Extra Opgaven Logica

Opgaven die gemaakt kunnen worden, uit het boek (B) of uit de hierna volgende lijst van extra/vervangende opgaven (E):

2.1(B), 2.2(B), 2.3(B), 2.9(E, bekijk eerst Vb.2.13), 2.4(E), 2.10(E), 2.5(E), 2.6(E)
3.2(E), 3.8(E), 3.4(b i)(B), 3.9(E), 3.10(E), 3.11(E), 3.1(B), 3.3(i)(B), 3.4(a)(B)
4.1(E), 4.3(B), 4.4(B), 4.5(B), 4.6(B), 4.2(E), 4.10(E)(selectie)
5.5(B), 5.11(E), 5.9(E), 5.10(E)
6.6(B), 6.7(B), 6.8(B), 6.1(B), 6.3(B), 6.4(B)
7.3(B), 7.4(B), 7.7(E), 7.9(B), 7.6(B), 7.2(B)
8.1(B), 8.6(E), 8.7(E), 8.2(B), 8.3(a)(B)
9.3(B), 9.1(ii,iii,iv)(B), 9.6(E), 9.1(vi,vii,viii)(E)
10.3(E), 10.1(B), 10.2(i)(B), 10.8(E)

(2.4) Maak een waarheidstabel voor elk van de volgende connectieven. Geef ook een logisch equivalente formule met alleen standaardconnectieven.

1. noch φ noch ψ (zie Voorbeeld 2.18)
2. φ alleen als ψ
3. φ tenzij ψ
4. φ mits ψ
5. <u>if</u> φ <u>then</u> ψ <u>else</u> χ (in C^{++}: $\varphi\ ?\ \psi : \chi$)
6. óf φ óf ψ (dit is “exclusive or”: $\varphi \oplus \psi$, φ <u>xor</u> ψ)

(2.5) Geef een disjunctieve normaalvorm voor $((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$. Doe dit op twee manieren: (1) met behulp van een waarheidstabel, en (2) door het toepassen van logische equivalenties. Doe dit ook voor $((p \vee q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$.

*(2.6) Bepaal alle waarheidsfuncties die te definiëren zijn met behulp van een formule die alleen gebruik maakt van de twee propositieletters p, q en het connectief $\to$. (Eén hiervan is de disjunctie $\vee$.)

(2.9) Willem eet in een snackbar en daarover doet hij de volgende mededelingen:

1. Ik eet patat of een hamburger.
2. Als ik een hamburger eet, dan neem ik ook een milkshake.
3. Als ik patat en een hamburger eet, dan neem ik géén milkshake.
4. Als ik een milkshake neem, dan eet ik patat.

Eet Willem patat? Eet Willem een hamburger?
Bepaal het antwoord op deze vragen met behulp van een waarheidstabel (modeleliminatie).

(2.10) Laat zien dat de volgende formules logisch equivalent zijn:

1. $p \to q$ en $\neg p \vee q$ en $\neg(p \wedge \neg q)$

2. $p \to q$ en $\neg q \to \neg p$

3. $p \leftrightarrow q$ en $(p \to q) \wedge (q \to p)$
   en $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
   en $\neg p$ $\underline{\text{xor}}$ q
   en $\neg(p$ $\underline{\text{xor}}$ $q)$

4. $\underline{\text{if}}$ p $\underline{\text{then}}$ q $\underline{\text{else}}$ r en $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
   en $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

5. $p \to q$ en $\underline{\text{if}}$ p $\underline{\text{then}}$ q $\underline{\text{else}}$ $\underline{\text{true}}$
   (voor $\underline{\text{true}}$ geldt: $V(\underline{\text{true}}) = 1$ voor iedere V)

(3.2) Toon aan:
$$\begin{aligned} \varphi_1, \varphi_2 \models \psi \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_1 \models \varphi_2 \to \psi \\ &\Leftrightarrow \quad \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi) \\ &\Leftrightarrow \quad \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi \end{aligned}$$

(3.8) Laat door middel van een semantisch tableau zien dat de gevolgtrekking over Eva en Jan op blz.11 geldig is.

(3.9) Bepaal alle modellen van $\{\varphi, \psi, \chi\}$ door middel van een semantisch tableau voor de sequent $\varphi, \psi, \chi \circ$. Is $\{\varphi, \psi, \chi\}$ consistent? Neem voor φ, ψ, χ de formules van Voorbeeld 2.13 of van Opgave 2.9.

(3.10) Laat $\varphi = ((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \wedge q)$. Maak een semantisch tableau voor de sequent $\varphi \circ$, en bepaal daaruit een disjunctieve normaalvorm voor φ (zie Opgave 2.5).

(3.11) Maak reductieregels voor de connectieven

1. noch α noch β

2. $\underline{\text{if}}$ α $\underline{\text{then}}$ β $\underline{\text{else}}$ γ

(zie Opgaven 2.4 en 2.10). Laat nu, met gebruikmaking van deze reductieregels, zien dat (noch p noch r) $\to \neg(\underline{\text{if}}$ p $\underline{\text{then}}$ q $\underline{\text{else}}$ $r)$ een tautologie is.

(4.1) Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$

2. $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$

3. $p \to q,\ p \to r \vdash p \to (q \wedge r)$, en de twee beweringen die uit de omkering voortkomen

4. $p \vee r,\ q \to r \vdash (p \to q) \to r$

(4.2) Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $\vdash p \vee \neg p$ (de wet van het Uitgesloten Derde)
2. $\neg p \vee q \vdash p \to q$, en omgekeerd
3. $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$ (het principe van contrapositie, zie Voorbeeld 4.6)
4. $p \to (q \vee r) \vdash (p \to q) \vee r$ (hint: gebruik $\vdash r \vee \neg r$)

(4.10) Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $p \wedge (q \wedge r) \vdash r \wedge p$
2. $p \to (q \wedge r),\ q \to s,\ p \vdash s$
3. $p \to (p \to q) \vdash p \to q$
4. $(p \wedge \neg q) \to r,\ p \vdash \neg q \to (r \vee s)$
5. $(p \vee q) \to r \vdash q \to r$
6. $p \vee q,\ p \to r,\ q \to s \vdash r \vee s$
7. $p \to \neg q \vdash q \to \neg p$
8. $p \vee q,\ \neg q \vdash \neg(p \to q)$
9. $\vdash \neg p \to (p \to q)$
10. $\neg p,\ \neg q \vdash \neg((p \to q) \to q)$
11. $\neg p \to q \vdash p \vee q$

(5.9) Stel dat φ en ψ formules zijn waarin $\wedge, \to, \leftrightarrow, \neg$ niet voorkomen, dus alleen $\vee$. Bewijs de volgende uitspraken met formule-inductie:

1. Voor iedere propositieletter p: als p in ψ voorkomt, dan geldt $p \vdash \psi$.
2. Als iedere propositieletter p die in φ voorkomt óók in ψ voorkomt, dan geldt $\varphi \vdash \psi$. (hint: gebruik formule-inductie naar φ)

(5.10) Stel dat φ en ψ formules zijn waarin $\vee, \to, \leftrightarrow, \neg$ niet voorkomen, dus alleen $\wedge$. Bewijs de volgende uitspraak met formule-inductie:
Als iedere propositieletter p die in ψ voorkomt óók in φ voorkomt, dan geldt $\varphi \vdash \psi$.

(5.11) We noemen in deze opgave een formule φ "genormaliseerd" als negaties alleen toegepast zijn op *atomen* van φ.
Bijv. $p \wedge (q \vee \neg r)$ is genormaliseerd, maar $\neg(p \wedge (q \vee \neg r))$ is niet genormaliseerd, en $p \wedge \neg(q \vee \neg r)$ ook niet.

1. Leg uit hoe je voor iedere formule φ van de propositielogica een genormaliseerde formule φ' kunt maken die logisch equivalent is met φ. Laat dat zien aan de formules $\neg(p \wedge (q \vee \neg r))$ en $\neg(p \wedge \neg(q \vee \neg r))$.
2. Geef hiervan een formeel bewijs door de volgende bewering te bewijzen met formule-inductie:

   Voor iedere formule φ van de propositielogica zijn er genormaliseerde formules φ' en φ'' zodat φ' logisch equivalent is met φ, en φ'' logisch equivalent is met $\neg\varphi$.

   Opmerking: het is voldoende dit te bewijzen voor formules waar $\to$ en $\leftrightarrow$ niet in voorkomen (waarom?).

(7.7)

1. De weergave van "Er is een P die Q is" moet zijn: $\exists x(Px \wedge Qx)$, en *niet*: $\exists x(Px \rightarrow Qx)$. Waarom is het tweede fout?

2. De weergave van "Alle P zijn Q" moet zijn: $\forall x(Px \rightarrow Qx)$, en *niet*: $\forall x(Px \wedge Qx)$. Waarom is het tweede fout?

3. Laat zien dat $\neg\forall x(Px \rightarrow Qx)$ en $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$ logisch equivalent zijn. Hint: gebruik "De Morgan", inclusief de volgende logische equivalentie (zie Hoofdstuk 8.2): $\neg\forall x\, \varphi \leftrightarrow \exists x \neg\varphi$.

(8.6) De volgende uitspraak is een incorrecte manier om te zeggen dat ieder even positief getal groter is dan de helft van dat getal (waarbij we alleen natuurlijke getallen bekijken). Waarom is het incorrect? Geef ook een correcte formule voor deze uitspraak.

"Voor ieder positief getal y geldt:

als er een getal x is zodat $y = 2x$, dan is $y > x$."

Geef ook een formule voor de volgende uitspraak, die op correcte wijze zegt dat ieder even positief getal groter is dan 1.

"Voor ieder positief getal y geldt:

als er een getal x is zodat $y = 2x$, dan is $y > 1$."

(8.7) We noemen in deze opgave een predikaatlogische formule φ "genormaliseerd" als negaties alleen toegepast zijn op *atomaire* subformules van φ (zie ook Opgave 5.11).
Bijv. $\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$ is genormaliseerd, maar $\neg\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$ is niet genormaliseerd, en $\forall x \exists y \neg(Rxy \wedge \neg Ryx)$ ook niet.

1. Leg uit hoe je voor iedere formule φ van de predikaatlogica een genormaliseerde formule φ' kunt maken die logisch equivalent is met φ. Laat dat zien aan de formule $\neg\forall x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$.

2. Geef hiervan een formeel bewijs door de volgende bewering te bewijzen met formule-inductie:

   Voor iedere formule φ van de predikaatlogica zijn er genormaliseerde formules φ' en φ'' zodat φ' logisch equivalent is met φ, en φ'' logisch equivalent is met $\neg\varphi$.

(9.1) Voeg aan deze opgave toe:
vii. $\models (\forall x Ax \wedge \exists y By) \leftrightarrow \forall x \exists y(Ax \wedge By)$
viii. $\models \forall x(\forall y(\neg\forall z Kyz \rightarrow Kyx) \rightarrow \forall y Kyx)$

(9.6) Schrijf $\exists y \in A.\varphi$ voor $\exists y(Ay \wedge \varphi)$. Bewijs nu dat

$$\forall x \exists y \in A.(By \vee Cx) \models \forall x((\exists y \in A.By) \vee Cx),$$

maar niet omgekeerd. Dit betekent dat de prenex-wet $((\exists y\, \varphi) \vee \psi) \rightarrow \exists y(\varphi \vee \psi)$ niet geldt voor $\exists y \in A$.

(10.3) Bewijs de volgende syllogismen:

1. $\forall x(Ax \to Bx),\ \forall x(Bx \to Cx)\ \vdash \forall x(Ax \to Cx)$
2. $\exists x\, Ax,\ \forall x(Ax \to Cx)\ \vdash \exists x\, Cx$
3. $\exists x(Ax \vee Bx),\ \forall x(Ax \to Cx)\ \vdash \exists x(Bx \vee Cx)$

(10.8) Bewijs met natuurlijke deductie:

1. $\forall x \exists y Rxy,\ \forall x \forall y(Rxy \to Ryx),\ \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)\ \vdash \forall x Rxx$
2. $\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx),\ \forall x \forall y(Rxy \to \forall z(Rxz \vee Rzy))\ \vdash$
   $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$
3. Opgave 9.1(ii)

*4. Opgave 9.1(iii).