meer a's gevolgd door één of meer b's $\quad aa^*bb^*$
- $(\ \{a\}^*\{b\}\ \{a\}^*\{b\}\ )^*\ \{a\}^*$ even aantal b $\quad (\ a^*ba^*b\ )^*\ a^*$

regulier $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $\{a\}$ $K \cup L$, $K \cdot L$, K^*

elke *eindige* taal is regulier

met inductie twee keer

– enkel woord inductie naar lengte

basis $\{\lambda\}$, $\{a\}$

inductie $\{w\}\cdot\{\sigma\}$

– eindige verzameling inductie op aantal

basis $\varnothing$

inductie $K \cup \{w\}$

voortaan: regulier ~ eindige talen en operaties $\cup$, $\cdot$ en *

$\{ab, bab\}^* \{\lambda, bb\}$

ipv $(\ (\{a\} \cdot \{b\}) \cup (\{b\} \cdot \{a\} \cdot \{b\})\ )^* \cdot (\ \{\lambda\} \cup (\{b\} \cdot \{b\})\ )$

notatie

syntax regex

- $\varnothing$, λ en a zijn regex $\quad a \in \Sigma$
- als r_1 en r_2 regex, dan ook $(r_1 + r_2)$, $(r_1 r_2)$ en (r_1^*)

betekenis expressie $\quad r \mapsto L(r) \subseteq \Sigma^* \quad$ taal

taal van r

semantiek regex

- $L(\varnothing) = \varnothing$, $L(\lambda) = \{\lambda\}$, en $L(a) = \{a\}$
- als r_1 en r_2 regex, dan $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$, $L(r_1 r_2) = L(r_1) \cdot L(r_2)$ en $L(r_1^*) = L(r_1)^*$

haakjes weglaten

- associativiteit $+, \cdot$
- voorrangsregels

  * voor $\cdot$ voor $+$

  $aab + ab^*a + (ab)^*a$

  $\{aab\} \cup \{aa, aba, abba, abbba, \ldots\} \cup \{a, aba, ababa, abababa, \ldots\}$

verschil verzamelingsnotatie en reguliere expressie

$\{ab, bab\}^* \{\lambda, bb\}$ vs $(ab + bab)^*(\lambda + bb)$

trivial	$E + 0 = 0 + E = E$	where $0 = \varnothing$
	$E \cdot 0 = 0 \cdot E = 0$	
	$E \cdot 1 = 1 \cdot E = E$	where $1 = \Lambda$
associative	$(E_1 + E_2) + E_3 = E_1 + (E_2 + E_3)$	
	$(E_1 \cdot E_2) \cdot E_3 = E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3)$	
distributive	$E(E_1 + E_2) = EE_1 + EE_2$	
	$(E_1 + E_2)E = E_1E + E_2E$	
commutative	$E_1 + E_2 = E_2 + E_1$	
unrolling	$E^* = 1 + EE^* = 1 + E^*E$	$*$-rules
denesting	$(E_1 + E_2)^* = E_1^* \cdot (E_2 \cdot E_1^*)^*$	
sliding	$(E_1 \cdot E_2)^* \cdot E_1 = E_1 \cdot (E_2 \cdot E_1)^*$	
cyclic Zn	$E^* = (1 + E + E^2 + \dots E^{n-1}) \cdot (E^n)^*$	
idempotency	$E + E = E$	
	$(E^*)^* = E^*$	

based on Jacques Sakarovitch: Automata and expressions

$\mathrm{mir}(x) = x^R$ spiegelbeeld

$\mathrm{mir}(L) = \{ \mathrm{mir}(x) \mid x \in L \}$

als L regulier dan ook $\mathrm{mir}(L)$ regulier

(structurele) inductie

basis: eindige talen ok

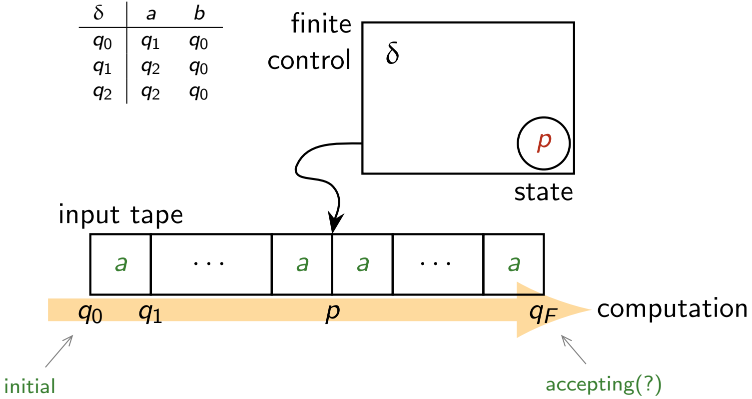
$$\mathrm{mir}(L_1 + L_2) = \mathrm{mir}(L_1) \cup \mathrm{mir}(L_2)$$

$$\mathrm{mir}(L_1 L_2) = \mathrm{mir}(L_2) \cdot \mathrm{mir}(L_1) \qquad (!)$$

$$\mathrm{mir}(L^*) = \mathrm{mir}(L)^*$$

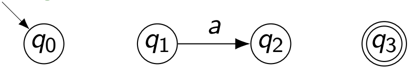

KIKIRIKÍÍÍ

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0



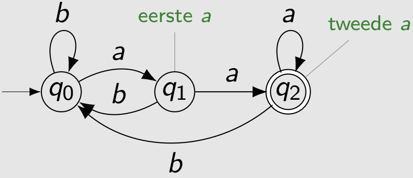
finite control $\rightsquigarrow$ gerichte graaf

begin transitie accepterend



Example

$L_1 = \{\, x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ ends with } aa \,\}$



δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0

gerichte graaf, tak-labels, begintoestand, accepterend (eindtoestand)

DFA

[deterministische] *eindige automaat* 5-tuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{in}}, A)$,

– Q eindige verzameling toestanden;

– Σ (eindig) input alfabet;

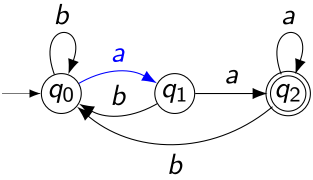
– $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ transitiefunctie; *next state*

– $q_{\text{in}} \in Q$ begintoestand;

– $A \subseteq Q$ accepterende toestanden

functie $\rightsquigarrow$ *elke* toestand heeft voor *elke* letter een uitgaande tak

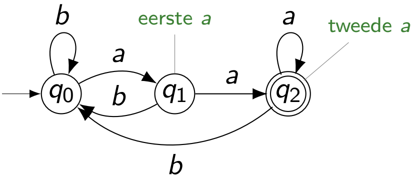
Schaum $M = (A, S, Y, s_0, F)$ (niet erg standaard) toestandsdiagram



- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- δ als in matrix, rechts
- $q_{\text{in}} = q_0$
- $A = \{q_2\}$

transitiefunctie

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0



δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0

accepterend

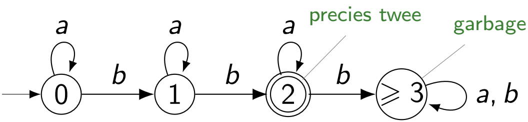
$$\rightarrow q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2$$

niet accepterend

$$\rightarrow q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_0$$

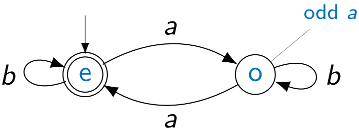
$L(M)$ *taal van M* labels paden van begin naar accepterende toestand

– precies twee b's



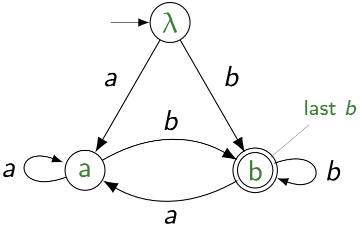
$a^* b a^* b a^*$

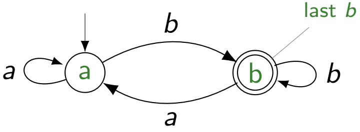
– even aantal a



$(\ b^* a b^* a \ )^* \ b^*$

– laatste letter b $\{a, b\}^* b$





DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{in}}, A)$ $\quad \delta : Q \times \Sigma \to Q$

extended transition function

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q, \text{ such that}$$

- $\delta^*(p, \lambda) = p$ for $p \in Q$
- $\delta^*(p, y \cdot \sigma) = \delta(\,\delta^*(p, y), \sigma\,)$ for $p \in Q, y \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, dashed, "y"] & q \arrow[r, "\sigma"] & r \end{tikzcd}$$

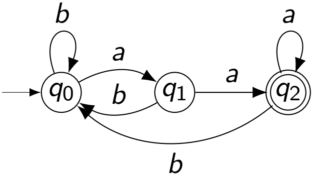
$q = \delta^*(p, y)$ $\quad$ $r = \delta(q, y)$

$q = \delta^*(p, w)$ iff

there is a path in [the transition graph of] M from p to q with label w.

alternatief

the *language accepted* by $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{in}}, A)$ is the set
$L(M) = \{\, x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_{\text{in}}, x) \in A \,\}$



$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{b} q_0$$

$\delta^*(q_0, \lambda)$ $\delta^*(q_0, a)$ $\delta^*(q_0, aa)$ $\delta^*(q_0, aab)$ $\delta^*(q_0, aabb)$

$\delta^*(q_0, aabb) = q_0$:

$$\delta^*(q_0, \lambda) = q_0$$

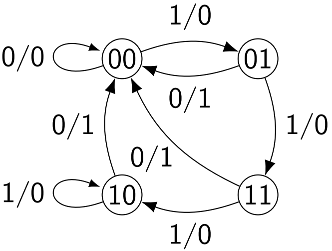
$$\delta^*(q_0, a) = \delta^*(q_0, \lambda \cdot a) = \delta(\delta^*(q_0, \lambda), a) = \delta(q_0, a) = q_1$$

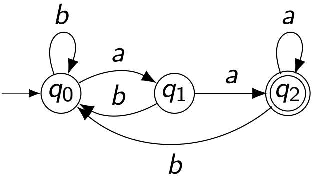
$$\delta^*(q_0, a \cdot a) = \delta(\delta^*(q_0, a), a) = \delta(q_1, a) = q_2$$

$$\delta^*(q_0, aa \cdot b) = \delta(\delta^*(q_0, aa), b) = \delta(q_2, b) = q_0$$

$$\delta^*(q_0, aab \cdot b) = \delta(\delta^*(q_0, aab), b) = \delta(q_0, b) = q_0$$

finite state machines   digitale technieken vs. formele talen theorie





technische verschillen

– concrete implementatie: bits
– begin- en accepterende toestanden
– invoer/uitvoer gedrag vs. taal
    Moore / Mealy   toestand / transitie
– (niet-)determinisme

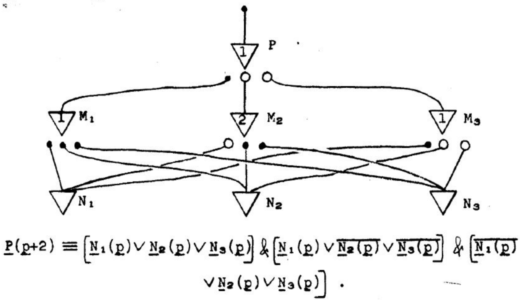
taalfamilies

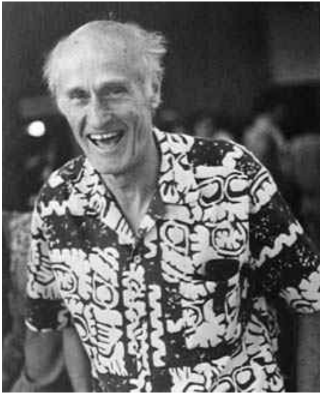
- regulier   operaties $\cup$, $\cdot$, *
- eindige automaat

Thm. 12.2   Kleene

een taal L is regulier   desda $L = L(M)$ voor een DFA M

zonder bewijs – zie Automata Theory



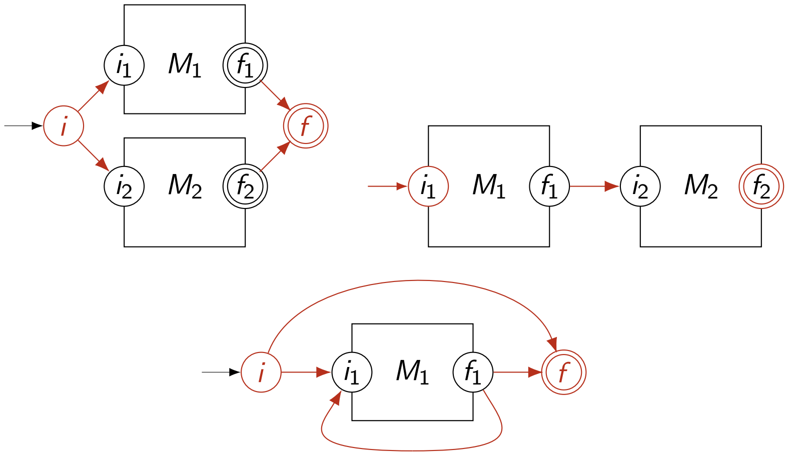


1909 Hartford CT, USA –
1994 Madison WI, USA

Kleene, S.C. (1956). Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata. Annals of Mathematics Studies vol. 34. Princeton University Press. pp. 3–41.

wikipedia MacTutor

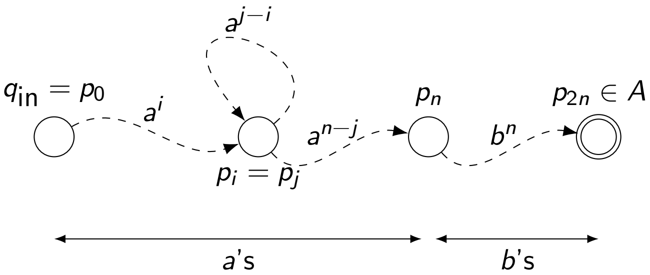
reguliere operaties $\Longrightarrow$ automaten



☒Thm 12.3 (Pumping Lemma)

$\{ \, a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \, \}$ is niet regulier

bewijs. vergelijk Thm. 8.2 over simpele paden



Door middel van tegenspraak. Stel $L = \{ a^m b^m \mid n \in \mathbb{N} \}$ is wél regulier. Reguliere talen worden geaccepteerd door eindige automaten.

Er is dus een DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{in}}, A)$ die L accepteert, zeg met n toestanden.

Kijk naar een accepterend pad (berekening) voor de string $w = a^n b^n$. De begintoestand is q_{in}. Verder noem $p_k = \delta^*(q_{\text{in}}, a^k)$ voor $k = 0, 1, \ldots, n$. Na toestand p_n worden b's gelezen. Op het pad van a^n van $p_0 = q_{\text{in}}$ tot p_n liggen in totaal $n + 1$ toestanden. Die kunnen niet allemaal verschillend zijn, want M heeft maar n toestanden.

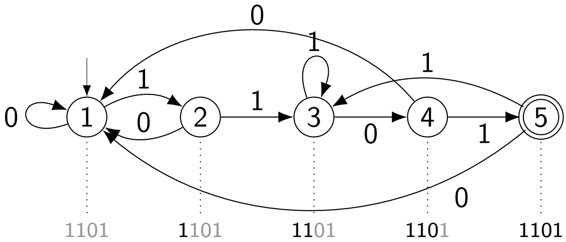
Er is dus een paar $p_i = p_j$ dat gelijk is. Het pad tussen p_i en p_j kan verwijderd worden, en wat overblijft is nog steeds een pad van q_{in} naar een toestand in A.

Omdat er a's zijn weggehaald, terwijl er nog steeds n letters b staan, wordt nu een woord $w' = a^m b^n$ geaccepteerd met $m < n$, dus $w' \notin L$.

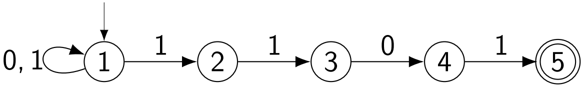
M accepteert dus niet L. Tegenspraak, L is niet regulier.

suffix [= eindigt op] 1101

algoritme deterministisch



beschrijving niet-deterministisch



er verandert weinig

NFA

[niet-deterministische] *eindige automaat* 5-tuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{in}}, A)$,

...

– $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ transitie relatie

...

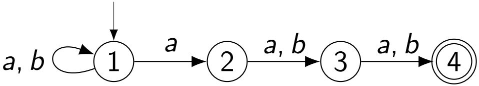
$L(M)$ *taal van M* labels paden van begin naar accepterende toestand

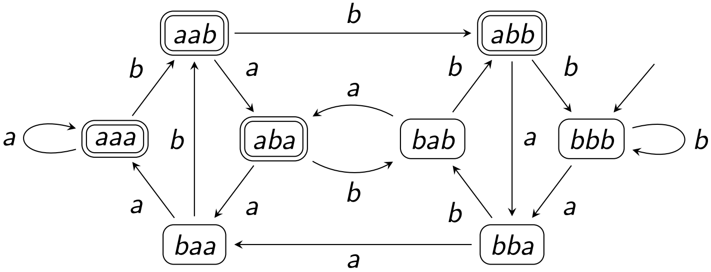
– soms meerdere paden (wel / niet accepterend)

– soms geen enkel pad ‘automaat blokkeert’

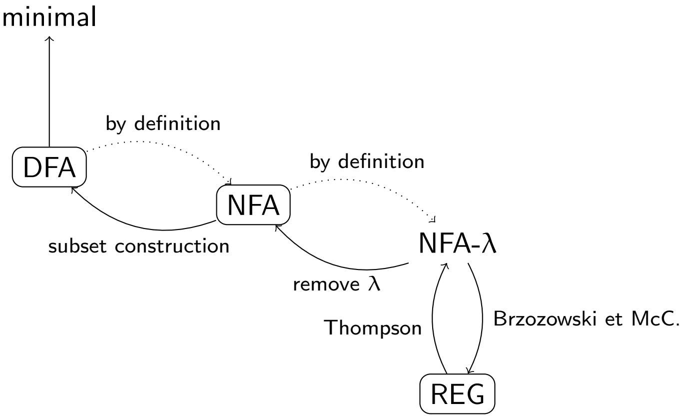
– vaak compacter, of eenvoudiger te construeren

$\{a, b\}^* \; a \, \{a, b\}^2$





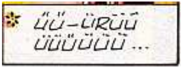
$n + 1$ versus 2^n states


minimal
by definition
DFA
by definition
NFA
subset construction
NFA-λ
remove λ
Thompson
Brzozowski et McC.
REG

talen over $\{a, b\}$ of $\{0, 1\}$

- even aantal a en eindigt op b
- start en eindigt met dezelfde letter
- aantal 1 is drievoud
- op elke oneven positie staat b
- als eindigt op b dan begint met b
- $\{\ 01, 011, 0111\ \}^*$
- prefix / subwoord / suffix 110
- binair getal deelbaar door 3 $10101 \sim 16{+}4{+}1 = 21$

Overzicht



programmeren van eindige automaten

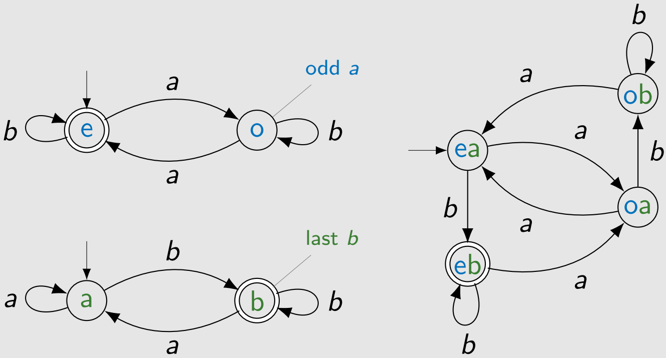
- toestand $\sim$ eigenschap
- garbage toestand (!)
- (niet-)deterministisch

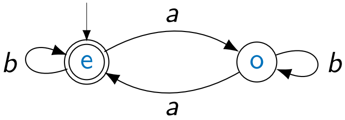
concepten

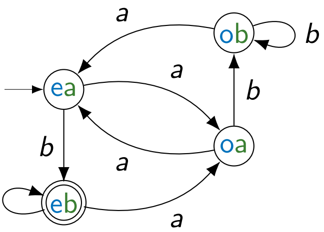
- even / oneven modulo m
  lengte, aantal letters a
- 'patroon'
  prefix, subwoord, suffix
- aantal voorkomens overlap $aba{\cdot}ba = ab{\cdot}aba$
- Boolese combinaties
  en, of, niet als. . . dan
- volgorde

- even aantal a
- laatste letter b

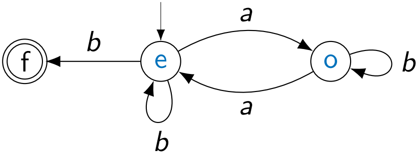
Example (even aantal a én eindigt met b)

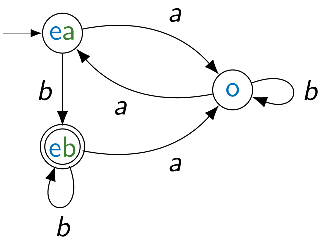




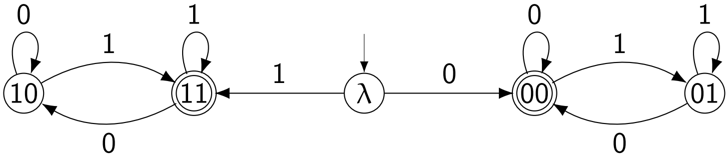


even aantal a én eindigt met b

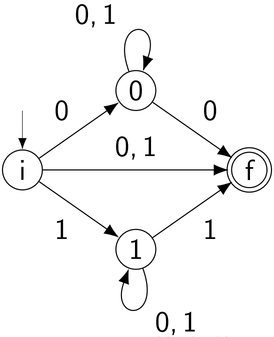




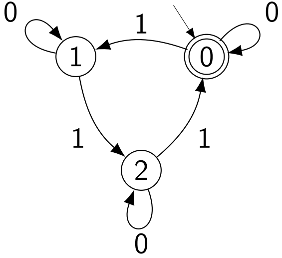
– starts and ends with the same symbol



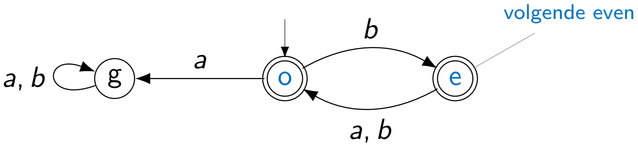
niet-deterministisch



aantal 1-en is drievoud



op elke oneven positie staat een b de eerste letter is de eerste positie

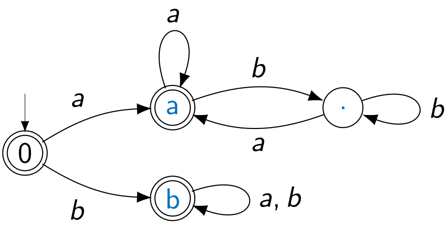


als w eindigt op een b dan begint w met een b

$a \cdots a$ ✓ $a \cdots b$ × $b \cdots a$ ✓ $b \cdots b$ ✓ λ ✓ (!)

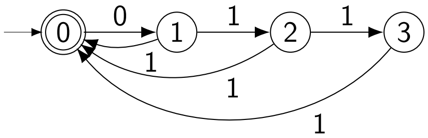
of: w begint met een b

of: w begint met een a en eindigt met een a

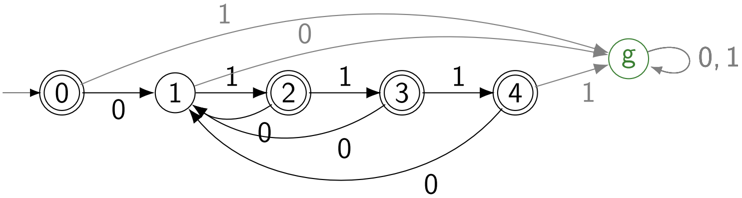


$\{ 01, 011, 0111 \}^*$

niet-deterministisch

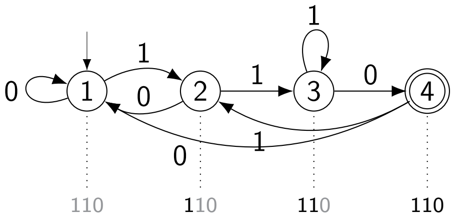


deterministisch 'uitrollen' + garbage

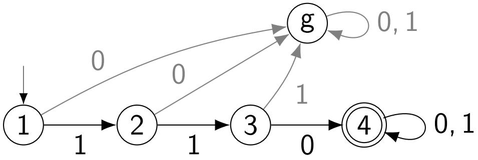


suffix [= eindigt op] 110

subwoord [= bevat] 110



prefix [= begint met] 110



binair woord, deelbaar door drie

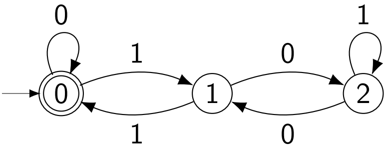
$$\begin{array}{rllll}
10101 & 2^4+2^2+2^0 & =16+4+1 & =21 \\
101010 & 2^5+2^3+2^1 & =32+8+2 & =42=2\cdot 21 \\
101011 & 2^5+2^3+2^1+2^0 & =32+8+2+1 & =43=2\cdot 21+1
\end{array}$$

$val : \{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{N}$

$$val(w0) = 2\cdot val(w)$$
$$val(w1) = 2\cdot val(w) + 1$$

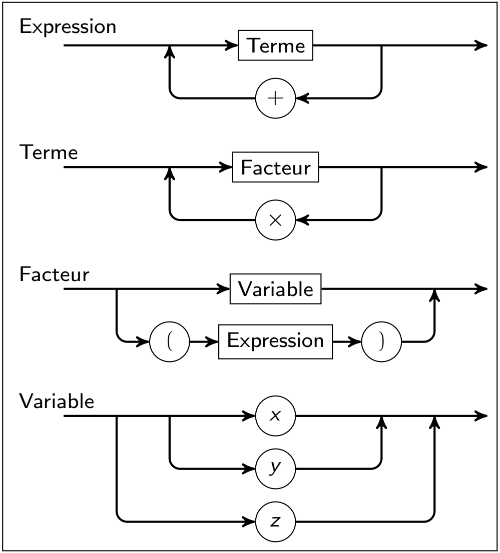
states represent $val(w)$ modulo 3

δ	0	1
x	$2x$	$2x+1$
0	0	1
1	2	0
2	1	2



Overzicht

9. Talen en Automaten
   - Letter, woord, taal
   - Reguliere talen
   - Eindige automaten
   - Voorbeelden
   - Context-vrije grammatica's☒
   - Turing machines☒



$$\Sigma = \{ x, y, z, (,), +, \times \}$$

$$x + x \times y \times (y + z) + x$$

$$E \to T + E \mid T$$
$$T \to F \times T \mid F$$
$$F \to V \mid (E)$$
$$V \to x \mid y \mid z$$

http://math.et.info.free.fr/TikZ/index.html Chapitre 7

The formulas φ of propositional logic are given by the following *context free grammar*, in which p ranges over the propositional variables PVar.

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid (\varphi)$$

1. *Basis.* Formules zijn $\perp$ (*false*), en de propositievariabelen p in PVar.
2. *Inductie.* φ_1 en φ_2 formules, dan ook $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ en (φ_1).

$$\Sigma = \text{Pvar} \cup \{ \perp, \wedge, \vee, \rightarrow, (,) \}$$

$$S \rightarrow p \mid \perp \mid S \wedge S \mid S \vee S \mid S \rightarrow S \mid (S)$$

$AeqB = \{ \ x \in \{a, b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x) \ \}$ $\qquad n_a(x) =$ aantal letters a in x

aaabbb, ababab, aababb, . . .

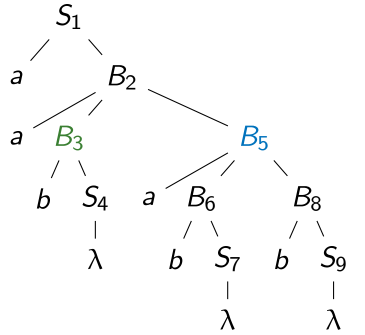
$$S \to \lambda \mid aB \mid bA$$

$$A \to aS \mid bAA \qquad A \text{ generates } n_a(x) = n_b(x) + 1$$

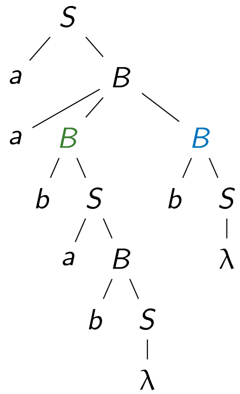
$$B \to bS \mid aBB \qquad B \text{ generates } n_a(x) + 1 = n_b(x)$$

$$S \Rightarrow a\underline{B} \Rightarrow aa\underline{B}B \Rightarrow aab\underline{S}B \Rightarrow aab\underline{B} \Rightarrow aaba\underline{B}B \Rightarrow aabab\underline{S}B \Rightarrow aabab\underline{B} \Rightarrow aababb\underline{S} \Rightarrow aababb$$

afleiding $\quad S \Rightarrow^* w \in \{a, b\}^*$



$$S_1 \Rightarrow aB_2 \Rightarrow aaB_3B_5 \Rightarrow aabS_4B_5 \Rightarrow aabB_5 \Rightarrow aabaB_6B_8 \Rightarrow aababS_7B_8 \Rightarrow aababB_8 \Rightarrow aababbS_9 \Rightarrow aababb$$



$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabSB \Rightarrow aabaBB \Rightarrow aababSB \Rightarrow aababB \Rightarrow aababbS \Rightarrow aababb$$

TYPE	**grammar**	**automaton**
3	regular	
	right-linear	finite state
	$A \to aB$	$p \xrightarrow{a} q$
2	context-free	
	$A \to \alpha$	pushdown
		(+lifo stack)
1	context-sensitive	
		linear bounded
	$\lvert\alpha\rvert \leqslant \lvert\beta\rvert$	
	monotone	
0	recursively enumerable	
	$\alpha \to \beta$	turing machine

type 3 Klasse van talen heet regulier, naar de operaties.

Eindige automaten. De rechtslineaire grammatica's doen de automaat precies na. Productie $A \to aB$ (transitie) en $A \to \lambda$ (eindtoestand).

type 2 Klasse van talen heet context-vrij, naar de grammatica. Producties $A \to \alpha$, oftwel één symbool wordt herschreven, onafhankelijk van de buren, vandaar de naam.

De grammatica's definieren een recursief proces. De bijbehorende automaten hebben een stapel, waarmee dat kan worden nagedaan.

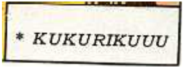
type 0 De talen heten recursief opsombaar: er is een algoritme dat de strings opsomt (genereert), en dat is dan de Turing machine. De grammatica's hebben geen beperking.

type 1 Talen heten context gevoelig, naar een grammatica type waar de $A \to \alpha$ regels alleen gebruikt kunnen worden tussen bepaalde buren. Een equivalent type grammatica heet monotoon, dat is de beperking dat nooit een kortere string mag worden verkregen met de regels.

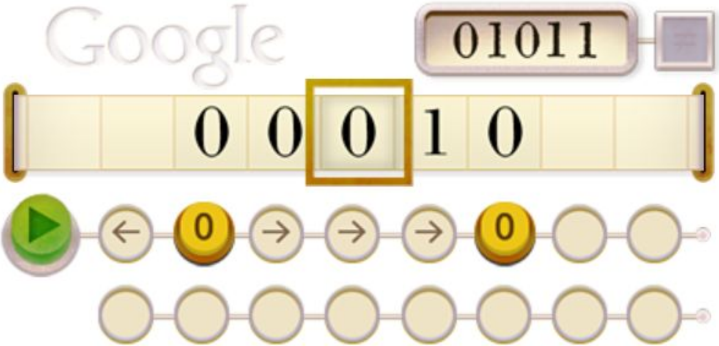
De automaat is lineair begrensd, dat wil zeggen een Turing machine die slechts evenveel tape mag gebruiken als waar zijn invoer staat.

Overzicht

9 Talen en Automaten
- Letter, woord, taal
- Reguliere talen
- Eindige automaten
- Voorbeelden
- Context-vrije grammatica's☒
- Turing machines☒



23 juni 2012 100e geboortedag van Alan Turing



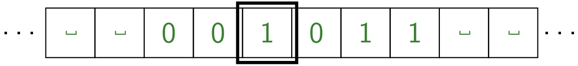
doodle: Alan Turings 100th birthday

- berekenbaarheid *computability*

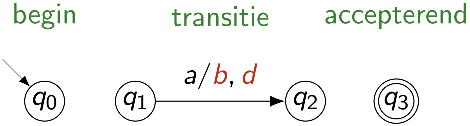
  wat kan er berekend worden?
  onbeslisbaar

- complexiteit
  hoe *efficient* kan iets berekend worden?

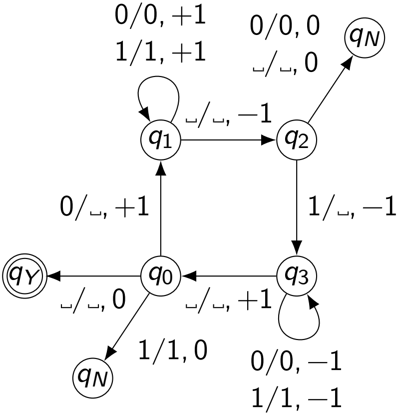
  tijd- en ruimtecomplexiteit
  P versus NP
  NP-compleet



- lezen en schrijven a/b
- twee richtingen $d \in \{0, \pm 1\}$
- onbegrensde tape



▶ $\{\, 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$



q_0	op eerste symbool links, schrap 0
q_1	ga naar rechts, tot ␣
q_2	op laatste symbool rechts, schrap 1
q_3	ga naar links, tot ␣

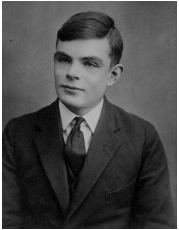
	0	1	␣
q_0	$q_1, \textvisiblespace, +1$	$q_N, 1, 0$	$q_Y, \textvisiblespace, 0$
q_1	$q_1, 0, +1$	$q_1, 1, +1$	$q_2, \textvisiblespace, -1$
q_2	$q_N, 0, 0$	$q_3, \textvisiblespace, -1$	$q_N, \textvisiblespace, 0$
q_3	$q_3, 0, -1$	$q_3, 1, -1$	$q_0, \textvisiblespace, +1$

deterministisch: functie

$$\delta : \quad \underbrace{Q \times \{0, 1, \textvisiblespace\}}_{\text{in toestand, lees symbool}} \quad \mapsto \quad \underbrace{Q \times \{0, 1, \textvisiblespace\} \times \{-1, 0, +1\}}_{\text{nieuwe toestand, schrijf symbool, richting}}$$

searching for simple and powerful models

- Alan Turing (1912–1954)
  "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem" (1937)
- Emil Post (1897–1954)
  "Finite Combinatory Processes - Formulation 1" (1936)
- Marvin Minsky (1927–2016)
  counter machine / register machine (1961)



pictures from turingarchive.org, Wikipedia, Bcjordan CC BY 3.0

Er bestaat *geen* algoritme voor

Entscheidungsproblem   1935/6 Alonzo Church + Stephen Kleene

is a given statement φ true ?

Halting problem   1936 Alan Turing

does a given program P halt on input x ?

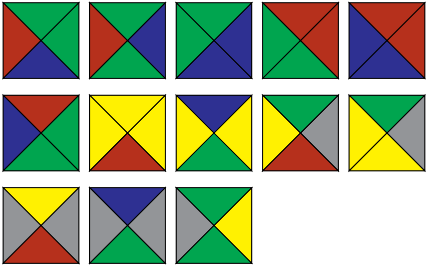
Hilbert's tenth problem   1970 Matiyasevich + Davis, Putnam, Robinson

has a given Diophantine equation D a solution ?

$$61x^2 + 1 = y^2$$

Wang tiles, 1961

niet draaien



patroon zonder regelmaat (lastig)

Karel Culik II, 1996

invoer: verzameling tegels

gevraagd: bestaat er een passende betegeling van het vlak?

er is géén algoritme dat dit probleem oplost

Berger 1966

probleem $\sim$ taal

graaf G $\rightsquigarrow$ $\langle G \rangle$ string

Ham alle Hamilton grafen $\rightsquigarrow$ $\langle \text{Ham} \rangle$ taal

G is Hamilton graaf $\iff$ $\langle G \rangle \in \langle \text{Ham} \rangle$

klasse van talen / problemen

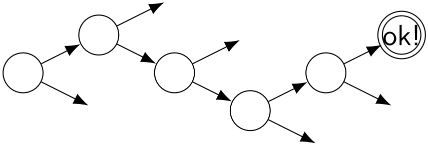
P geaccepteerd door *deterministische* TM in *polynomiale* tijd

Ham circuit berekenen in polynomiale tijd

NP geaccepteerd door *niet-deterministische* TM in *polynomiale* tijd

Ham circuit gokken en verifieren in polynomiale tijd

$\simeq$ gegeven Ham circuit verifieren in polynomiale tijd


ok!

P geaccepteerd door *deterministische* TM in *polynomiale* tijd

oplossing berekenen in polynomiale tijd

NP geaccepteerd door *niet-deterministische* TM in *polynomiale* tijd

oplossing (gokken en) verifieren in polynomiale tijd

The P versus NP problem is a major unsolved problem in computer science. It asks whether every problem whose solution can be quickly verified can also be solved quickly.

wikipedia

3-SAT satisfiability

gegeven: Boolese formule φ in 3CNF
vraag: kan φ waargemaakt worden?

$$\varphi = \underbrace{(p \vee q \vee r)}_{\text{clause}} \wedge (p \vee \underbrace{\neg q}_{\text{literal}} \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee r \vee s)$$

3-COL 3-colouring

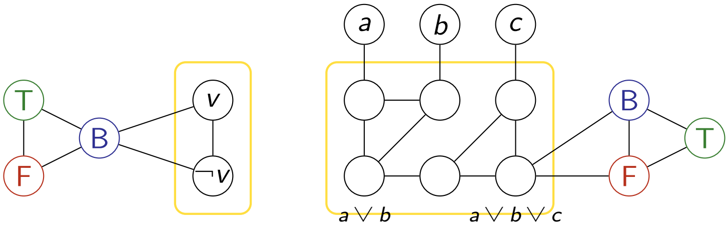
gegeven: ongerichte graaf G
vraag: kan G gekleurd worden met 3 kleuren?

reductie algoritme vertalen

$$3\text{-SAT} \leqslant_p 3\text{-COL}$$

formule $\varphi \xrightarrow{R} G_\varphi$ ongerichte graaf

φ waargemaakt desda G_φ 3-kleurbaar



elke variabele v elke clause $a \vee b \vee c$

David Epstein wikipedia:gadget

SAT is één van de moeilijkste problemen in **NP**

Stelling (Stephen Cook, 1971; Leonid Levin, 1973)

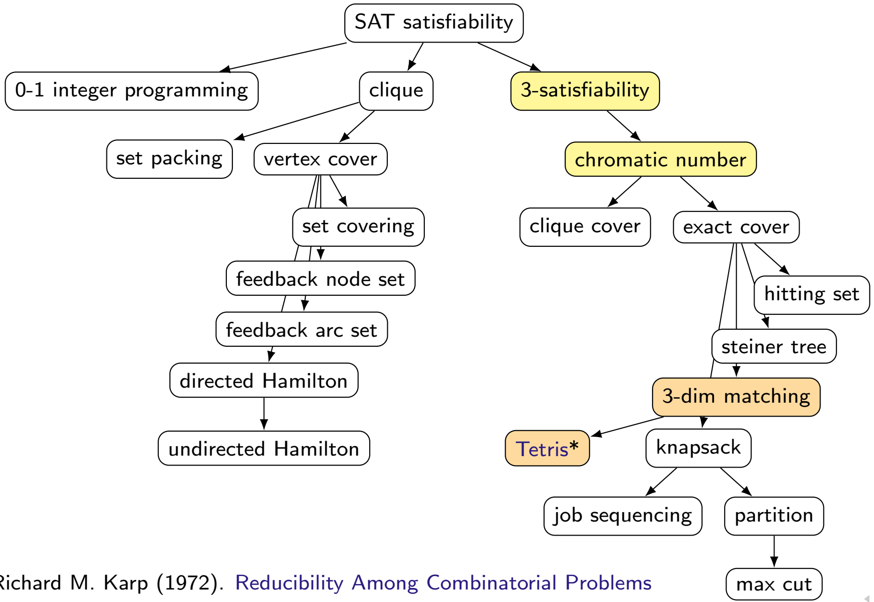
SAT $\in$ **NPC** $\qquad$ P $\leqslant_p$ SAT voor alle P in **NP**

Jiří Janíček wikipedia

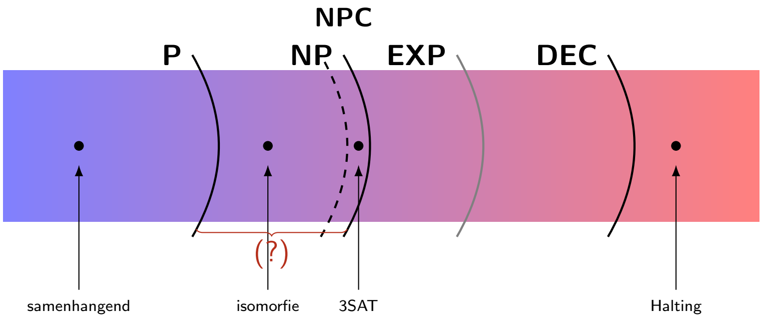
Sergio01 wikipedia

Stephen Cook, The complexity of theorem proving procedures. Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. pp. 151–158, 1971. doi:10.1145/800157.805047

Karp's 21 NP-complete problems



Richard M. Karp (1972). Reducibility Among Combinatorial Problems


NPC
P
NP
EXP
DEC
(?)
samenhangend
isomorfie
3SAT
Halting

END.

edit 14 december 2020