Logica voor Informatici **6 april 2000, 14.00 – 17.00**

Er zijn 8 opgaven, die respectievelijk 10, 10, 8, 12, 12, 10, 18 en 20 punten waard zijn.
Opgaven 1, 2, 3, 4 en 8 gaan over de propositielogica en opgaven 5, 6 en 7 over de predikaatlogica.
De opgaven hoeven uiteraard niet in de gegeven volgorde gemaakt te worden.

Geef in semantische tableaus precies aan welke reductieregels je gebruikt.

1. Over het weer in Londen weten we het volgende: 10

- Het waait of het regent.
- Als het waait en regent, dan is het koud.
- Als het regent, dan is het niet koud.
- Als het niet waait, dan is het koud.

Waait het in Londen? Regent het in Londen?
Bepaal het antwoord op deze vragen met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).

2. Geef reductieregels voor het binaire connectief $\varphi \,\mathrm{NOR}\, \psi$ 10
(dat logisch equivalent is met $\neg\varphi \wedge \neg\psi$).
Gebruik deze reductieregels om met behulp van een semantisch tableau te laten zien
dat de volgende formule een tautologie is: $(\neg p \,\mathrm{NOR}\, \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$.

3. Uit $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ volgt $(p \wedge q) \rightarrow r$. 8
Toon dat aan door middel van een semantisch tableau.

4. Bewijs met natuurlijke deductie: 12

a) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \;\vdash\; (p \wedge q) \rightarrow r$

b) $p \rightarrow q,\; q \rightarrow \neg p \;\vdash\; \neg p$

5. Beschouw het domein der mensen, met de volgende twee predikaten: 12
Oxy betekent dat x een ouder van y is, en Vx betekent dat x een vrouw is.
Schrijf nu ieder van de volgende zinnen als formule van de predikaatlogica:

a) Iedereen heeft een dochter.

b) Sommige mensen hebben geen kleinzoon.

c) Niemand is moeder van alle mannen.

6. Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de volgende gevolgtrekking *niet* geldig is: uit $\exists x \forall y(Kxy \wedge By)$ volgt dat $(\forall x \exists y Kxy) \wedge (\forall y By)$. 10
Construeer uit het semantisch tableau een tegenvoorbeeld voor deze gevolgtrekking.

7. Laat zien dat uit $\forall x \exists y(Kyx \rightarrow Bx)$ volgt dat $\forall x((\forall y Kyx) \rightarrow Bx)$. Doe dat 18

a) met een semantisch tableau, en

b) met natuurlijke deductie.

Opmerking: dit is één van de prenex-equivalenties.

8. **a)** Wat zijn de wetten van De Morgan? 20
Wat is het principe van dubbele negatie?

b) Laat met behulp van **a** zien dat $\neg\varphi \,\mathrm{NOR}\, \neg\psi$ logisch equivalent is met $\varphi \wedge \psi$, en dat $\neg(\varphi \,\mathrm{NOR}\, \psi)$ logisch equivalent is met $\varphi \vee \psi$ (voor het connectief NOR zie Opgave 2).
Toon ook aan dat $\varphi \,\mathrm{NOR}\, \varphi$ logisch equivalent is met $\neg\varphi$.
Geef nu formules χ_1 en χ_2 die alleen het connectief NOR bevatten en die logisch equivalent zijn met $\varphi \wedge \psi$ en met $\neg(\varphi \wedge \psi)$, respectievelijk.

c) Bewijs met formule-inductie dat het connectief NOR functioneel volledig is, d.w.z. dat er voor iedere formule φ van de propositielogica een formule φ' bestaat die alleen het connectief NOR bevat en die logisch equivalent is met φ.
Opmerking: het is voldoende dit te bewijzen voor formules waar $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ niet in voorkomen.