Logica voor Informatici **21 december 1999, 14.00 – 17.00**

Er zijn 8 opgaven, die respectievelijk 10, 10, 8, 12, 12, 12, 16 en 20 punten waard zijn.
De eerste vier opgaven gaan over de proposititelogica en de laatste vier over de predikaatlogica.
De opgaven hoeven uiteraard niet in de gegeven volgorde gemaakt te worden.

Geef in semantische tableaus precies aan welke reductieregels je gebruikt.

1. Over Erwin weten we het volgende: 10

- Als het regent, dan neemt hij zijn paraplu of zijn regenpak mee.
- Als hij zijn regenpak meeneemt, dan laat hij zijn paraplu thuis.
- Als hij zijn paraplu meeneemt, dan regent het niet.
- Als hij zijn regenpak thuis laat, dan regent het.

Wat neemt Erwin mee en wat laat hij thuis?
Bepaal dat met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).

2. Geef reductieregels voor het ternaire connectief $\underline{\text{if}}\ \varphi\ \underline{\text{then}}\ \psi\ \underline{\text{else}}\ \chi$ 10
(dat logisch equivalent is met $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi)$).
Laat nu met behulp van een semantisch tableau zien dat de volgende formule een tautologie is: $(\underline{\text{if}}\ p\ \underline{\text{then}}\ q\ \underline{\text{else}}\ r) \rightarrow (\underline{\text{if}}\ \neg p\ \underline{\text{then}}\ r\ \underline{\text{else}}\ q)$

3. Uit $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ volgt $(p \vee q) \rightarrow r$. 8
Toon dat aan door middel van een semantisch tableau.

4. Bewijs met natuurlijke deductie: 12

a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \vee q) \rightarrow r$

b) $p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow \neg p$

5. Beschouw het domein der mensen, met de volgende twee predikaten: 12
Oxy betekent dat x een ouder van y is, en Vx betekent dat x een vrouw is.
Schrijf nu ieder van de volgende zinnen als formule van de predikaatlogica:

a) Er zijn mensen die geen dochter hebben.

b) Niemand is grootvader.

c) Iedere moeder heeft minstens twee kinderen.

Opmerking: de gelijkheidsrelatie $(x = y)$ mag ook gebruikt worden.

6. Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de volgende gevolgtrekking *niet* geldig is: uit $\exists x \forall y Kyx$ en $\forall x \forall y(Kyx \to Bx)$ volgt dat $\forall x Bx$. 12
Construeer uit het semantisch tableau een tegenvoorbeeld voor deze gevolgtrekking.
Opmerking: lees eventueel Kyx als "y kent x" en Bx als "x is bekend".

7. Laat zien dat uit $\forall x \forall y(Kyx \to Bx)$ volgt dat $\forall x(\exists y Kyx \to Bx)$. Doe dat 16

a) met een semantisch tableau, en

b) met natuurlijke deductie.

Opmerking: dit is één van de prenex-equivalenties.

8. **a)** Wat zijn de wetten van De Morgan? 20
Geef ook de wetten voor negatie in combinatie met de kwantoren.
Wat is het principe van dubbele negatie?

b) We noemen in deze opgave een predikaatlogische formule φ "genormaliseerd" als negaties alleen toegepast zijn op *atomaire* subformules van φ.
Bijv. $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$ is genormaliseerd, maar $\neg \forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$ is niet genormaliseerd, en $\forall x \exists y \neg(Rxy \wedge \neg Ryx)$ ook niet.

Leg uit hoe je voor iedere formule φ van de predikaatlogica een genormaliseerde formule φ' kunt maken die logisch equivalent is met φ. Laat dat zien aan de formule $\neg \forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$.

c) Bewijs de bewering in **b** door de volgende bewering te bewijzen met formule-inductie:

Voor iedere formule φ van de predikaatlogica zijn er genormaliseerde formules φ' en φ'' zodat φ' logisch equivalent is met φ, en φ'' logisch equivalent is met $\neg\varphi$.

Opmerking: het is voldoende dit te bewijzen voor formules waar $\to$ en $\leftrightarrow$ niet in voorkomen.